

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640180302

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2018 г. М.О. Леви^{1,2}, К.Л. Агаян³, Л.А. Атоян³, В.В. Калинчук^{1,2}

Аннотация. Рассмотрена связанная смешанная задача о колебаниях электромагнитоупругой среды, представляющей собой электроупругий слой оксида титаната бария (BaTiO_3) на поверхности магнитоупругого полупространства феррита кобальта (CoFe_2O_4). Колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, и осуществляются под действием осциллирующего электрического потенциала, приложенного к расположенному на поверхности среды электроду. В механическом плане поверхность свободна от напряжений, электрод является абсолютно гибким и невесомым. Слой и полупространство предполагаются жестко сцепленными между собой, нижняя грань слоя металлизирована и заземлена. Для различных комбинаций магнитных условий на поверхности и границе раздела сред построено интегральное представление, определяющее перемещение, магнитный и электрический потенциалы в произвольной точке среды. Выведено интегральное уравнение, связывающее электрический потенциал с распределенной на электроде плотностью электрического заряда. Исследованы электрические свойства слоистой электромагнитоупругой среды, построены графики электрической емкости среды при различных граничных условиях.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, контактное взаимодействие, функция Грина, электрическая емкость.

MIXED PROBLEM FOR A LAYERED INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETICALLY HALF-SPACE

M.O. Levi^{1,2}, K.L. Agayan³, L.A. Atoyan³, V.V. Kalinchuk^{1,2}

Abstract. A related mixed problem on the vibrations of an electromagnetoelastic medium, which is an electroelastic layer of barium titanate oxide (BaTiO_3), on the surface of a magnetoelastic half-space of cobalt ferrite (CoFe_2O_4) is considered. The oscillations are assumed to be steady, proceeding according to a harmonic law, and are carried out under the action of an oscillating electric potential applied to the electrode located on the surface of the medium. In the mechanical plan, the surface is free from stresses, the electrode is assumed to be absolutely flexible and weightless. The layer and half-space are assumed to be rigidly adhered, the lower edge of the layer is metallized and grounded. For various combinations of magnetic conditions on the surface and the interface between media, an integral representation that determines the displacement, magnetic and electric potentials at an arbitrary point in the medium is constructed. The integral equation connecting the electric potential with the electric charge density distributed at the electrode is derived. The dispersion properties of a layered electromagnetoelastic medium are investigated, the graphs of the dynamic capacitance of the medium are constructed, and the charge distributions in the contact zone on its surface for a single-electrode structure are obtained.

Keywords: electromagnetoelasticity, contact interaction, Green's function, electrical capacity.

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: kalin@ssc-ras.ru

² Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, e-mail: mlevi@mindonline.ru

³ Институт механики НАН Республики Армения (Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of the Republic of Armenia), Республика Армения, 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б

ВВЕДЕНИЕ

Активное применение функционально-ориентированных композиционных материалов со специальными физико-механическими свойствами обуславливает необходимость детального изучения их свойств с целью прогнозирования функциональных возможностей, основанных на взаимодействии полей различной природы [1–28]. Различные подходы и методы анализа распространения волновых полей в электромагнитоупругих (ЭМУ) пластинах представлены в работах [1–3]. Вопросы существования и распространения SH-волн в пьезоэлектрических (ПЭ) и пьезомагнитных (ПМ) средах изучены в статьях [4–6]. Обзор результатов экспериментальных исследований волноводных свойств ЭМУ сред приведен в работе [7]. Проблемы возникновения и распространения волн Лява в ЭМУ средах обсуждались в публикациях [8–14]. В работах [8; 9] предметом анализа являлись твердые растворы ПЭ/ПМ материалов, в [10–14] – слоистые, составленные из различных ПЭ и ПМ материалов, структуры. В статье [15] исследована возможность возникновения волн Гуляева – Блюштейна в поляризованной ЭМУ керамике. Вопросы существования и распространения волн Релея рассмотрены в публикациях [16; 17]. В статье [18] изучены условия существования волн Релея в ЭМУ среде при наличии электрического экрана. Различные методы исследования динамических задач контактного взаимодействия без трения для слоистого пьезоэлектрического полупространства предложены в работах [19–21]. В статье [22] предложен приближенный метод расчета многоэлектродных структур, позволяющий эффективно моделировать динамические процессы в задачах дизайна и оптимизации конструкции акустоэлектронных устройств. В работах [23–28] исследованы различные аспекты статического контактного взаимодействия жестких штампов с ПМ средой [23], структурно неоднородными средами ЭМУ [24–28]. Для указанных выше задач построены выражения, описывающие нормальное контактное напряжение, электрическое смещение и магнитную индукцию.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ
СЛОИСТОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается задача об установившихся колебаниях слоисто-неоднородной среды, представ-

