

УДК 539.3  
DOI: 10.7868/S25000640190102

## НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ

© 2019 г. Г.Ю. Леви<sup>1,2</sup>, В.В. Калинин<sup>1,2</sup>, Е.И. Ворович<sup>3</sup>

**Аннотация.** Исследована краевая задача о гармонических колебаниях термоупругого слоя. Предполагается, что колебания в слое инициированы тепловой нагрузкой. Поверхность слоя свободна от механических напряжений, в тепловом отношении вне области воздействия изолирована. С помощью интегрального преобразования Фурье задача в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе решения которой построено решение исходной задачи. Анализ дисперсионных свойств интегрального оператора позволил установить наличие двух полярных семейств. Основным является семейство полюсов с малой мнимой частью, которое играет основную роль в формировании волнового поля на поверхности слоя в силу слабого затухания соответствующих волн. Второе полярное семейство представляет собой комплексные полюсы со значительной мнимой составляющей. Эти полюсы в формировании поверхностного волнового поля играют незначительную роль, поскольку соответствующие им волны сильно затухают. На примере слоя из селенида кадмия проведено исследование влияния термоупругих коэффициентов на спектральные свойства термоупругой среды. Анализ показал, что роль коэффициента термоупругости незначительна для распределения полюсов в первом семействе, его влияние на второе семейство полюсов является существенным. В частности, от значения коэффициента зависит не только величина комплексных полюсов, но и их количество. Уменьшение коэффициента связности приводит к уменьшению количества полюсов во втором семействе, увеличение коэффициента связности – к увеличению количества полюсов. Тем самым изменение коэффициента термоупругости оказывает влияние на структуру поверхностного волнового поля лишь в окрестности границы области приложения нагрузки.

**Ключевые слова:** спектральные свойства, полярное семейство, термоупругие волны, термоупругий слой, функция Грина.

### SOME SPECTRAL PROPERTIES OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THERMOELASTIC LAYER

G.Yu. Levi<sup>1,2</sup>, V.V. Kalinchuk<sup>1,2</sup>, E.I. Vorovich<sup>3</sup>

**Abstract.** The boundary problem of harmonic oscillations of a thermoelastic layer is investigated. It is assumed that fluctuations in the layer are initiated by thermal load. The surface of the layer is free from mechanical stresses; it is thermally insulated outside the area of load influence. Using the integral Fourier transform, the partial differential problem is reduced to a system of ordinary differential equations, on the basis of the solution of which the solution of the original problem is constructed. An analysis of the dispersion properties of the integral operator made it possible to establish the presence of two polar families. The main one is the family of poles with a small imaginary part, which plays the main role in the formation of a wave field on the surface of the layer due to the weak attenuation of the corresponding waves. The second polar

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: kalin@ssc-ras.ru, galias@yandex.ru

<sup>2</sup> Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

<sup>3</sup> Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

family represents complex poles with a significant imaginary component. These poles play an insignificant role in the formation of the surface wave field, since the waves corresponding to them strongly attenuate. Using an example of a layer of cadmium selenide, the effect of thermoelastic coefficients on the spectral properties of a thermoelastic medium was studied. The analysis showed that the role of the thermoelasticity coefficient is insignificant for the distribution of the poles in the first family, its effect on the second family of poles is significant. In particular, not only the magnitude of the complex pole, but also their number depends on the value of the coefficient. A decrease in the coupling coefficient leads to a decrease in the number of poles in the second family, while an increase in the coupling coefficient leads to an increase in the number of poles. Thus, a change in the thermoelasticity coefficient affects the structure of the surface wave field only in the vicinity of the boundary of the load application region.

**Keywords:** spectral properties, polar family, thermoelastic waves, thermoelastic layer, Green's function.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема динамики термоупругой среды многократно исследовалась в силу значительного интереса к тепловым процессам, сопровождающим работу машин и механизмов, электронных приборов и устройств в режиме интенсивной эксплуатации. Значительное внимание авторов многочисленных публикаций уделено процессам возбуждения механических колебаний за счет воздействия лазерного излучения [1–3]. В подавляющем большинстве работ используются разные подходы для исследования различных сторон динамических процессов в термоупругих средах [1–32]. Это прежде всего особенности распространения волн Лэмба в пластинах [3–6], цилиндрических волн в цилиндрических панелях [7], акустических объемных [8–11] и интерфейсных [12] волн, волн Рэлея [13–20]. Особое место в проблеме распространения термоупругих волн в полуграниченных телах занимают вопросы наличия начальных напряжений [16–21]. В статье [21] авторы, следуя подходу, изложенному в монографии [33], провели последовательную линеаризацию нелинейных уравнений термоупругой среды и построили уравнения движения и определяющие соотношения динамики преднапряженной термоупругой среды. Уравнения приведены в тензорной форме, допускающей обобщение на криволинейные координаты. Выведенные соотношения использованы в работах [27; 28] при построении функции Грина термоупругого преднапряженного слоя и исследовании температурных эффектов, сопровождающих процесс распространения термоупругих волн. Значительный интерес представляют вопросы контактного взаимодействия термоупругих тел [22–26]. Возможно, в работе [26] впервые дана постановка динамической контактной задачи для термоупругой среды. В статьях [27; 28] иссле-

