НАУКА ЮГА РОССИИ 2017 Т. 13 № 2 С. 13–20
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2017 VOL. 13 No 2 P. 13–20

ФИЗИКА

УДК 536.2
DOI: 10.23885/2500-0640-2017-13-2-13-20

МЕТОД ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИТАХ

© 2017 г. Академик РАН В.И. Колесников[1], И.В. Лавров[2], В.В. Бардушкин[2], А.П. Сычев[3], В.Б. Яковлев[2]

Аннотация. С помощью процедуры, связанной с введением тела сравнения и использующей метод функций Грина, получены общие операторные выражения для локальных значений напряженности температурного поля, вектора плотности теплового потока и температуры в образце неоднородного текстурированного материала. Из данных выражений в предположении эллипсоидальности зерен (включений), составляющих неоднородный материал, в обобщенном сингулярном приближении получены соотношения для локальных значений указанных величин.

Для частного случая неоднородной текстурированной среды – многокомпонентного композита с одинаковым образом ориентированными эллипсоидальными включениями – в обобщенном сингулярном приближении получены расчетные выражения для нахождения компонент локальных значений напряженности температурного поля и вектора плотности теплового потока в зависимости от объемных долей видов включений, их теплопроводящих характеристик, формы включений, а также от параметров, описывающих включение, в котором оцениваются значения данных величин. Получены расчетные выражения для оценки локальных значений температурного поля для трех вариантов расположения включения, в котором находится исследуемая точка: на поверхности образца с известным значением температуры; во втором слое от поверхности; в глубине образца. В качестве параметра тела сравнения выбирался тензор эффективной теплопроводности данного композита, то есть применялся метод самосогласования (как вариант обобщенного сингулярного приближения).

Ключевые слова: распределение температурного поля, тензор эффективной теплопроводности, текстура, композит, многокомпонентный, обобщенное сингулярное приближение, матрица, эллипсоидальное включение, метод самосогласования.

A METHOD OF THE ESTIMATION OF THE LOCAL THERMAL FIELDS DISTRIBUTION IN MULTICOMPONENT COMPOSITES

Academician RAS V.I. Kolesnikov[1], I.V. Lavrov[2], V.V. Bardushkin[2], A.P. Sychev[3], V.B. Yakovlev[2]

Abstract. By means of the procedure, involving the introduction of comparison body and using a method of Green functions, the general operator expressions for local values of thermal field intensity, vector of heat flux density and temperature in a bulk of the inhomogeneous textured material are obtained. Assuming the inhomogeneous material to consist of ellipsoidal grains (inclusions) on the base of the general operator expressions the relations for the local specified values in generalized singular approximation are obtained.

These obtained expressions in generalized singular approximation are used for a special case of an inhomogeneous textured medium – for a multicomponent composite with equally oriented ellipsoidal

[1] Ростовский государственный университет путей сообщения (Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2

[2] Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (National Research University of Electronic Technology, Moscow, Zelenograd, Russian Federation), Российская Федерация, 124498, г. Москва, Зеленоград, пл. Шокина, 1

[3] Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41

inclusions – to derive the expressions for calculating the components of local values of thermal field intensity, vector of heat flux in a bulk of this composite depending on volume fractions of types of inclusions, their thermal conducting characteristics, a form of inclusions, and also on the parameters describing inclusion in which specified values are estimated. The expressions for an estimation of local values of a temperature field for three cases of an arrangement of inclusion which contains a studied point are also received: on the bulk surface with the known value of temperature; in the second layer from the surface; in the depth of the bulk. As the parameter of the comparison body the tensor of effective thermal conductivity of this composite is chosen, i.e. the self-consistent method as a variant of the generalized singular approximation is applied.

Keywords: thermal field distribution, tensor of effective thermal conductivity, texture, composite, multicomponent, generalized singular approximation, matrix, ellipsoidal inclusion, self-consistent method.