ляющей собой электроупругий слой $0 < x_3 \leq h_1$, ($|x_1| \leq \infty$), жестко сцепленный с магнитоупругим полупространством $x_3 \leq 0$, ($|x_1| \leq \infty$). Поверхность среды свободна от механических напряжений и является «магнитно открытой». Колебания осуществляются под действием осциллирующего по гармоническому закону электрического потенциала, приложенного к находящемуся на поверхности среды электроду. Он занимает область $|x_1| \leq a$ и является абсолютно гибким и невесомым. Вне этой области электрические заряды отсутствуют. Предполагается, что слой и полупространство выполнены из материала симметрии 2mm или 6mm. Колебания слоя ($n = 1$) и полупространства ($n = 2$) в безобменном приближении [4–11] описываются линеаризованными уравнениями движения и уравнениями квазистатики Максвелла [13]:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\Theta^{(n)}$ – линеаризованный тензор напряжений, $\mathbf{D}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ – линеаризованные векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}\}$ – расширенный вектор перемещений среды ($u_1^{(n)}$ и $u_3^{(n)}$ – механические компоненты вдоль осей x_1 и x_3 соответственно, $u_4^{(n)} = \varphi$ – электрический потенциал, $u_5^{(n)} = \psi$ – магнитный потенциал). Их компоненты имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} \theta_{lk}^{(n)} &= c_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} + f_{lkp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)}, \\ d_l^{(n)} &= e_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)}, \\ b_l^{(n)} &= f_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} - \mu_{lp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $c_{lksp}^{(n)*}$, $e_{lkp}^{(n)*}$, $f_{lkp}^{(n)*}$ – тензоры упругих ПЭ и ПМ коэффициентов, $\varepsilon_{lp}^{(n)*}$ – диэлектрические константы, $\mu_{lp}^{(n)*}$ – константы магнитной проницаемости, $g_{lp}^{(n)*}$ – коэффициенты ЭМУ связи. Далее перейдем к безразмерным параметрам [6, 8]:

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega h^{(1)} / V_{se}^{(1)}, \\ c_{ij}^{(n)} &= c_{ij}^{(n)} / c_{55}^{(1)}, \\ e_{ij}^{(n)} &= e_{ij}^{(n)} k_e / c_{55}^{(1)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \varepsilon_{ij}^{(n)} k_e^2 / c_{55}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= f_{ij}^{(n)} k_m / c_{55}^{(1)}, \\ \mu_{ij}^{(n)} &= \mu_{ij}^{(n)} k_m^2 / c_{55}^{(1)}, \\ g_{ij}^{(n)} &= g_{ij}^{(n)} k_e k_m / c_{55}^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь $V_{se}^{(1)}$ – скорость сдвиговой волны в слое, k_e, k_m – специальные множители. Линейные параметры задачи и плотности отнесены к толщине и плотности слоя. Поскольку колебания предполагаются гармоническими, все функции представляются в виде $F = F_0 \exp(-i\omega t)$. Ниже временной множитель и штрихи у безразмерных величин опускаются.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для решения поставленной задачи рассмотрим вспомогательную задачу о движении среды под действием нагрузки $q(x_1, t) = q_0 e^{-i\omega t}$ ($q_0 = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$, q_1 и q_3 – компоненты вектора механических напряжений вдоль осей x_1 и x_3 соответственно, $q_4 = \mathbf{n} \times \mathbf{D}^{(1)} = -g$, $q_5 = \mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(1)}$, \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности среды, g – плотность распределения электрического заряда), распределенной в области $|x_1| \leq a$ на поверхности среды. Граничные условия представляются в виде

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \begin{cases} -g, & |x_1| \leq a \\ 0, & |x_1| > a \end{cases}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Theta}^{(1)} = 0, \quad |x_1| < \infty.$$

Для построения решения краевой задачи (1.1), (1.2) с граничными условиями (2.1) применим преобразование Фурье по координате x_1 (α – параметр преобразования). Решение для слоя будем искать в виде ($m = 3, 4, 5$) [13]:

$$U_1^{(1)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(1)} [c_k^{(1)} \text{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \text{ch} \sigma_k^{(1)} x_3], \quad (2.2)$$

$$U_m^{(1)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(1)} [c_k^{(1)} \text{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \text{sh} \sigma_k^{(1)} x_3]$$

для полупространства:

$$U_1^{(2)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(2)} c_k^{(2)} \exp(\sigma_k^{(2)} x_3), \quad (2.3)$$

$$U_m^{(2)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(2)} c_k^{(2)} \exp(\sigma_k^{(2)} x_3).$$

Граничные условия (2.1) после применения преобразования Фурье запишем в виде:

$$\begin{aligned} D_3^{(1)} &= e_{31}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + e_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} - \\ &- g_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = \begin{cases} f(x_1), & |x_1| \leq a \\ 0, & a < |x_1| < \infty \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} B_3^{(1)} &= f_{31}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + f_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} - \\ &- g_{33}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} - \mu_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} T_{31}^{(1)} &= c_{5,5}^{(1)} (U_{3,1}^{(1)} + U_{1,3}^{(1)}) + \\ &+ e_{15}^{(1)} U_{4,1}^{(1)} + f_{15}^{(1)} U_{5,1}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T_{33}^{(1)} &= c_{13}^{(1)} U_{1,1}^{(1)} + c_{33}^{(1)} U_{3,3}^{(1)} + \\ &+ e_{33}^{(1)} U_{4,3}^{(1)} + f_{33}^{(1)} U_{5,3}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На границе $x_3 = 0$ предполагается полное механическое сцепление:

$$T_{31}^{(2)} = T_{31}^{(1)}, \quad T_{33}^{(2)} = T_{33}^{(1)}, \quad (2.8)$$

$$U_3^{(2)} = U_3^{(1)}, \quad U_1^{(2)} = U_1^{(1)},$$

электрические условия соответствуют условиям заземления:

$$U_4^{(1)} = U_4^{(2)} = 0. \quad (2.9)$$

В качестве вариативных условий используются следующие магнитные условия:

