

УДК 539.3

ФУНКЦИЯ ГРИНА ТЕРМОУПРУГОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СЛОЯ

© 2012 г. В.В. Калинин¹, Г.Ю. Суворова¹, Т.И. Белянкова¹

В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн в трехмерной постановке рассмотрена связанная динамическая задача о гармонических колебаниях термоупругого слоя под действием распределенной в некоторой области его поверхности нагрузки. Предполагается, что поверхность слоя вне области действия нагрузки свободна от механических напряжений и теплоизолирована, нижняя грань также теплоизолирована и жестко сцеплена с недеформируемым основанием. В естественном состоянии материал слоя является ортотропным материалом гексагональной сингонии класса *bmm* с осью симметрии, ориентированной перпендикулярно поверхности слоя, начальное напряженное состояние предполагается однородным. Построена трехмерная функция Грина среды, проведен анализ влияния начальных напряжений на ее дисперсионные свойства, результаты оформлены в виде графиков.

Ключевые слова: динамика, термоупругость, начальные напряжения, тепловой поток, функция Грина термоупругого слоя.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время количество публикаций по исследованиям процессов возбуждения механических колебаний за счет воздействия лазерного излучения существенно возросло. Достаточно полный обзор литературы приведен в [1; 2]. В большинстве работ для исследования используются различные инженерные подходы, приближенно учитывающие наличие начальных напряжений, предварительного нагрева и т.д. В работе [3] в двумерной постановке на основе определяющих соотношений, полученных в работе [4] за счет последовательной линеаризации нелинейных уравнений связанной термоупругости, было проведено качественное исследование термоупругих эффектов, возникающих в преднапряженной термоупругой среде. В [5] рассмотрена задача о колебаниях термоупругого преднапряженного слоя под действием распределенной поверхностной нагрузки. Предполагалось, что материал слоя гиперупругий, первоначально изотропный. В качестве определяющих соотношений использовалась усеченная форма представления удельной потенциальной энергии материала. В [6] рассмотрена связанная смешанная задача для термоупругого слоисто-неоднородного полупрос-

транства, предложены методы ее решения. В настоящей работе задача о колебаниях термоупругого слоя рассмотрена в трехмерной постановке. Построена функция Грина среды, изучены ее дисперсионные свойства в условиях начальной деформации и преднагрева.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат Лагранжа x_1, x_2, x_3 , связанную с естественным состоянием среды. Полагаем, что термоупругий слой $0 \leq x_3 \leq h, |x_1|, |x_2| < \infty$ при температуре $\tau = \tau_1 = \text{const}$ подвергнут действию однородных начальных напряжений [7; 8], наводящих в среде однородную начальную деформацию вида

$$\mathbf{R} = \Lambda \cdot \mathbf{r}, \quad \Lambda = \nu_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k, \quad (1)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R} – радиус-векторы в естественном и начальном-деформированном состоянии (НДС), $\nu_k = 1 + \delta_k$, где δ_k ($k = 1, 2, 3$) – относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей, τ_1 – температура тела в начальном деформированном состоянии. Материал среды ортотропный, в естественном состоянии относящийся к материалам гексагональной симметрии класса *bmm*. Колебания слоя вызваны либо действием распределенной в области Ω на поверхности среды механической нагрузки $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$, либо тепловым $\tau_n e^{-i\omega t}$ воздействием (ω – круговая частота колебаний, \mathbf{n} – нормаль к

¹ Южный научный центр Российской академии наук, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41; e-mail: kalin@ssc-ras.ru; galias@yandex.ru; belen@ssc-ras.ru

поверхности). Нижняя грань слоя предполагается жестко сцепленной с недеформируемым основанием и теплоизолированной.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В рамках линеаризованной теории наложения малой деформации на конечную движение термоупругого слоя описывается уравнениями [4] ($i, j = 1, 2, 3$)

$$c_{1111}^* u_{1,11} + c_{2112}^* u_{1,22} + c_{3113}^* u_{1,33} + c_1 u_{2,12} + c_2 u_{3,13} - \beta_{11}^* u_{4,1} = \rho_0 u_{1,tt}$$

$$c_1 u_{1,12} + c_{1221}^* u_{2,11} + c_{2222}^* u_{2,22} + c_{3223}^* u_{2,33} + c_3 u_{3,23} - \beta_{22}^* u_{4,2} = \rho_0 u_{2,tt} \quad (2)$$

$$c_2 u_{1,13} + c_3 u_{2,23} + c_{1331}^* u_{3,11} + c_{2332}^* u_{3,22} + c_{3333}^* u_{3,33} - \beta_{33}^* u_{4,3} = \rho_0 u_{3,tt}$$

$$\lambda_{11} u_{4,11} + \lambda_{22} u_{4,22} + \lambda_{33} u_{4,33} =$$

$$= \tau_1 \frac{\rho_0 c_\epsilon}{\tau_0} u_{4,t} + \tau_1 (\beta_{11}^* u_{1,1t} + \beta_{22}^* u_{2,2t} + \beta_{33}^* u_{3,3t}); \quad (3)$$