ВВЕДЕНИЕ

Теплофизические характеристики композитных материалов, наряду с механическими и электрофизическими, имеют важное значение, поскольку конструкции из композитов в процессе эксплуатации подвергаются интенсивным внешним воздействиям различного физического характера, которые вызывают специфическое распределение в них тепловых потоков, температурных полей и могут приводить к существенному изменению их функциональных характеристик. Так, например, в трибокомпозитах при трении неравномерным образом нагреваются поверхностные и объемные слои, то есть имеют место значительные величины градиента локального температурного поля. Следствием этого является усиление диффузионных и сегрегационных процессов, приводящих к изменениям трибологических характеристик материалов [1]. Поэтому проблема прогнозирования распределения температурных полей в неоднородных средах, а также задача оценки их макроскопических (эффективных) характеристик в зависимости от состава, концентрации, структуры компонентов, вида и величины внешнего воздействия имеют большое прикладное значение.

Распределение температурного поля в среде описывается в стационарном случае такими же уравнениями, как и распределения стационарного электрического и магнитного полей. Поэтому подходы и методы, разработанные для прогнозирования эффективных диэлектрических, электропроводящих и магнитных характеристик неоднородных сред, а также для нахождения распределений в них электрических и магнитных полей, могут быть применены как для вычисления эффективной теплопроводности неоднородных материалов, так и для оценки распределения температурных полей. В частности, для простейших изотропных двухкомпонентных сред используют классические приближения Максвелла – Гарнетта [2], Бруггемана [3], их обобщения для случаев включений эллипсоидальной формы [4], а также вариационный принцип Хашина – Штрикмана [5]. Например, в работе [6] авторы применяют вариационный принцип для оценки нижней и верхней границ эффективной теплопроводности матричных композитов с одинаково ориентированными эллипсоидальными включениями. При этом существуют и оригинальные методы, разработанные для прогнозирования теплопроводящих свойств неоднородных сред, обзоры которых имеются, например, в работах [7; 8]. Большинство методов имеет узкую направленность, а также не может учитывать текстуру материала, вследствие которой композит становится макроскопически анизотропным. Вместе с тем именно текстурированные композитные материалы находят все большее применение в технике.

Одним из подходов, обладающих значительной степенью общности и способных естественным образом учитывать текстуру неоднородной среды, является обобщенное сингулярное приближение. Его основы были заложены в работах А.Г. Фокина [9] и Т.Д. Шермергора [10] для вычисления эффективных диэлектрических и упругих характеристик неоднородных сред и развиты затем в работах [11–13]. В настоящей работе обобщенное сингулярное приближение адаптировано для прогнозирования распределений температуры, напряженности температурного поля и вектора плотности тепловых потоков в текстурированном композиционном материале, состоящем из эллипсоидальных зерен (включений). Рассмотрен частный случай одинаковым образом ориентированных включений. Получены аналитические выражения для локальных значений указанных величин в зависимости от параметров, характеризующих как композит в целом, так и от параметров, описывающих включение, содержащее точку, в которой оцениваются значения этих величин, а также от напряженности приложенного температурного поля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ОПЕРАТОРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рассмотрим образец объемом V статистически однородной гетерогенной среды, состоящей из огромного количества микрообластей, заполненных однородными средами; данные микрообласти обычно называют включениями или кристаллитами. В случае, когда гетерогенная среда является композитом матричного типа, матрицу (непрерывный компонент среды) также можно считать состоящей из большого количества включений с одинаковыми материальными свойствами. Форму включений будем считать эллипсоидальной, размеры – достаточно большими, чтобы включение содержало огромное количество молекул (атомов) и могло рассматриваться как непрерывная среда. Также будем считать, что внутренние источники тепла в образце гетерогенной среды отсутствуют.

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное температурное поле, напряженность которого обозначим как $\mathbf{H}_0$, тогда в образце установятся некоторое стационарное температурное поле $u(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r})$ и стационарное распределение тепловых потоков, векторы плотности которых $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ связаны с $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ законом Фурье:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ – тензор теплопроводности данного неоднородного материала, являющийся случайной кусочно-постоянной функцией координат. Ставится задача прогнозирования распределения температурного поля $u(\mathbf{r})$ и его напряженности $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ в образце в зависимости от напряженности приложенного поля $\mathbf{H}_0$, а также от материальных и структурных параметров, описывающих данный образец неоднородной среды. Математическая формулировка данной задачи имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{k}(\mathbf{r})\, \nabla u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V; \quad u|_S = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \tag{2}$$