задача 1:

$$B_3^{(1)} = B_3^{(2)}, \quad U_5^{(1)} = U_5^{(2)} \quad (2.10)$$

задача 2:

$$U_5^{(1)} = 0, \quad U_5^{(2)} = 0 \quad (2.11)$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Участвующие в представлениях (2.2) и (2.3) неизвестные $y_{pk}^{(n)}$ являются тривиальными решениями системы уравнений, которая получается после подстановки выражений (2.2) и (2.3) в преобразованные по Фурье уравнения (1.1) и (1.2):

$$\begin{cases} R_{11} y_{1k}^{(n)} + R_{12} y_{3k}^{(n)} + R_{13} y_{4k}^{(n)} + R_{14} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ R_{21} y_{1k}^{(n)} + R_{22} y_{3k}^{(n)} + R_{23} y_{4k}^{(n)} + R_{24} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ R_{31} y_{1k}^{(n)} + R_{32} y_{3k}^{(n)} + R_{33} y_{4k}^{(n)} + R_{34} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ R_{41} y_{1k}^{(n)} + R_{42} y_{3k}^{(n)} + R_{43} y_{4k}^{(n)} + R_{44} y_{5k}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$R_{11} = -\alpha^2 c_{1111}^{(n)} + c_{3113}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2,$$

$$R_{12} = (c_{1133}^{(n)} + c_{3131}^{(n)}) \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{13} = (e_{311}^{(n)} + e_{113}^{(n)}) \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{14} = (f_{311}^{(n)} + f_{113}^{(n)}) \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{21} = (c_{1133}^{(n)} + c_{1313}^{(n)}) - \alpha^2 \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{22} = -\alpha^2 c_{1331}^{(n)} + c_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2,$$

$$\begin{aligned}
 R_{23} &= -\alpha^2 e_{131}^{(n)} + e_{333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{24} &= -\alpha^2 f_{131}^{(n)} + f_{333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{31} &= (e_{311}^{(n)} + e_{113}^{(n)}) (-\alpha^2 \sigma_k^{(n)}), \\
 R_{32} &= -\alpha^2 e_{113}^{(n)} + e_{333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{33} &= \alpha^2 \varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{34} &= \alpha^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{41} &= (f_{311}^{(n)} + f_{113}^{(n)}) (-\alpha^2 \sigma_k^{(n)}), \\
 R_{42} &= -\alpha^2 f_{113}^{(n)} + f_{333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{43} &= \alpha^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \\
 R_{44} &= \alpha^2 \mu_{11}^{(n)} - \mu_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}.
 \end{aligned}$$

Параметры $\sigma_k^{(n)}$ определяются из характеристического уравнения [13]:

$$\begin{vmatrix}
 R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\
 R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\
 R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\
 R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44}
 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя выражения (2.2) и (2.3) в граничные условия (2.4)–(2.11), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_k^{(n)}$ [10]:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q},$$

где \mathbf{A} – матрица размерности 12×12 , $\mathbf{C} = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, \dots, c_4^{(2)}\}$ – вектор искомых коэффициентов, $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \dots, 0\}$ – трансформанта Фурье вектора нагрузки. Решение вспомогательной задачи (1.1–1.3), (2.2–2.11) представляется в виде [13, 17]:

$$\mathbf{u}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_3, \omega) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{k}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad (3.2)$$

Элементы матрицы $\mathbf{K}(\alpha, x_3, \omega) = \|K_{mn}\|_{m,n=1,3,4,5}$ определяются формулами ($m = 3, 4, 5$):

$$\begin{aligned}
 K_{1j}^{(n)} &= -i\alpha \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 f_{1k}^{(n)} (\Delta_{j,k+8(n-1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + \\
 &+ \Delta_{j,k+8(n-1)+4} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3),
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 K_{mj}^{(n)} &= \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 f_{mk}^{(n)} (\Delta_{j,k+8(n-1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 + \\
 &+ \Delta_{j,k+8(n-1)+4} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3), \\
 n &= 1, 2
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$K_{1j}^{(3)} = -i\alpha_1 \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 f_{1k}^{(0)} \Delta_{j,k+16} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3), \quad (3.5)$$

$$K_{mj}^{(0)} = \Delta_0^{-1} \sum_{k=1}^4 f_{mk}^{(0)} \Delta_{j,k+16} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3), \quad m = 3, 4, 5. \quad (3.6)$$

Функции Δ_0 и Δ_{jk} , участвующие в представлениях (3.3)–(3.6), представляют собой определитель матрицы \mathbf{A} и алгебраическое дополнение элемента этой матрицы с номером jk .