здесь ρ_0 – плотность материала среды в естественном состоянии, u_i^τ – компоненты расширенного вектора смещений $\mathbf{u}^\tau = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, где $u_4 = \tau - \tau^* - \tau_1$ – изменение температуры среды в НДС, τ_0 – температура среды в естественном состоянии, τ_1 – температура среды в начально-деформированном состоянии, λ_{ij} – компоненты тензора коэффициентов теплопроводности, c_ϵ – теплоемкость при постоянной деформации, β_{ij}^* – компоненты тензора термоупругих констант, нижними индексами после запятой отмечены производные по соответствующим координатам. Для удобства изложения введем расширенный вектор напряжений $\mathbf{q}^\tau = \{\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}, \theta_{34}\}$, где $\theta_{34} = u_{4,3}$ – нормальная к поверхности среды компонента вектора теплового потока. С учетом введенных обозначений линеаризованные граничные условия принимают вид

$$x_3 = h: \mathbf{q}^\tau = \mathbf{q}^*(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \mathbf{q}^\tau = 0, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega, \quad (4)$$

$$x_3 = 0: u_1, u_2, u_3 = 0, \quad u_{4,3} = 0, \quad |x_1|, |x_2| < \infty. \quad (5)$$

Далее, поскольку рассматривается установившийся режим колебаний, экспоненциальный множитель опускаем.

В уравнениях (2) использованы следующие обозначения:

$$c_1 = c_{1122}^* + c_{1212}^*, \quad c_2 = c_{1133}^* + c_{1313}^*, \quad c_3 = c_{2233}^* + c_{2323}^*.$$

Коэффициенты c_{ijkl}^* определяются соотношениями [5]:

$$c_{ijkl}^* = c_{ijkl} \nu_j \nu_k + P_{il} \delta_{jk}, \quad \beta_{ij}^* = \nu_j \beta_{ij}, \quad (6)$$

P_{ij} – компоненты тензора Кирхгофа. С точностью до линейных слагаемых относительно тензора деформации Коши–Грина \mathbf{S} и с учетом представления (1) компоненты тензора Кирхгофа представляются в виде

$$P_{ij} = \frac{1}{2} c_{ijkk} (\nu_k^2 - 1) - (\tau_1 - \tau_0) \beta_{ij}. \quad (7)$$

С учетом симметрии первоначального материала упругие и термоупругие константы в начально-деформированном состоянии (6) принимают вид

$$c_{iiii}^* = c_{ii} \nu_i \nu_i + P_{ii}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$c_{ijij}^* = c_{ij} \nu_i \nu_j, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$c_{ijij}^* = c_{44} \nu_j \nu_i, \quad c_{ijji}^* = c_{44} \nu_j \nu_j + P_{ii},$$

$$c_{ijji}^* = c_{44} \nu_j \nu_j + P_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad j = 3; \quad (8)$$

$$c_{ijij}^* = c_{66} \nu_j \nu_i, \quad c_{ijji}^* = c_{66} \nu_j \nu_j + P_{ii},$$

$$c_{ijji}^* = c_{66} \nu_j \nu_j + P_{ii}, \quad i = 1, 2, \quad j = 2;$$

$$\beta_{ii}^* = \nu_i \beta_{ii}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Необходимо учитывать, что $c_{13} = c_{23}$, $c_{66} = 0,5(c_{11} - c_{12})$.

Согласно формулам (6), в однородном начально-деформированном состоянии для гексагональных материалов класса *bmm* справедливы соотношения

$$c_{1122}^* = c_{2211}^*, \quad c_{1133}^* = c_{3311}^*, \quad c_{2233}^* = c_{3322}^*, \\ c_{1212}^* = c_{2121}^*, \quad c_{1313}^* = c_{3131}^*, \quad c_{2323}^* = c_{3232}^*, \quad (9)$$

Матрица связи [9; 10] для термоупругих материалов класса *bmm* с учетом формул (8) и (9) принимает в начально-деформированном состоянии вид

$$\begin{pmatrix} * \\ \theta_{11} \\ \theta_{22} \\ \theta_{33} \\ \theta_{23} \\ \theta_{32} \\ \theta_{13} \\ \theta_{31} \\ \theta_{12} \\ \theta_{21} \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,2} & u_{3,3} & u_{2,3} & u_{3,2} & u_{1,3} & u_{3,1} & u_{1,2} & u_{2,1} & u_4 \end{pmatrix} \cdot \quad (10)$$