Для решения краевой задачи (2) вводится однородное тело сравнения, имеющее такие же размеры и форму, что и образец неоднородной среды, и для него рассматривается аналогичная вспомогательная задача [9–11]. Представим $u(\mathbf{r})$ и $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ в виде

$$u(\mathbf{r}) = u^{(c)}(\mathbf{r}) + u'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}^{(c)} + \mathbf{k}'(\mathbf{r}),$$

индекс c обозначает величины, относящиеся к телу сравнения, штрихом обозначены разности между величинами в исходном образце и теле сравнения. Формулировка задачи для тела сравнения имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)}\nabla u^{(c)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \; u^{(c)}|_S = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \tag{3}$$

Вычитая (3) из (2), получим краевую задачу

$$\nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)}\, \nabla u'(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r})\, \nabla u(\mathbf{r}), \; \mathbf{r} \in V, \; u'|_S = 0. \tag{4}$$

Вводя функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ задачи (4) посредством условий

$$\nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)}\, \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \; G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1 \in S} = 0,$$

решение задачи (4) можно записать в виде интеграла [11]

$$u'(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r}_1) \nabla u(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \tag{5}$$

Если тело считать неограниченным, тогда $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. В этом случае, преобразовав (5) по частям и взяв затем градиент от левой и правой частей, получим:

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \int (\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}))\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1)\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \equiv$$
$$\equiv \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где $\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ – тензор вторых производных функции Грина, верхний индекс «1» у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по $\mathbf{r}_1$; $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ – тензорный интегральный оператор, действие которого определяется формулой (6).

Проведя операцию центрирования для (6), получим

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{H}'(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle =$$
$$= \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \langle \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle.$$

Отсюда, выражая $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, имеем:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\left(\langle \mathbf{H} \rangle - \langle \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle\right), \tag{7}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор 2-го ранга. После усреднения в (7) легко получаем соотношение:

$$\langle \mathbf{H} \rangle - \langle \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{H} \rangle,$$

подставляя которое в (7), найдем искомое выражение для локального значения напряженности температурного поля

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{H} \rangle, \tag{8}$$

поскольку в данных условиях средняя напряженность температурного поля в образце равна напряженности приложенного поля:

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0 .$$

Из (1) и (8) получаем локальное значение вектора плотности теплового потока

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\langle\mathbf{H}\rangle \quad (9)$$

Во многих приложениях требуется также знание тензора эффективных теплопроводящих характеристик неоднородного материала $\mathbf{k}^*$, определяемого соотношением

$$\langle\mathbf{q}\rangle = \mathbf{k}^*\langle\mathbf{H}\rangle, \quad (10)$$

связывающим средние по объему образца значения векторов плотности теплового потока и напряженности температурного поля. Усредняя (9) и сопоставляя с (10), получим выражение для тензора $\mathbf{k}^*$:

$$\mathbf{k}^* = \left\langle\mathbf{k}(\mathbf{r})\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}. \quad (11)$$

Локальное значение температуры $u(\mathbf{r})$ найдем, проинтегрировав (8) по любой кривой γ, лежащей внутри образца и соединяющей начальную точку $\mathbf{r}_0$ на поверхности образца (с известной температурой $u(\mathbf{r}_0) = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0)$) с текущей точкой $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\left(\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1\right) = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \\ &- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r}_1)\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1)\right)^{-1}\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r}_1)\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1)\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\langle\mathbf{H}\rangle, \mathrm{d}\mathbf{r}_1\right). \end{aligned} \quad (12)$$

РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОБОБЩЕННОМ СИНГУЛЯРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Полученные выражения (8), (9), (11), (12) являются точными. Но для их применения требуется знание корреляционных функций всех порядков, поскольку обратные операторы в данных выражениях подразумеваются как ряды по степеням $\mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})$. Если считать, что неоднородная среда состоит из эллипсоидальных включений, то, в предположении однородности поля внутри каждого из включений, можно заменить интегральный оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ постоянным тензором $\mathbf{g}$ в пределах конкретного включения. Вторые производные функции Грина $G_{,ij}(\mathbf{r}) \equiv \dfrac{\partial^2 G(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1,2,3$ – это обобщенные функции, имеющие, согласно теории [14], формальную и сингулярную части:

$$G_{,ij}(\mathbf{r}) = G_{,ij}^{(f)}(\mathbf{r}) + G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r}), \quad i, j = 1,2,3,$$