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В случае, когда к электроду $x_1 \in [-1, 1]$ на поверхности слоя приложен потенциал $\varphi(x_1) = \varphi_0$, в выражениях (3.1) и (3.2) необходимо положить $x_3 = h$. При выполненных условиях (2.1) формулы (3.1) и (3.2) представляются в виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{44}(x_1 - \xi, h, \omega) q_4(\xi) d\xi = \varphi_0, \quad (4.1)$$

$$k_{44}(s, h, \omega) = \int_{\Gamma} K_{44}(\alpha, h, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha.$$

Выражение (4.1) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции q_4 . Анализ показал, что функция $K_{44}(\alpha, h, \omega)$ обладает следующими свойствами:

- она является четной и имеет на вещественной оси конечное, зависящее от типа задачи и свойств материала среды количество точек ветвления;
 - является мероморфной в комплексной плоскости с непереходящими друг в друга разрезами, расположенными в I и III квадрантах и соединяющими точки ветвления с бесконечно удаленной точкой;
 - имеет на вещественной оси конечное, зависящее от частоты количество нулей и полюсов, а также счетное множество комплексных нулей и полюсов с точками сгущения в секторах, содержащих мнимую ось;
 - на бесконечности представляется в виде: $K_{44}(\alpha, h, \omega) = c|\alpha|^{-1}(1 + O(\alpha^{-1}))$, $\alpha \rightarrow \infty$.
- Это позволяет применить к интегральному уравнению (4.1) метод фиктивного поглощения [29] и

представить решение в виде [30]:

$$Q(\alpha) = \frac{T(\alpha)}{\Pi(\alpha)} + \sum_{k=1}^{2M} C_k e^{i\alpha z^k}, \quad \Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^M \frac{\alpha^2 - \gamma_k^2}{\alpha^2 - \zeta_k^2}, \quad (4.2)$$

где ζ_k и γ_k ($k=1, 2, \dots, M$) – комплексные полюсы и нули функции $K_{44}(\alpha, h, \omega)$, лежащие в полосе $|\operatorname{Im}\alpha| \leq \varepsilon_0$, z^k – координаты точек, делящих отрезок $[-1, 1]$ на $2M$ равных частей, $T(\alpha)$ – трансформанта Фурье функции

$$t(z) = t_0(z) + \sum_{k=1}^{2M} C_k t_k(z), \quad (4.3)$$

$$t_k(z) = \sum_{p=1}^N \beta_k^p \psi_p(z), \quad k = 0, 1, \dots, 2M,$$

$\psi_p(z)$ – система координатных функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, коэффициенты β_k^p удовлетворяют системе $2M + 1$ алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}^0 \mathbf{B}_k = \mathbf{F}_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2M, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{A}^0 = \left\| A_{pl} \right\|_{p,l=1}^N,$$

$$A_{pl} = \int_{\Gamma} K_0(\alpha) \Psi_p(\alpha) \Phi_l^*(\alpha) d\alpha,$$

$$K_0(\alpha) = \frac{K_{44}(\alpha)}{\Pi(\alpha)},$$

$$\mathbf{F}_k = \left\{ f_k^l \right\}_{l=1}^N,$$

$$f_0^l = \int_{-1}^1 f_0(z) \phi_l(z) dz,$$

$$f_k^l = \int_{\Gamma} K(\alpha) \Phi_l(\alpha) e^{-i\alpha z^k} d\alpha,$$

$$\mathbf{B}_k = \left\{ \beta_k^p \right\}_{p=1}^N,$$

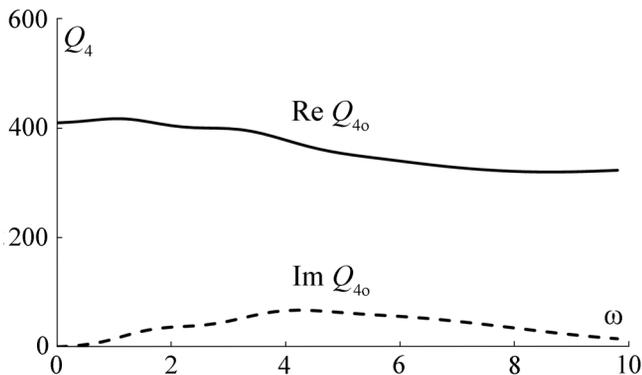


Рис. 1. Реальная и мнимая составляющие емкости для структуры BaTiO₃/CoFe₂O₄.

Fig. 1. Real and imaginary components of the capacity for the BaTiO₃/CoFe₂O₄ structure.

$\Psi_p(\alpha)$ и $\Phi_l(\alpha)$ – преобразования Фурье координатных функций $\psi_p(z)$ и $\phi_l(z)$, звездочкой отмечена комплексно сопряженная величина. Коэффициенты C_k в формуле (4.3) удовлетворяют алгебраической системе

$$\sum_{p=1}^N \beta_0^p \Psi_p(\pm \gamma_n) - \sum_{k=1}^{2M} C_k \sum_{p=1}^N \beta_k^p \Psi_p(\pm \gamma_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 2M. \quad (4.5)$$