Здесь η – линеаризованная удельная энтропия

$$\eta = \beta_{ij}^* u_{k,i} + \frac{\rho_0 c_\varepsilon}{\tau_0} u_4. \quad (11)$$

ПРИВЕДЕНИЕ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Следуя [1; 2], для приведения к безразмерному виду используем следующие нормализованные параметры:

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{\omega^* x_i}{V_p}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad t' = \omega^* t, \quad \tau' = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau'_1 = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \\ \omega &= \frac{c_\varepsilon c_{11}}{\lambda_{11}}, \quad E = \frac{\tau_0 \beta_{11}^2}{\rho c_\varepsilon c_{11}}, \\ u'_i &= \frac{u_i \rho \omega^* V_p}{\beta_{11} \tau_0}, \quad c_{ijkl}^* = \frac{c_{ijkl}}{c_{11}}, \\ \beta_{ij}^{*'} &= \frac{\beta_{ij}^*}{\beta_{11}}, \quad \lambda'_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}}, \\ \theta'_{ij} &= \frac{\theta_{ij}}{\beta_{11} \tau_0}, \quad g' = \frac{g V_p}{\omega^* \tau_0}, \quad f = \frac{f}{\tau_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь E – постоянная термоупругой связи, ω^* – нормализованная частота среды, V_p – скорость продольной волны недеформированного материала.

С учетом формул (12) уравнения движения термоупругой среды (2), (3) в безразмерных параметрах принимают вид

$$\begin{aligned} &c_{1111}^* u_{1,11} + c_{2112}^* u_{1,22} + c_{3113}^* u_{1,33} + \\ &+ \omega^2 u_1 + c_1 u_{2,12} + c_2 u_{3,13} - \beta_1 u_{4,1} = 0, \end{aligned}$$

$$c_1 u_{1,12} + c_{1221}^* u_{2,11} + c_{2222}^* u_{2,22} + c_{3223}^* u_{2,33} + \quad (13)$$

$$+ \omega^2 u_2 + c_3 u_{3,23} - \beta_2 u_{4,2} = 0,$$

$$\begin{aligned} &c_2 u_{1,13} + c_3 u_{2,23} + c_{1331}^* u_{3,11} + c_{2332}^* u_{3,22} + \\ &+ c_{3333}^* u_{3,33} + \omega^2 u_3 - \beta_3 u_{4,3} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_{4,11} + \lambda_2 u_{4,22} + \lambda_3 u_{4,33} + i\omega \tau_1 u_4 + i\omega E^* \times \\ &\times (\beta_1 u_{1,1} + \beta_2 u_{2,2} + \beta_3 u_{3,3}) = 0. \end{aligned}$$

В уравнениях (13) использованы следующие обозначения:

$$\lambda_2 = \lambda_{22}, \quad \lambda_3 = \lambda_{33}, \quad (14)$$

$$E^* = \tau_1 E, \quad \beta_1 = \beta_{11}^*, \quad \beta_2 = \beta_{22}^*, \quad \beta_3 = \beta_{33}^*.$$

В безразмерных величинах граничные условия (4), (5) принимают вид

$$\begin{aligned} x_3 = h: \quad \mathbf{q}^\tau = \mathbf{q}^*, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \mathbf{q}^\tau = 0, \\ (x_1, x_2) \notin \Omega, \quad |x_1|, |x_2| < \infty; \end{aligned} \quad (15)$$

$$x_3 = 0: \quad u_1, u_2, u_3 = 0, \quad u_{4,3} = 0, \quad |x_1|, |x_2| < \infty, \quad (16)$$

здесь $\mathbf{q}^* = \{q_1, q_2, q_3, -g\}$ – заданный вектор поверхностной нагрузки.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для построения решения краевой задачи применим к уравнениям (13) и граничным условиям (15), (16) двумерное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2

$$\begin{aligned} &c_{3113}^* U_1'' - P_1 - \alpha_1 \alpha_2 c_1 U_2 - i\alpha_1 c_2 U_3' + i\alpha_1 \beta_1 U_4 = 0, \\ &- \alpha_1 \alpha_2 c_1 U_1 + c_{3223}^* U_2'' - P_2 - \\ &- i\alpha_2 c_3 U_3' + i\alpha_2 \beta_2 U_4 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 -i\alpha_1 c_2 U_1' - i\alpha_2 c_3 U_2' + c_{3333}^* U_3'' - P_3 + \beta_3 U_4 &= 0; \\
 \alpha_1 \beta_1 E^* U_1 + \alpha_2 \beta_2 E^* U_2 + \\
 + i\omega E^* \beta_3 U_3 + \lambda_3 u_{4,33} - P_4 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$x_3 = h: \begin{cases} c_{3113}^* U_1' - i\alpha_1 c_{1313}^* U_3 = Q_1, \\ c_{3223}^* U_2' - i\alpha_2 c_{2323}^* U_3 = Q_2, \\ c_{3333}^* U_3' - i\alpha_1 c_{1133}^* U_1 - i\alpha_2 c_{2233}^* U_2 - \beta_3 U_4 = Q_3, \\ U_4 = -G; \end{cases} \quad (18)$$