где $G_{,ij}^{(f)}(\mathbf{r})$ – формальная часть, получающаяся из первой производной формальным дифференцированием, как для обычных функций; $G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r})$ – сингулярная часть, вычисляющаяся по формуле [14]

$$G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})\oint_{S'}\frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial x_i'}n_j' dS',$$

интеграл берется по поверхности S' данного включения; n_j' – j-я компонента внешней единичной нормали к S'. Замена интегрального оператора постоянным тензором равносильна пренебрежению формальной частью второй производной функции Грина, то есть $G_{,ij}(\mathbf{r}) \approx G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r})$, и поэтому для компонент тензора $\mathbf{g}$ имеем

$$g_{ij} = \int G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \oint_{S'}\frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial x_i'}n_j' dS', \quad i, j = 1,2,3.$$

Заменяя в (8), (9), (11), (12) интегральный оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ на тензор $\mathbf{g}$, получим выражения для соответствующих величин в обобщенном сингулярном приближении (ОСП):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\langle\mathbf{H}\rangle, \quad (13)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\langle\mathbf{H}\rangle, \quad (14)$$

$$\mathbf{k}^* = \left\langle\mathbf{k}(\mathbf{r})\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \\ &- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1)\right)^{-1}\left\langle\left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r}_1)\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\langle\mathbf{H}\rangle, \mathrm{d}\mathbf{r}_1\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Существенным моментом в применении ОСП является выбор материального параметра тела сравнения $\mathbf{k}^{(c)}$. Варьируя $\mathbf{k}^{(c)}$, можно получать различные типы приближений [11]. В частности, взяв $\mathbf{k}^{(c)}$ равным тензору эффективных теплопроводящих характеристик $\mathbf{k}^*$, получим метод самосогласования.

Другим существенным моментом в ОСП является вычисление компонент тензора $\mathbf{g}$ для конкретного эллипсоидального включения. В общем случае в системе координат, связанной с осями эллипсоида, данные компоненты вычисляются по следующим формулам (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование) [12]:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{n_i n_j}{n_k k_{kl}^{(c)} n_l}\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta, \quad i, j = 1,2,3,$$

где $n_1 = a_1^{-1}\sin\alpha\cos\beta$, $n_2 = a_2^{-1}\sin\alpha\sin\beta$, $n_3 = a_3^{-1}\cos\alpha$ – компоненты нормали (не единичной) к поверхности эллипсоида S' с полуосями a_1, a_2, a_3; $k_{kl}^{(c)}$ – компоненты тензора $\mathbf{k}^{(c)}$ в системе эллипсоида.

В частном случае, когда оси эллипсоида сонаправлены с главными осями тензора $\mathbf{k}^{(c)}$, для компонент тензора **g** справедливы выражения [15]:

$$g_{jj} = -\frac{\widetilde{L}_j}{k_j^{(c)}},\ j = 1,2,3; \quad g_{ij} = 0,\ i \neq j, \tag{17}$$

где $\widetilde{L}_j = \frac{\widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_3}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dq}{(\widetilde{a}_j^{\,2} + q)[(\widetilde{a}_1^{\,2} + q)(\widetilde{a}_2^{\,2} + q)(\widetilde{a}_3^{\,2} + q)]^{1/2}}$,

j = 1,2,3 – главные компоненты тензора $\widetilde{\mathbf{L}}$ обобщенных геометрических факторов эллипсоида в анизотропной среде [16];

$$\widetilde{a}_j = a_j \Big/ \sqrt{k_j^{(c)}},\ j = 1,2,3 - \tag{18}$$

обобщенные полуоси эллипсоида с учетом анизотропии среды; $k_j^{(c)},\ j = 1,2,3$ – главные компоненты тензора $\mathbf{k}^{(c)}$.