Формулы (4.3)–(4.5) позволяют получить распределение электрического заряда в зоне контакта при заданном в этой области электрическом потенциале.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера рассмотрим двухслойное полупространство толщиной $h = 1$, состоящее из BaTiO₃ ($n = 1$) и CoFe₂O₄ ($n = 2$) с материальными константами [4–6] BaTiO₃: $c_{1111} = 166$ ГПа, $c_{1122} = 77$ ГПа, $c_{1133} = 78$ ГПа, $c_{3333} = 162$ ГПа, $c_{3113} = c_{3131} = 43$ ГПа, $c_{1212} = 44,5$ ГПа, $e_{113} = 11,6$ Кл/м², $e_{311} = -4,4$ Кл/м², $e_{333} = 18,6$ Кл/м², $f_{113} = f_{311} = f_{333} = 0$, $\varepsilon_{11} = 11,2 \times 10^{-9}$ Ф/м, $\varepsilon_{33} = 12,6 \times 10^{-9}$ Ф/м, $\mu_{11} = 5 \times 10^{-6}$ Нс²/Кл², $\mu_{33} = 10^{-5}$ Нс²/Кл², $g_{11} = g_{33} = 0$, $\rho = 5800$ кг/м³;

CoFe₂O₄: $c_{1111} = 282$ ГПа, $c_{1122} = 173$ ГПа, $c_{1133} = 170$ ГПа, $c_{3333} = 269,5$ ГПа, $c_{3113} = c_{3131} = 45,3$ ГПа, $c_{1212} = 54,5$ ГПа, $e_{113} = e_{311} = e_{333} = 0$, $f_{113} = 550$ Н/Ам, $f_{311} = 580$ Н/Ам, $f_{333} = 700$ Н/Ам, $\varepsilon_{11} = 0,08 \times 10^{-9}$ Ф/м, $\varepsilon_{33} = 0,093 \times 10^{-9}$ Ф/м, $\mu_{11} = 5,9 \times 10^{-4}$ Нс²/Кл², $\mu_{33} = 1,57 \times 10^{-4}$ Нс²/Кл², $g_{11} = g_{33} = 0$, $\rho = 5300$ кг/м³.

Решение интегрального уравнения (4.1) строится на основе использования формул (4.2)–(4.3) и определяет распределение плотности заряда под электродом. Более информативной является интегральная характеристика, представляющая собой электрический заряд на электроде

$$Q_4 = \int_{\Gamma} q_4(x_1) dx_1$$

При $\varphi_0 = 1$ величина Q_4 по сути представляет собой электрическую емкость конденсатора, обкладками которого служат электрод и металлизированная прослойка между слоем и полупространством. Представление о свойствах пьезоэлектрической структуры можно получить из графиков, приведенных на рисунке 1. Нетрудно видеть, что емкость является величиной, зависящей от частоты.

Обращает на себя внимание тот факт, что на низких и высоких частотах мнимая часть емкости

сти принимает малые значения. Это означает, что при включении рассматриваемой пьезоэлектрической структуры в цепь с сосредоточенными электрическими элементами существует возможность возникновения резонансных эффектов. Более полное представление о характере поведения емкости гетероструктуры дает рисунок 2, на котором изображен график распределения реальной части динамической емкости – функции $Q_4^* = Q_4 - Q_4^{st}$, где Q_4^{st} – статическая емкость при частоте, равной нулю. Как следует из графика, Q_4 принимает максимальное значение при $\omega = 1$. Далее она уменьшается, достигая минимума при $\omega = 8,75$. Такой характер поведения емкости следует учитывать при использовании сегнетоэлектрической гетероструктуры в цепях с дискретными электрическими элементами.

В статьях [31, 32] изучены тонкие эффекты динамики слабонеоднородных пьезоактивных гетероструктур, исследована роль размерных параметров в формировании волновых полей в неоднородных пьезоактивных структурах, выявлена возможность управления характеристиками на основе закономерностей распространения волн. В частности, отмечено значительное влияние электрических условий на дисперсионные свойства и структуру поверхностных волновых полей. На рисунке 3 представлены графики емкости гетероструктуры в отсутствие металлизированной прослойки между $BaTiO_3$ и полупространством $CoFe_2O_4$ – по сути это электрически открытые условия на границе раздела, в отличие от представленных на рисунке 1 электрически закрытых условий. Как следует из графиков, наличие металлической прослойки, определяющей изменение электрических условий,

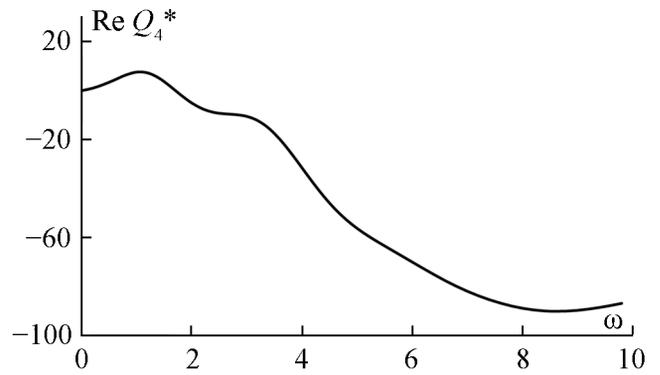


Рис. 2. Реальная составляющая динамической емкости.
Fig. 2. The real component of dynamic capacity.

существенно влияет на свойства гетероструктуры, уменьшая ее емкость на три порядка.