$$x_3 = 0: U_1 = U_2 = U_3 = 0, \quad U_4 = 0; \quad (19)$$

здесь α_1, α_2 – параметры преобразования, $\mathbf{U}^\tau, \mathbf{Q}^\tau$ – трансформанты расширенных векторов смещения \mathbf{u}^τ и нагрузки \mathbf{q}^* , штрихом отмечены производные по x_3 . Кроме того, в уравнениях (17) использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 P_k &= c_{1kk1}^* \alpha_1^2 + c_{2kk2}^* \alpha_2^2 - \omega^2, \quad k = 1, 2, 3, \\
 P_4 &= \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 - i\omega \tau_1. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Решение краевой задачи (17)–(19) [3, 4, 7] ищем в виде

$$U_p = -i\alpha_p \sum_{k=1}^4 f_{pk} [d_k \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + d_{k+4} \operatorname{ch} \sigma_k x_3], \quad p = 1, 2,$$

$$U_3 = \sum_{k=1}^4 f_{3k} [d_k \operatorname{ch} \sigma_k x_3 + d_{k+4} \operatorname{sh} \sigma_k x_3], \quad (21)$$

$$U_4 = \sum_{k=1}^4 f_{4k} [d_k \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + d_{k+4} \operatorname{ch} \sigma_k x_3];$$

здесь σ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{3113}^* \sigma^2 - P_1 & -\alpha_2^2 c_1 & c_2 \sigma & -\beta_1 \\ -\alpha_1^2 c_1 & c_{3223}^* \sigma^2 - P_2 & c_3 \sigma & -\beta_2 \\ -\alpha_1^2 c_2 \sigma & -\alpha_2^2 c_3 \sigma & c_{3333}^* \sigma^2 - P_3 & -\beta_3 \sigma \\ -i\alpha_1^2 \omega E^* \beta_1 & -i\alpha_2^2 \omega E^* \beta_2 & i\omega E^* \beta_3 \sigma & \lambda_3 \sigma^2 - P_4 \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

коэффициенты f_{mk} ($m, k = 1, 2, 3, 4$) в представлении (21) являются решениями однородной системы уравнений с матрицей

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} c_{3113}^* \sigma_k^2 - P_1 & -\alpha_2^2 c_1 & c_2 \sigma_k & -\beta_1 \\ -\alpha_1^2 c_1 & c_{3223}^* \sigma_k^2 - P_2 & c_3 \sigma_k & -\beta_2 \\ -\alpha_1^2 c_2 \sigma_k & -\alpha_2^2 c_3 \sigma_k & c_{3333}^* \sigma_k^2 - P_3 & -\beta_3 \sigma_k \\ -i\alpha_1^2 \omega E^* \beta_1 & -i\alpha_2^2 \omega E^* \beta_2 & i\omega E^* \beta_3 \sigma_k & \lambda_3 \sigma_k^2 - P_4 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Неизвестные $d_k, k = 1, 2, \dots, 8$ определяются из удовлетворения решением (21) граничных условий (4), (5), т.е. для нахождения d_k получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{Q}, \quad (24)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} lc_{11} & lc_{12} & lc_{13} & lc_{14} & ls_{11} & ls_{12} & ls_{13} & ls_{14} \\ lc_{21} & lc_{22} & lc_{23} & lc_{24} & ls_{21} & ls_{22} & ls_{23} & ls_{24} \\ ls_{31} & ls_{32} & ls_{33} & ls_{34} & lc_{31} & lc_{32} & lc_{33} & lc_{34} \\ lc_{41} & lc_{42} & lc_{43} & lc_{44} & ls_{41} & ls_{42} & lc_{43} & lc_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где

$$ls_{ik} = l_{ik} \operatorname{sh} \sigma_k h, \quad lc_{ik} = l_{ik} \operatorname{ch} \sigma_k h, \quad (26)$$

$$l_{pk} = c_{3pp3}^* \sigma_k f_{pk} + c_{p3p3}^* f_{3k}, \quad p = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}
 l_{3k} &= -\alpha_1^2 c_{1133}^* f_{1k} - \alpha_2^2 c_{2233}^* f_{2k} + \\
 &+ \sigma_k c_{3333}^* f_{3k} - \beta_3 f_{4k}, \quad l_{4k} = \sigma_k f_{4k}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные d_k в (21), получаем решение краевой задачи (17)–(19).