ПРИМЕНЕНИЕ ОСП ДЛЯ ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ КОМПОЗИТЕ С ОДИНАКОВО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим вариант композита матричного типа с изотропной матрицей и n видами включений, причем все включения i-го вида являются одинаково ориентированными эллипсоидами с фиксированными размерами полуосей $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)},\ i = \overline{1,n}$; также будем считать, что оси эллипсоидов совпадают с кристаллографическими осями материалов включений. Примем также, что оси эллипсоидов всех видов включений сонаправлены. В данных условиях композит в целом будет обладать текстурой, оси которой будут совпадать с направлениями осей включений; введем систему координат $x_1x_2x_3$ с осями вдоль осей текстуры образца. Объемные доли включений i-го вида обозначим через $f^{(i)}, i = \overline{1,n}$; тогда для объемной доли матрицы, очевидно, будем иметь: $f^{(m)} = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} f^{(i)}$. Теплопроводность матрицы обозначим через $k^{(m)}$. Тензор теплопроводности включения i-го вида $\mathbf{k}^{(i)}$ в системе $x_1x_2x_3$ вследствие сделанных предположений будет диагональным с главными компонентами $k_j^{(i)},\ j = 1,2,3$. Тензор $\mathbf{k}^*$ в данной системе также будет диагональным, его главные компоненты обозначим через $k_j^*,\ j = 1,2,3$.

Применим к композиту данного вида выражения (13)–(16) с учетом соотношений (17), положив $\mathbf{k}^{(c)} = \mathbf{k}^*$, то есть используя метод самосогласования. Для вычисления главных компонент тензора $\mathbf{k}^*$ из (15) получим систему уравнений [15]:

$$k_j^* = \left\langle k_j(\mathbf{r})\left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j (k_j(\mathbf{r}) - k_j^*)\right)^{-1} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j (k_j(\mathbf{r}) - k_j^*)\right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad j = 1,2,3, \tag{19}$$

где $k_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} k^{(m)}, \mathbf{r} \in V^{(m)}, \\ k_j^{(i)}, \mathbf{r} \in V^{(i)}, i = \overline{1,n}, \end{cases}$, $V^{(m)}$ – объем, занимаемый матрицей, $V^{(i)}$ – полный объем, занимаемый включениями i-го вида. Для компонент напряженности локального температурного поля из (13) будем аналогично иметь

$$H_j(\mathbf{r}) = \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j (k_j(\mathbf{r}) - k_j^*)\right)^{-1} \times$$
$$\times \left\langle \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j (k_j(\mathbf{r}) - k_j^*)\right)^{-1} \right\rangle^{-1} H_{0,j}, \quad j = 1,2,3, \tag{20}$$

где $H_{0,j}$ – j-я компонента напряженности приложенного поля $\mathbf{H}_0$.

Так как все включения, относящиеся к конкретному компоненту композита, имеют одинаковые форму и ориентацию, то усреднение в (19) и (20) сводится к вычислению объемных средних. Введем для удобства тензор $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ с главными компонентами

$$\lambda_j(\mathbf{r}) = \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j (k_j(\mathbf{r}) - k_j^*)\right)^{-1}, \quad j = 1,2,3, \tag{21}$$

тогда (19) и (20) можно переписать в виде

$$k_j^* = \left(f^{(m)} k^{(m)} \lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} k_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} \right) \times$$
$$\times \left(f^{(m)} \lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \lambda_j^{(i)} \right)^{-1}, \quad j = 1,2,3,$$

$$H_j(\mathbf{r}) = \lambda_j(\mathbf{r}) \left(f^{(m)} \lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \lambda_j^{(i)} \right)^{-1} H_{0,j}, \quad j = 1,2,3, \tag{22}$$

где $\lambda_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} \lambda_j^{(m)}, \mathbf{r} \in V^{(m)}, \\ \lambda_j^{(i)}, \mathbf{r} \in V^{(i)}, i = \overline{1,n}, \end{cases}$, $\lambda_j^{(m)},\ \lambda_j^{(i)}$ – главные компоненты тензоров $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ для матрицы и включений i-го вида соответственно:

$$\lambda_j^{(m)} = \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j^{(m)} (k^{(m)} - k_j^*)\right)^{-1},$$
$$\lambda_j^{(i)} = \left(1 + (k_j^*)^{-1} \widetilde{L}_j^{(i)} (k_j^{(i)} - k_j^*)\right)^{-1},\ i = \overline{1,n};\ j = 1,2,3; \tag{23}$$

$\widetilde{L}_j^{(m)}, \widetilde{L}_j^{(i)},\ j = 1,2,3$ – главные компоненты тензоров обобщенных геометрических факторов, относящихся к матрице и i-му виду включений соответственно.