В работе [33] исследовалось влияние магнитных условий в электромагнитной гетероструктуре на ее дисперсионные свойства и структуру поверхностного волнового поля. С этой целью были рассмотрены магнитно открытые и магнитно закрытые граничные условия. В настоящей работе в этом плане представлены две задачи с условиями (2.10) и (2.11) на границе раздела (соответственно магнитно-открытые и магнитно-закрытые условия). Рисунок 4 иллюстрирует влияние вида магнитных граничных условий на электрическую емкость электромагнитоупругой структуры. На рисунке представлены графики функции $\Delta Q_4 = Q_4^o - Q_4^c$, где Q_4^o, Q_4^c – емкости гетероструктуры с магнитно-открытыми и магнитно-закрытыми условиями. Как видно из рисунка, разность носит осциллирующий характер. Максимальное значение разности для реальной составляющей достигается при частоте $\omega \approx 7,2$, для мнимой – при частоте $\omega \approx 6,4$. Существует несколько

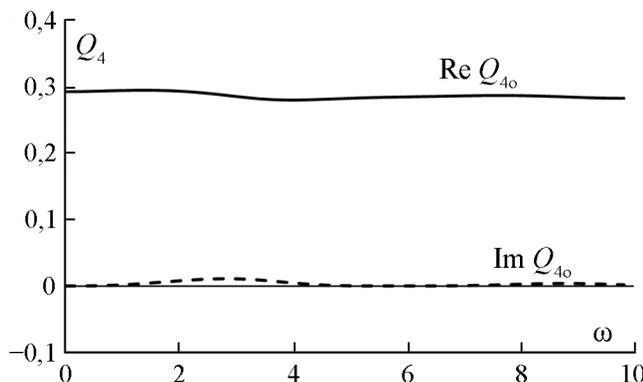


Рис. 3. Реальная и мнимая составляющие емкости для структуры $BaTiO_3 / CoFe_2O_4$ в отсутствие заземления.
Fig. 3. The real and imaginary components of the capacity for the $BaTiO_3 / CoFe_2O_4$ structure in the absence of grounding.

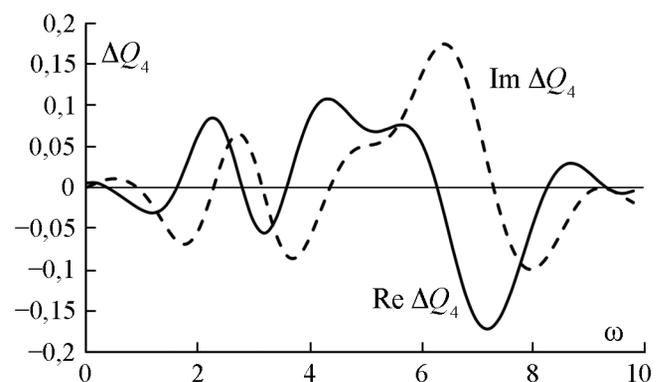


Рис. 4. Влияние типа магнитных граничных условия на емкость электромагнитоупругой структуры $BaTiO_3 / CoFe_2O_4$.
Fig. 4. Influence of the type of magnetic boundary conditions on the capacity of the electromagnetoelastic structure $BaTiO_3 / CoFe_2O_4$.