ФУНКЦИЯ ГРИНА

Решение краевой задачи (13), (15) и (16) в образах Фурье имеет вид

$$\mathbf{U}^\tau(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) \mathbf{Q}^\tau(\alpha_1, \alpha_2) \quad (28)$$

с элементами матрицы-функции Грина \mathbf{K} , определенными формулами ($j = 1, 2, 3, 4$)

$$K_{pj}(\alpha, x_3) = -i\alpha_p \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{pk} \times$$

$$\times [\Delta_{jk} \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+4} \operatorname{ch} \sigma_k x_3], \quad p = 1, 2,$$

$$K_{3j}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{3k} [\Delta_{jk} \operatorname{ch} \sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+4} \operatorname{sh} \sigma_k x_3], \quad (29)$$

$$K_{4j}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{4k} [\Delta_{jk} \operatorname{sh} \sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+4} \operatorname{ch} \sigma_k x_3],$$

$\Delta_0 = \det(\mathbf{A}), \Delta_{jk}$ – определитель и алгебраические дополнения матрицы \mathbf{A} (25).

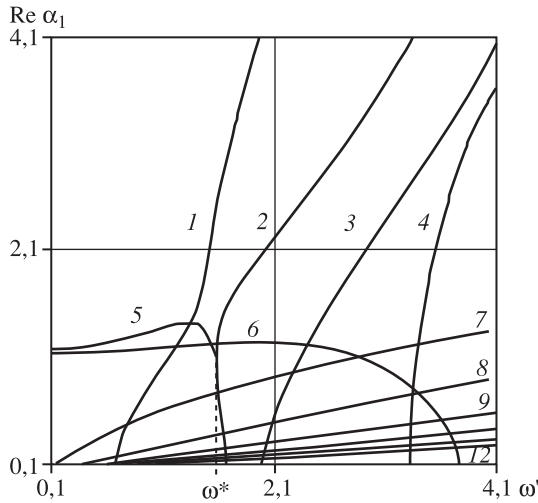


Рис. 1. Проекция комплексных полюсов на плоскость $\text{Re } \alpha_1$, положительная часть ($\text{Re } \alpha_1 \geq 0$). Цифрами 1–4 отмечены полюсы с малой комплексной составляющей, 5 – вещественные ветви комплексных полюсов, которые на частоте ω^* переходят в ветви полюсов с малой мнимой частью, вместе образуя вторую моду. Цифрами 6–12 отмечены вещественные составляющие существенно комплексных полюсов функции **K**

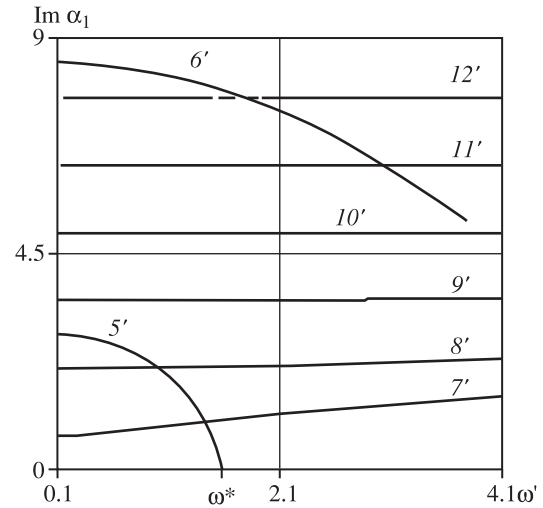


Рис. 2. Проекция комплексных полюсов на плоскость $\text{Im } \alpha_1$, положительная часть ($\text{Im } \alpha_1 \geq 0$). Цифрой 5' отмечены мнимые ветви комплексных полюсов, которые на частоте ω^* переходят в ветви полюсов с малой мнимой частью, вместе образуя вторую моду. Цифрами 6'–12' отмечены мнимые составляющие существенно комплексных полюсов функции **K**

Решение исходной краевой задачи (13)–(16) получим, применив к выражениям (29) обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^\tau(x_1, x_2, x_3) &= \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) \mathbf{q}^\tau(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
 & \mathbf{k}(s, t, x_3, \omega) = \\
 &= \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

где матрица-функция Грина $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) = \|K_{ij}\|_{4 \times 4}$ определена формулами (29). Контур Γ_1 и Γ_2 в представлении (30) выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения и, как правило, совпадают с вещественной осью почти всюду и отклоняются от нее в окрестности полюсов функции **K** с малой комплексной частью. Каждый контур обходит полюсы функции с отрицательной вещественной частью сверху, с положительной – снизу.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА

Особенность рассматриваемого класса задач – наличие у элементов функции **K** (29) счетного множества комплексных нулей и полюсов, часть из которых обладает малой мнимой частью, что обус-

ловливает осцилляцию ядра интегрального уравнения [11]. Для эффективного решения интегрального уравнения необходимо использовать специальные методы [11–14], с высокой точностью учитывающие динамические характеристики задачи. При этом необходимо проводить детальное исследование свойств символа ядра интегрального уравнения. Анализ показал, что, наряду с комплексными полюсами с малой мнимой частью, функция **K** имеет конечное множество существенно комплексных полюсов с большой мнимой частью. Для численных расчетов использовался селенид кадмия, обладающий большой теплоемкостью и ярко выраженными теплопроводящими свойствами. Расчеты проведены при следующих значениях параметров [29]:

$$\begin{aligned}
 \tau_0 &= 298,0 \text{ K}, \quad \rho_0 = 5,504 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^2, \\
 c_{11} &= 7,41 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12} = 4,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
 c_{13} &= 3,93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{33} = 8,36 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
 c_{44} &= 1,32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
 \beta_{11} &= 0,621 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2} \text{K}^{-1}, \\
 \beta_{33} &= 0,551 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{К}^{-1} \text{м}^{-2}, \\
 \lambda_{11} &= 9 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \text{K}^{-1}, \quad \lambda_{33} = 9 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \text{K}^{-1}, \\
 c_\epsilon &= 260 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \text{K}^{-1}.
 \end{aligned}$$

На рисунках 1 и 2 представлены графики распределения полюсов функции **K**, рассчитанные при $\alpha_2 = 0$. Рисунок 1 представляет проекцию по-

люсов на плоскость $\text{Re}\alpha_1$, рисунок 2 – проекцию на плоскость $\text{Im}\alpha_1$. В силу симметрии представлены лишь половины дисперсионных диаграмм $\text{Re}\alpha_1 \geq 0$ и $\text{Im}\alpha_1 \geq 0$. Цифрами 1–4 на рисунке 1 отмечены полюса, имеющие малую комплексную составляющую. Цифрами 6–12 на рисунке 1 и 6'–12' на рисунке 2 отмечены, соответственно, вещественные и мнимые составляющие существенно комплексных полюсов функции **К**. Кривые 5 и 5' представляют собой ветви комплексных полюсов, которые на частоте переходят в ветви полюсов с малой мнимой частью, вместе образуя вторую моду. Как следует из графиков, если не учитывать наличие существенно комплексных мод, вид дисперсионной диаграммы термоупругой среды незначительно отличается от дисперсионной диаграммы чисто упругой среды.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА

На рисунках 3–7 представлены графики, иллюстрирующие влияние начальных напряжений и преднагрева на дисперсионные свойства функции **К**. Цифрами 1–3 отмечены кривые, рассчитанные для слоя в естественном состоянии, а также в условиях гидростатического растяжения ($\nu_k = 0,01$) и в условиях предварительного нагрева ($\tau_1 = 312 \text{ K}$) соответственно. Как следует из графиков на рисунке 3, начальные напряжения приводят к сдвигу первой моды вниз, предварительный нагрев – вверх. Аналогично ведут себя третья (рис. 6) и четвертая

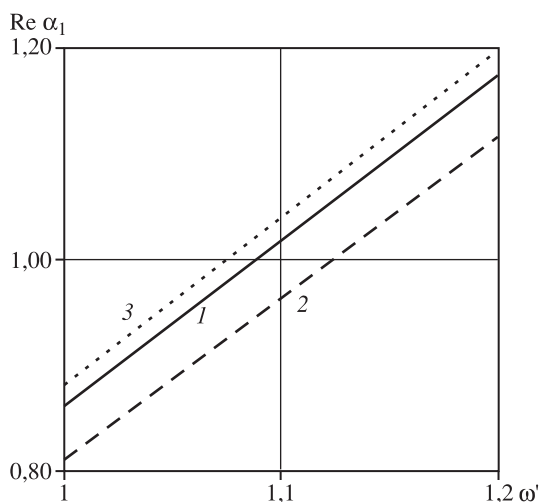


Рис. 3. Влияние начальных напряжений и преднагрева на первую моду функции **К**. Здесь и на рисунках 4–7 цифрами 1–3 отмечены кривые, рассчитанные для слоя в естественном состоянии, а также в условиях гидростатического растяжения ($\nu_k = 0,01$) и предварительного нагрева ($\tau_1 = 312 \text{ K}$) соответственно