Следует заметить, что $\widetilde{L}_j^{(m)}, \widetilde{L}_j^{(i)}$ зависят от отношения $\tilde{a}_1 : \tilde{a}_2 : \tilde{a}_3$ обобщенных полуосей включения данного вида с учетом анизотропии среды сравнения, но не зависят от абсолютных размеров включений. Для частиц, составляющих матрицу, можно взять $a_1^{(m)} = a_2^{(m)} = a_3^{(m)} = 1$. Тогда для обобщенных полуосей частиц матрицы по формулам (18) получим:

$$\widetilde{a}_j^{(m)} = (k_j^*)^{-1/2}, \quad j = 1,2,3.$$

Аналогично для обобщенных полуосей включений i-го вида будем иметь:

$$\widetilde{a}_j^{(i)} = a_j^{(i)} (k_j^*)^{-1/2}, \quad j = 1,2,3; \, i = \overline{1,n}.$$

Из (22) и (1) получаем локальные значения компонент вектора плотности теплового потока:

$$q_j(\mathbf{r}) = k_j(\mathbf{r}) \lambda_j(\mathbf{r}) \left(f^{(m)} \lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \lambda_j^{(i)} \right)^{-1} H_{0,j}, \quad j = 1,2,3 \tag{24}$$

В ОСП, как видно из (22) и (24), локальные значения напряженности температурного поля и вектора плотности теплового потока являются постоянными величинами в пределах конкретного включения и не зависят от расположения данного включения внутри образца. Что касается распределения температуры $u(\mathbf{r})$ внутри включения, то оно существенным образом зависит от того, в какой части образца расположено данное включение. Выражение (16) для вычисления $u(\mathbf{r})$ внутри включения i-го вида, занимающего объем $v_k^{(i)}$, с учетом (17) и (21) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{r}) = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) - \int_{\Gamma_{\text{int}}} \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right), \; \mathbf{r} \in v_k^{(i)} \subset V^{(i)}, \tag{25}$$

где Γ_{ext} и Γ_{int} – внешняя и внутренняя части кривой γ, соединяющей точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, по отношению к данному включению; $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ – тензор $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$, соответствующий включению i-го вида, его главные компоненты имеют вид (23).

Интеграл по внутренней части Γ_{int} вычисляется элементарно, поскольку подынтегральное выражение постоянно:

$$\int_{\Gamma_{\text{int}}} \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) = \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0,k}) \right), \tag{26}$$

где $\mathbf{r}_{0,k}$ – начальная точка кривой Γ_{int}. Для вычисления интеграла по внешней части требуется знать, через какие включения пройдет кривая Γ_{ext}. Значения этого интеграла наиболее просто оценить в трех случаях: 1) когда включение имеет общие граничные точки с поверхностью S_0, на которой известно значение температуры; 2) в непосредственной близости от поверхности S_0, будучи отделенным от нее одним слоем других включений; 3) когда включение находится в глубине образца, отделенное от поверхности S_0 очень большим количеством слоев других включений.

Если включение имеет общие граничные точки с поверхностью S_0, то интеграл по Γ_{ext} равен нулю, и для $u(\mathbf{r})$ имеем:

$$u(\mathbf{r}) = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right), \tag{27}$$

так как в данном случае $\mathbf{r}_{0,k} = \mathbf{r}_0$.

В случае, когда включение, содержащее точку $\mathbf{r}$, отделено от поверхности S_0 включением l-го типа, то

$$\int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) = \left(\boldsymbol{\lambda}^{(l)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right),$$

поскольку $\mathbf{r}_{0,k}$ – конечная точка кривой Γ_{ext}. Поэтому для $u(\mathbf{r})$ получаем:

$$u(\mathbf{r}) = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_0) - \left(\boldsymbol{\lambda}^{(l)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right) - \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь случай, когда включение находится в глубине образца. Интеграл по Γ_{ext} в (25), поскольку тензор $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ симметричный, можно записать в виде:

$$\int_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) = \left(\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right). \tag{29}$$

Интеграл слева в (29) не зависит от конкретного вида кривой Γ_{ext}, а только от начальной и конечной ее точек $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_{0,k}$, поэтому в качестве Γ_{ext} можно взять отрезок $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}$. Учитывая, что в системе $x_1x_2x_3$ тензор $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ для всех включений диагональный, для интеграла в правой части (29) имеем:

$$\int_{\Gamma_{\text{ext}}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \mathrm{d}\mathbf{r}_1 = \int_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \lambda_j(\mathbf{r}_1) \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j \left\langle \lambda_j \right\rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} (x_{j0,k} - x_{j0}) \tag{30}$$