ко значений частоты, при которых влияние типа магнитных граничных условий на емкость минимально. Необходимо отметить, что при частоте $\omega \approx 9,3$ влияние типа задачи минимально для реальной и мнимой частей емкости одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang J., Chen L., Fang Sh. 2003. State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Solid and Structures*. 40(7): 1669–1680. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00027-1
2. Chen J., Pan E., Chen H. 2007. Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*. 44(3–4): 1073–1085. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003
3. Jiangong Y., Juncai D., Zhijuan M. 2012. On dispersion relations of waves in multilayered magneto-electro-elastic plates. *Applied Mathematical Modelling*. 36(12): 5780–5791. doi: 10.1016/j.apm.2012.01.028
4. Soh A.K., Liu J.X. 2006. Interfacial shear horizontal waves in a piezoelectric–piezomagnetic bi-material. *Philos. Mag. Lett.* 86(1): 31–35. doi: 10.1080/09500830500492125
5. Liu J., Fang D., Liu X. 2007. A shear horizontal surface wave in magnetolectric materials. *Letters, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 54(7): 1287–1289. doi: 10.1109/TUFFC.2007.388
6. Calas H., Otero J.A., Rodríguez-Ramos R., Monsivais G., Stern C. 2008. Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures. *International Journal of Solids and Structures*. 45(20): 5356–5367. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.017
7. Zhai J., Xing Z., Dong S., Li J., Viehland D. 2008. Magnetolectric laminate composites: an overview. *J. Am. Ceram. Soc.* 91(2): 351–358. doi: 10.1111/j.1551-2916.2008.02259.x
8. Леви М.О. 2011. Динамическая задача для электромагнитно-упругого слоя. *Вестник Южного научного центра*. 7(4): 5–10.
9. Леви М.О., Анджинович И.Е., Ворович Е.И., Агаян К.Л. 2012. Влияние граничных условий на динамику электромагнитноупругой полуграниченной среды. *Вестник Южного научного центра*. 8(4):14–19.
10. Liu J.-X., Fang D.N., Wei W.-Y., Zhao X.-F. 2008. Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures. *J. Sound Vib.* 315(1–2): 146–156. doi: 10.1016/j.jsv.2008.01.055
11. Du J., Jin X., Wang J. 2007. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress. *Acta Mech.* 192(1–4): 169–189. doi: 10.1007/s00707-006-0435-3
12. Saxena P., Ogden R.W. 2012. On Love-type waves in a finitely deformed magnetoelastic layered half-space. *Z. Angew. Math. Phys.* 63(6): 1177–1200. doi: 10.1007/s00033-012-0204-1
13. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2016. Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоэлектроупругой среды. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 5: 101–110.
14. Леви М.О., Калинин В.В., Агаян К.Л. 2017. Особенности динамики слоистой преднапряженной электромагнитноупругой среды. *Наука Юга России*. 13(3): 10–17. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-10-17
15. Yang J.S. 2000. Bleustein-gulyaev waves in piezoelectromagnetic materials. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 12(3–4): 235–240.
16. Feng W.J., Pan E., Wang X., Jin J. 2009. Rayleigh waves in magneto-electro-elastic half planes. *Acta Mech.* 202: 127–134. doi: 10.1007/s00707-008-0024-8
17. Леви М.О., Леви Г.Ю., Лыжов В.А. 2017. Некоторые особенности динамики сегнетоэлектрических/ферромагнитных гетероструктур. *ПМТФ*. 58(1): 55–62. doi: 10.15372/PMTF20170105
18. Agayan K.L., Atoyan L.H., Kalinchuk V.V., Sahakyan S.L. 2017. Electro-magneto-elastic surface waves existence and propagation in a piezoelectric layered medium in the presence of an electric screen. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 3: 5–14.
19. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2000. К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто неоднородного полупространства. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 3(111): 72–74.
20. Ramirez G., Heyliger P. 2003. Frictionless contact in a layered piezoelectric half-space. *Smart Mater. Struct.* 12(4): 612–625. doi: 10.1088/0964-1726/12/4/312
21. Белянкова Т.И., Зайцева И.А., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е. 2001. Динамика пьезоактивной структурно неоднородной среды. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. S: 33–35.
22. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2010. Связанная смешанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупругого структурно неоднородного полупространства. *Прикладная математика и механика*. 74(6): 895–908.
23. Giannakopoulos A.E., Parmaklis A.Z. 2007. The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.* 44: 4593–4612. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.11.040
24. Chen J., Guo J. 2017. Static response of a layered magneto-electro-elastic half-space structure under circular surface loading. *Acta Mechanica Sinica*. 30(2): 145–153. doi: 10.1016/j.camss.2017.03.003
25. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-Sh. 2015. Sliding frictional contact of functionally graded magneto-electro-elastic layered materials under a conducting flat punch. *J. Appl. Mech.* 82(1): 011009. doi: 10.1115/1.4029090
26. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-Sh. 2014. Frictionless contact of functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *Int. J. Solids Struct.* 51(15–16): 2791–2806. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028

27. Elloumi R., El-Borgi S., Guler M.A., Kallel-Kamoun I. 2016. The contact problem of a rigid stamp with friction on a functionally graded magneto-electro-elastic half-plane. *Acta Mech.* 227(4): 1123–1156. doi: 10.1007/s00707-015-1504-2
28. Zhou Y.-T., Kim T.-W. 2014. An exact analysis of sliding frictional contact of a rigid punch over the surface of magneto-electroelastic materials. *Acta Mech.* 225(3): 625–645. doi: 10.1007/s00707-013-0992-1
29. Бабешко В.А., Калинин В.В. 2002. Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства. *Прикладная математика и механика.* 66(2): 285–292.
30. Бабешко В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2001. О решении одного класса смешанных задач для слоистого полупространства. *Доклады Академии наук.* 380(5): 619–622.
31. Белянкова Т.И., Лыжов В.А. 2010. Некоторые особенности динамики слабо неоднородных пьезоактивных структур. *Вестник Южного научного центра.* 6(2): 3–10.
32. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2011. Роль размерных параметров в формировании волновых полей в неоднородных пьезоактивных структурах. *Вестник Южного научного центра.* 7(3): 3–12.
33. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Леви М.О., Агаян К.Л. 2013. Некоторые особенности динамики слабонеоднородного магнитоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра.* 9(4): 13–17.
9. Levi M.O., Andzhikovich I.E., Vorovich E.I., Agayan K.L. 2012. [The influence of boundary conditions on the dynamics of semibounded electromagneto-elasticity media]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra.* 8(4): 14–19. (In Russian).
10. Liu J.-X., Fang D.N., Wei W.-Y., Zhao X.-F. 2008. Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures. *J. Sound Vib.* 315(1–2): 146–156. doi: 10.1016/j.jsv.2008.01.055
11. Du J., Jin X., Wang J. 2007. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress. *Acta Mech.* 192(1–4): 169–189. doi: 10.1007/s00707-006-0435-3
12. Saxena P., Ogden R.W. 2012. On Love-type waves in a finitely deformed magnetoelastic layered half-space. *Z. Angew. Math. Phys.* 63(6): 1177–1200. doi: 10.1007/s00033-012-0204-1
13. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Dynamic equations of a prestressed magneto-electroelastic medium. *Mechanics of Solids.* 51(5): 588–595. doi: 10.3103/S0025654416050125
14. Levi M.O., Kalinchuk V.V., Agayan K.L. 2017. [Peculiarities of dynamics of a layered prestressed electromagnetoelastic media]. *Nauka Yuga Rossii.* 13(3): 10–17. (In Russian). doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-10-17
15. Yang J.S. 2000. Bleustein-gulyaev waves in piezoelectromagnetic materials. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics.* 12(3–4): 235–240.
16. Feng W.J., Pan E., Wang X., Jin J. 2009. Rayleigh waves in magneto-electro-elastic half planes. *Acta Mech.* 202: 127–134. doi: 10.1007/s00707-008-0024-8