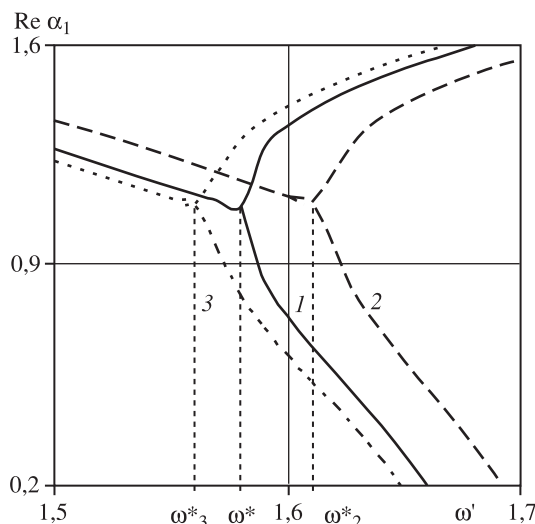


Рис. 4. Влияние начальных напряжений и преднагрева на вещественную составляющую второй моды функции **К**

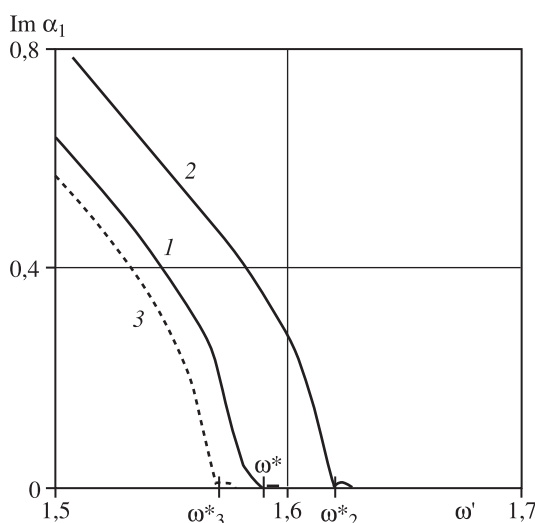


Рис. 5. Влияние начальных напряжений и преднагрева на мнимую составляющую второй моды функции **К**