где $\mathbf{e}_j$, x_{j0}, $x_{j0,k}$, $j = 1, 2, 3$ – базисные векторы системы $x_1x_2x_3$ и координаты точек $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_{0,k}$ соответственно; $\left\langle \lambda_j \right\rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}}$ – обобщенные средние по отрезку $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}$

значения главных компонент $\lambda_j(\mathbf{r})$:

$$\langle \lambda_j \rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} = \begin{cases} (x_{j0,k} - x_{j0})^{-1} \int\limits_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} \lambda_j(\mathbf{r}_1)\,\mathrm{d}\,x_j, \; x_{j0,k} \neq x_{j0}, \\ 0, \; x_{j0,k} = x_{j0}. \end{cases}$$

В случае, когда $x_{j0,k} = x_{j0}$, величину $\langle \lambda_j \rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}}$ можно было принять равной любому конечному числу, поскольку в выражении (30) она умножается на $x_{j0,k} - x_{j0}$, которая равна нулю.

Подставляя (30) в (29) и записывая в векторном виде, получим

$$\int\limits_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) = \left(\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right) = \\ = \left(\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right).$$

Если отрезок $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}$ проходит через достаточно большое количество включений, то в силу статистической однородности материала можно принять, что среднее по отрезку близко к среднему по образцу, поэтому

$$\left(\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\mathbf{r}_0\mathbf{r}_{0,k}} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right) \approx \left(\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right) = \\ = \left(\mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right),$$

то есть

$$\int\limits_{\Gamma_{\text{ext}}} \left(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_1) \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \right) \approx \left(\mathbf{H}_0, (\mathbf{r}_{0,k} - \mathbf{r}_0) \right). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (25), с учетом (26) имеем оценку распределения температуры во включении i-го вида, расположенном в глубине образца:

$$u(\mathbf{r}) \approx -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}_{0,k}) - \left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle^{-1} \mathbf{H}_0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0,k}) \right). \quad (32)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты работы.

1. Получены точные операторные выражения (8), (9), (12) для локальных значений напряженности температурного поля, вектора плотности теплового потока и температуры в образце неоднородного материала.

2. В обобщенном сингулярном приближении получены выражения (13), (14), (16) для локальных значений напряженности температурного поля, вектора плотности теплового потока и температуры в образце; при этом предполагалось, что неоднородный материал состоит из эллипсоидальных зерен.

3. Для случая композита с одинаково ориентированными эллипсоидальными зернами получены расчетные соотношения (22), (24) для компонент локальной напряженности температурного поля и локального вектора плотности теплового потока, а также соотношения (27), (28), (32) для оценки локального значения температуры в образце в зависимости от варианта расположения включения, содержащего точку, в которой прогнозируется значение температуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №№ 16-08-00262-а, 17-08-01374-а, в рамках государственного задания Южного научного центра РАН (№ госрегистрации ААА-А-А16-116012610052-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников В.И. 2003. *Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах*. М., Наука: 279 с.

2. Garnett J.C.M. 1904. Colours in metal glasses and in metallic films. *Phil. Trans. R. Soc. London*. 203: 385–420.

3. Bruggeman D.A.G. 1935. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen *Ann. Physik*. 24: 636–664. doi: 10.1002/andp.19354160705

4. Bragg W.L., Pippard A.B. 1953. The Form Birefringence of Macromolecules. *Acta Cryst*. 6(11–12): 865–867. doi: https://doi.org/10.1107/S0365110X53002519

5. Hashin Z., Shtrikman S. 1962. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys*. 33(10): 3125–3131. doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.1728579

6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. 2014. Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой. *Математическое моделирование и численные методы*. 4: 3–17.

7. Progelhof R.C., Throne J.L., Ruetsch R.R. 1976. Methods for Predicting the Thermal Conductivity of Composite Systems: A Review. *Polymer Engineering and Science*. 16(9): 615–625. doi: 10.1002/pen.760160905

8. Pietrak K., Wisniewski T.S. 2015. A review of models for effective thermal conductivity of composite materials. *Journal of Power Technologies*. 95(1): 14–24.