REFERENCES

1. Wang J., Chen L., Fang Sh. 2003. State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Solid and Structures.* 40(7): 1669–1680. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00027-1
2. Chen J., Pan E., Chen H. 2007. Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures.* 44(3–4): 1073–1085. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003
3. Jiangong Y., Juncai D., Zhijuan M. 2012. On dispersion relations of waves in multilayered magneto-electro-elastic plates. *Applied Mathematical Modelling.* 36(12): 5780–5791. doi: 10.1016/j.apm.2012.01.028
4. Soh A.K., Liu J.X. 2006. Interfacial shear horizontal waves in a piezoelectric–piezomagnetic bi-material. *Philos. Mag. Lett.* 86(1): 31–35. doi: 10.1080/09500830500492125
5. Liu J., Fang D., Liu X. 2007. A shear horizontal surface wave in magneto-electric materials. *Letters, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control.* 54 (7): 1287–1289. doi: 10.1109/TUFFC.2007.388
6. Calas H., Otero J.A., Rodríguez-Ramos R., Monsivais G., Stern C. 2008. Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures. *International Journal of Solids and Structures.* 45(20): 5356–5367. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.017
7. Zhai J., Xing Z., Dong S., Li J., Viehland D. 2008. Magneto-electric laminate composites: an overview. *J. Am. Ceram. Soc.* 91(2): 351–358. doi: 10.1111/j.1551-2916.2008.02259.x
8. Levi M.O. 2011. [Dynamic task for electromagnetoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra.* 7(4): 5–10. (In Russian).
17. Levi M.O., Levi G.Yu., Lyzhov V.A. 2017. Some features of the dynamics of ferroelectric (ferromagnetic) heterostructures. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 58(1): 47–53. doi: 10.1134/S0021894417010059
18. Agayan K.L., Atoyan L.H., Kalinchuk V.V., Sahakyan S.L. 2017. Electro-magneto-elastic surface waves existence and propagation in a piezoelectric layered medium in the presence of an electric screen. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation.* 3: 5–14.
19. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2000. [The problem of dynamic mixed electroelasticity and thermoelasticity problems of multilayered half-space investigating]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki.* 3: 72–74. (In Russian).
20. Ramirez G., Heyliger P. 2003. Frictionless contact in a layered piezoelectric half-space. *Smart Mater. Struct.* 12(4): 612–625. doi: 10.1088/0964-1726/12/4/312
21. Belyankova T.I., Zaytseva I.A., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 2001. [The dynamics of a piezoactive structurally inhomogeneous medium]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki.* S: 33–35. (In Russian).
22. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2010. A coupled mixed problem for a system of electrodes on the surface of a prestressed electroelastic structurally inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 74(6): 637–647. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2011.01.003
23. Giannakopoulos A.E., Parmaklis A.Z. 2007. The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.* 44: 4593–4612. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.11.040

24. Chen J., Guo J. 2017. Static response of a layered magneto-electro-elastic half-space structure under circular surface loading. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 30(2): 145–153. doi: 10.1016/j.camss.2017.03.003
25. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-Sh. 2015. Sliding frictional contact of functionally graded magneto-electro-elastic layered materials under a conducting flat punch. *J. Appl. Mech.* 82(1): 011009. doi: 10.1115/1.4029090
26. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-Sh. 2014. Frictionless contact of functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *Int. J. Solids Struct.* 51(15–16): 2791–2806. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028
27. Elloumi R., El-Borgi S., Guler M.A., Kallel-Kamoun I. 2016. The contact problem of a rigid stamp with friction on a functionally graded magneto-electro-elastic half-plane. *Acta Mech.* 227(4): 1123–1156. doi: 10.1007/s00707-015-1504-2
28. Zhou Y.-T., Kim T.-W. 2014. An exact analysis of sliding frictional contact of a rigid punch over the surface of magneto-electroelastic materials. *Acta Mech.* 225(3): 625–645. doi: 10.1007/s00707-013-0992-1
29. Babeshko V.A., Kalinchuk V.V. 2002. The method of fictitious absorption in coupled mixed problems of the theory of elasticity and mathematical physics for a multilayered inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 66(2): 275–281. doi: 10.1016/S0021-8928(02)00034-5
30. Babeshko V.A., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2001. On the solution to a class of the mixed problems for a layered half-space. *Doklady Physics*. 46(10): 732–735. doi: 10.1134/1.1415591
31. Belyankova T.I., Lyzhov V.A. 2010. [Some features of dynamics for weakly inhomogeneous piezo-active structures]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 6(2): 3–10. (In Russian).
32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2011. [Role of dimensioned parameters in formation of wave fields in heterogeneous piezoelectric structures]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 7(3): 3–12. (In Russian).
33. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Levi M.O., Agayan K.L. 2013. Some specific features of dynamics of slightly heterogeneous magneto-elastic half-space. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 9(4): 13–17. (In Russian).

Поступила 16.03.2018