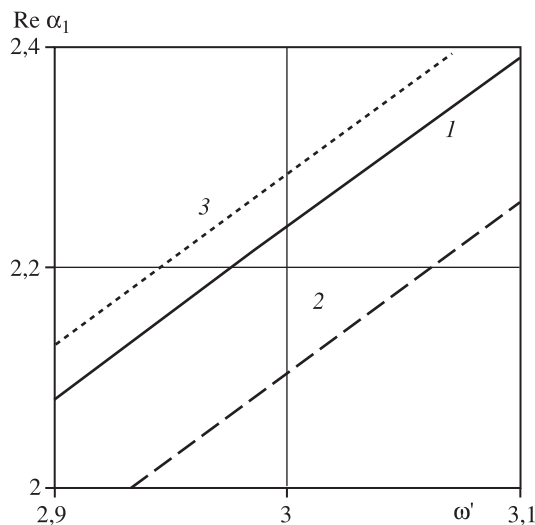


Рис. 6. Влияние начальных напряжений и преднагрева на третью моду функции **К**

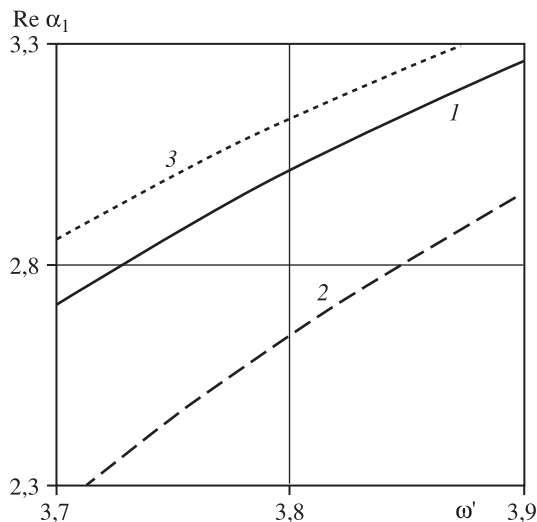


Рис. 7. Влияние начальных напряжений и преднагрева на четвертую моду функции K

(рис. 7) моды. На рисунках 4 и 5 приведены графики, иллюстрирующие влияние преднагрева и начальных напряжений на процесс перехода комплексных ветвей во вторую моду. Как следует из графиков, частота перехода при преднагреве уменьшается, при начальной деформации увеличивается. Из графиков следует, что начальные напряжения и преднагрев оказывают существенное влияние на динамические характеристики задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена связанная динамическая задача о гармонических колебаниях термоупругого слоя под действием распределенной в некоторой области его поверхности нагрузки. Предполагается, что поверхность слоя вне области действия нагрузки свободна от механических напряжений и теплоизолирована, нижняя грань слоя теплоизолирована и жестко сцеплена с недеформируемым основанием, начальное напряженное состояние предполагается однородным. Для ортотропного материала гексагональной сингонии класса btt с осью симметрии, ориентированной перпендикулярно поверхности слоя, построена трехмерная функция Грина среды, проведен анализ влияния начальных напряжений на ее дисперсионные свойства, результаты оформлены в виде графиков.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 25, Российского фонда фундаментальных исследований (10-08-01082, 12-01-00811, 12-08-01040).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al-Qahtani H., Datta S.K.* Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate // *J. of Appl. Phys.* 2004. Vol. 96. № 7. P. 3645–3657.
2. *Sharma J.N., Pal M., Chand D.* Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials // *J. of Sound and Vibration.* 2005. Vol. 284. Issues 1/2. P. 227–248.
3. *Суворова Г.Ю., Анджинович И.Е., Калинин В.В.* Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды // *Вестник Южного научного центра РАН.* 2010. Т. 6. № 4. С. 18–23.
4. *Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинин В.В.* Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды // *Вестник Южного научного центра РАН.* 2008. Т. 4. № 3. С. 3–8.
5. *Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е.* Динамическая контактная задача для термоупругого слоя // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.* 1999. № 4. С. 109–110.
6. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто-неоднородного полупространства // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.* 2000. № 3. С. 72–74.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуограниченных тел. М.: Наука, 2002. 240 с.
9. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / пер. с польского Я. Рыхлевского. М.: Мир, 1970. 301 с.
10. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967. 385 с.
11. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
13. *Бабешко В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // *ПММ.* 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.
14. *Бабешко В.А., Калинин В.В.* Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // *ПММ.* 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 285–292.

THE GREEN FUNCTION OF PRESTRESSED THERMOELASTIC LAYER

V.V. Kalinchuk, G.Yu. Suvorova, T.I. Belyankova

The dynamic coupled problem of harmonic oscillations of a thermo-elastic layer has been considered within a linearized theory of thermo-elastic waves' propagation in a three-dimensional formulation. It is assumed that the layer surface out of a loading region is free from mechanical stress and thermo-insulated; the bottom side is also thermo-insulated and is rigidly coupled with a non-deformable base. In the natural state, the layer's material is an orthotropic material of a hexagonal symmetry of $6mm$ class, with a symmetry axis being perpendicular to the layer surface. The initial stress state is assumed to be homogeneous. The three-dimensional Green's function of media has been constructed, the influence of initial stresses on its dispersive properties has been analyzed, and the results have been presented in the form of graphs.

Key words: dynamics, thermo-elasticity, initial stress, thermal stream, Green's function of thermo-elastic layer.

REFERENCES

1. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics*. 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323. (In English).
2. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*. 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036. (In English).
3. Suvorova G.Yu., Andjiovich I.E., Kalinchuk V.V. 2010. [Temperature effects in the dynamics of prestressed thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 6(4): 18–23. (In Russian).
4. Sheydakov D.N., Belyankova T.I., Sheydakov N.E., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 4(3): 3–8. (In Russian).
5. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 1999. [Dynamic contact problem for thermo-elastic layer]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*. 4: 109–110. (In Russian).
6. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2000. [The problem of dynamic mixed problems electroelasticity and thermoelasticity for layered inhomogeneous half-space]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*. 3: 72–74. (In Russian).
7. Lurie A.I. 1980. *Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]*. M., “Nauka”: 512 p. (In Russian).
8. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2002. *Dinamicheskiye kontaknyye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh poluogranichennykh tel. [The dynamic contact problems for prestressed media]*. M., “Nauka”: 240 p. (In Russian).
9. Novackiy V. 1970. *Dinamicheskiye zadachi termouprugosti. [Dynamic problem of thermoelasticity]*. M., “Mir”: 301 p. (In Russian).
10. Nay J.F. 1967. *Fizicheskie svoystva kristallov i ih opisaniye pri pomoshhi tenzorov i matrits. [Physical properties of crystals their representation by tensors and matrices]*. M., “Mir”: 385 p. (In Russian).
11. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskiye smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey. [Dynamic Mixed Problems in the Theory of Elasticity for Non-classical Domains]*. M., “Nauka”: 320 p. (In Russian).
12. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryahina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnyye yavleniya v deformiruemyykh sredakh. [The dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable environments]*. M., “Nauchnyy mir”: 246 p. (In Russian).
13. Babeshko V.A., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2002. The method of fictitious absorption in problems of the theory of elasticity for an inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 66(2): 267–274. (In English).
14. Babeshko V.A., Kalinchuk V.V. 2002. The method of fictitious absorption in coupled mixed problems of the theory of elasticity and mathematical physics for a multilayered inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 66(2): 275–281. (In English).