9. Фокин А.Г. 1971. Диэлектрическая проницаемость смесей. *Журнал технической физики*. 41(6): 1073–1079.

10. Шермергор Т.Д. 1977. *Теория упругости микронеоднородных сред*. М., Наука: 399 с.

11. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. 2013. Об объединении методов оценки эффективных диэлектрических характеристик гетерогенных сред на основе обобщенного сингулярного приближения. *Доклады Академии наук*. 452(1): 27–31. doi: 10.7868/S0869565213260083

12. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. 2016. О методе анализа распределений локальных электрических полей в композиционном материале. *Доклады Академии наук*. 467(3): 275–279. doi: 10.7868/S0869565216090097

13. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Сычев А.П. 2015. О прогнозировании распределений локальных упругих полей в неоднородных средах на основе обобщенного сингулярного приближения. *Вестник Южного научного центра*. 11(3): 11–17.

14. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. 1958. *Обобщенные функции и действия над ними*. М., ГИФМЛ: 440 с.

15. Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б., Кириллов Д.А. 2017. О вычислении эффективной теплопроводности текстурированных трибокомпозитов. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничеств*а. 2: 48–56.

16. Лавров И.В. 2013. Произвольно ориентированный диэлектрический эллипсоид в анизотропной среде: метод неортогонального преобразования пространства. *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. 13(1): 44–47.

REFERENCES

1. Kolesnikov V.I. 2003. *Teplofizicheskie protsessy v metallopolimernykh tribosistemakh.* [*Thermophysical processes in metal-polymeric tribosystems*]. Moscow, Nauka: 279 p. (In Russian).

2. Garnett J.C.M. 1904. Colours in metal glasses and in metallic films. *Phil. Trans. R. Soc. London*. 203: 385–420.

3. Bruggeman D.A.G. 1935. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen *Ann. Physik*. 24: 636–664.

4. Bragg W.L., Pippard A.B. 1953. The Form Birefringence of Macromolecules. *Acta Cryst*. 6(11–12): 865–867. doi: https://doi.org/10.1107/S0365110X53002519

5. Hashin Z., Shtrikman S. 1962. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys*. 33(10): 3125–3131. doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.1728579

6. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. 2014. [Effective thermal conductivity of a composite in case of inclusions shape deviations from spherical ones]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*. 4: 3–17. (In Russian).

7. Progelhof R.C., Throne J.L., Ruetsch R.R. 1976. Methods for Predicting the Thermal Conductivity of Composite Systems: A Review. *Polymer Engineering And Science*. 16(9): 615–625. doi: 10.1002/pen.760160905

8. Pietrak K., Wisniewski T.S. 2015. A review of models for effective thermal conductivity of composite materials. *Journal of Power Technologies*. 95(1): 14–24.

9. Fokin A.G. 1971. [Dielectric Permittivity of Mixtures]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 41(6): 1073–1079. (In Russian).

10. Shermergor T.D. 1977. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred.* [*Micromechanics of inhomogeneous medium*]. Moscow, Nauka: 399 p. (In Russian).

11. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. 2013. Association of evaluation methods of the effective permittivity of heterogeneous media on the basis of a generalized singular approximation. *Doklady Physics*. 58(9): 379–383. doi: 10.1134/S1028335813090012

12. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. 2016. A Method of Analysis of Distributions of Local Electric Fields in Composites. *Doklady Physics*. 61(3): 124–128. doi: 10.1134/S1028335816030101

13. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Sychev A.P. 2015. [On the prediction of local elastic fields' distributions in non-uniform media on the basis of a generalized singular approximation]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 11(3): 11–17. (In Russian).

14. Gel'fand I.M., Shilov G.E. 1958. *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi.* [*Generalized functions. Properties and Operations*]. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature: 440 p. (In Russian).

15. Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B., Kirillov D.A. 2017. [On calculation of the effective thermal conductivity of textured tribocomposites]. *Ekologicheskiy vestnik naucnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. (2): 48–56. (In Russian).

16. Lavrov I.V. 2013. [An arbitrarily oriented dielectric ellipsoid in an anisotropic medium: the non-orthogonal space transformation method]. *Fundamental'nye problemy radioelektronnogo priborostroeniya*. 13(1): 44–47. (In Russian).

Поступила 06.06.2017