дованы вопросы контактного взаимодействия термоупругого слоя и полупространства. Построенные в работе [21] уравнения движения и определяющие соотношения преднапряженной термоупругой среды в статье [31] использованы для исследования предварительно напряженной термоупругой среды с неоднородным покрытием. Особый интерес представляют проблемы распространения волн Рэлея в пьезоактивных термоупругих средах [28–32]. Достаточно полный обзор работ на эту тему приведен в статье [30]. В связи с актуальностью проблемы в работах [31; 32] построенные в статье [21] уравнения движения и определяющие соотношения, учитывающие наличие начальных напряжений, предварительного нагрева и т.д., распространены на преднапряженные термоэлектроупругие среды.

В настоящей работе в рамках линеаризованной теории распространения связанных термоупругих волн [21] рассмотрена краевая задача о колебаниях термоупругого слоя под действием заданной на поверхности среды тепловой нагрузки, имитирующей действие модулированного по частоте лазерного луча. Исследовано влияние термоупругого коэффициента на спектральные свойства краевой задачи.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассмотрение вводится ортогональная связанная с естественным состоянием среды система координат Лагранжа  $x_1, x_2, x_3$ , ось  $x_3$  которой направлена вертикально вверх от слоя  $|x_1|, |x_2| < \infty, 0 \leq x_3 \leq h$ . Материал слоя предполагается термоупругим трансверсально изотропным, принадлежащим к группе гексагональной сингонии класса 6mm. Колебания в теле инициируются распределенной на поверхности в области  $\Omega = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq \infty\}$  механической или тепловой нагрузкой  $\mathbf{q}^r = \mathbf{q}^0 e^{-i\omega t}$ ,  $\mathbf{q}^0 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ , где  $q_1, q_2, q_3$  – компоненты векто-

ра напряжений,  $q_4 = -K_3 u_{4,3}$  – тепловой поток,  $K_3$  – коэффициент удельной теплопроводности,  $u_4$  – температура,  $\omega$  – частота колебаний. Полагаем, что вне области  $\Omega$  поверхность тела теплоизолирована и свободна от механических напряжений, нижняя грань слоя  $x_3 = 0$  жестко сцеплена с недеформируемым основанием и теплоизолирована.

### КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ

Введем для удобства расширенный вектор перемещений и температуры в слое  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ . Колебания однородной термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [16; 33]:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_3, \quad (3)$$

$$K_1 u_{4,11} + K_2 u_{4,22} + K_3 u_{4,33} - \rho c_\varepsilon u_4 - T_0 (\beta_{11} u_{1,1} + \beta_{22} u_{2,2} + \beta_{33} u_{3,3}) = 0, \quad (4)$$

где компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} u_{1,1} + c_{12} u_{2,2} + c_{13} u_{3,3} - \beta_{11} u_4, \\ \sigma_{22} &= c_{12} u_{1,1} + c_{22} u_{2,2} + c_{23} u_{3,3} - \beta_{22} u_4, \\ \sigma_{33} &= c_{13} u_{1,1} + c_{32} u_{2,2} + c_{33} u_{3,3} - \beta_{33} u_4, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = c_{66} u_{1,2} + c_{66} u_{2,1}, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = c_{55} u_{1,3} + c_{55} u_{3,1}, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} = c_{44} u_{2,3} + c_{44} u_{3,2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Участвующие в формулах (1)–(5) коэффициенты  $c_{ijkl}$ ,  $K_i$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{kl} = \alpha_{ij} c_{ijkl}$  представляют собой компоненты тензоров упругих постоянных, коэффициентов удельной теплопроводности, теплового расширения и термоупругости соответственно,  $\rho$  – плотность материала в естественном состоянии,  $c_\varepsilon$  – удельная теплоемкость,  $T_0$  – температура тела в недеформированном состоянии. Следуя подходу, изложенному в работах [22–25; 27; 28], введем безразмерные параметры с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x_i' &= \frac{\omega^* x_i}{V_L}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad t' = \omega^* t, \\ T_0' &= \frac{T_0}{T_0}, \quad \omega^* = \frac{c_\varepsilon c_{11}}{\lambda_{11}}, \quad E = \frac{T_0 \beta_{11}^2}{\rho c_\varepsilon c_{11}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i' &= \frac{u_i \rho \omega^* V_L}{\beta_{11} T_0}, \quad c_{ijkl}' = \frac{c_{ijkl}}{c_{11}}, \quad \beta_{ij}' = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{11}}, \\ K_i' &= \frac{K_i}{K_1}, \quad u_4' = \frac{u_4}{T_0}. \end{aligned}$$

Колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, поэтому все функции представляются в виде  $f = f_0 e^{-i\omega t}$ . Рассматривается случай плоских колебаний в плоскости  $x_1 O x_3$ , то есть  $u_2 \equiv 0$ , все остальные параметры задачи удовлетворяют условиям

$$f = f(x_1, x_3), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f \equiv 0.$$

Далее нули в индексах, экспоненты и штрихи опускаются. Уравнения движения и теплопроводности (1)–(4) представляются в виде:

$$\begin{aligned} c_{11} u_{1,11} + c_{55} u_{1,33} + \omega^2 u_1 + c_2 u_{3,13} - \beta_{11} u_{4,1} &= 0, \\ c_2 u_{1,13} + c_{55} u_{3,11} + \omega^2 u_3 + c_{33} u_{3,33} - \beta_{33} u_{4,3} &= 0, \\ u_{4,11} + K_3 u_{4,33} + i\omega u_4 + i\omega E (\beta_{11} u_{1,1} + \beta_{33} u_{3,3}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия:

на поверхности среды  $x_3 = h$ :

$$\mathbf{q}^\tau = \begin{cases} \mathbf{q}_0^\tau(x_1), & x_1 \in [-a; a], \\ 0, & x_1 \notin [-a; a], \end{cases} \quad (7)$$

на нижней грани слоя  $x_3 = 0$ :

$$u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad -K_3 u_{4,3} = 0. \quad (8)$$

### РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение краевой задачи (6)–(8) строится методами операционного исчисления за счет использования одномерного преобразования Фурье по координате  $x_1$ ,  $a$  – параметр преобразования). Искомые функции в пространстве образов Фурье представляются в виде:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, x_3, \omega) &= -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k} \times \\ &\times (C_k s h \sigma_k x_3 + C_{k+3} c h \sigma_k x_3), \\ U_3(\alpha, x_3, \omega) &= \sum_{k=1}^3 f_{3k} \times \\ &\times (C_k c h \sigma_k x_3 + C_{k+3} s h \sigma_k x_3), \\ U_4(\alpha, x_3, \omega) &= \sum_{k=1}^3 f_{4k} \times \\ &\times (C_k s h \sigma_k x_3 + C_{k+3} c h \sigma_k x_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Неизвестные коэффициенты  $C_k$  являются решением системы алгебраических уравнений

$$AC = Q^T,$$

полученной при удовлетворении трансформированных по Фурье граничных условий (7) и (8) функциями (9). Здесь  $Q = \{0, 0, Q_4, 0, 0, 0\}$ ,  $Q_4$  – образ Фурье компоненты  $q_{40}$ ,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} l_{11}c_1 & l_{13}c_3 & l_{14}c_4 & l_{11}s_1 & l_{13}s_3 & l_{14}s_4 \\ l_{21}s_1 & l_{23}s_3 & l_{24}s_4 & l_{21}c_1 & l_{23}c_3 & l_{24}c_4 \\ l_{41}c_1 & l_{43}c_3 & l_{44}c_4 & l_{41}s_1 & l_{43}s_3 & l_{44}s_4 \\ 0 & 0 & 0 & f_{11} & f_{13} & f_{14} \\ f_{31} & f_{33} & f_{34} & 0 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{43} & l_{44} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} l_{1k} &= -i\alpha(c_{55}\sigma_k f_{1k} + c_{55}f_{3k}), \\ l_{3k} &= -\alpha^2 c_{13}f_{1k} + \sigma_k c_{33}f_{3k} - \beta_3 f_{4k}, \\ l_{4k} &= \sigma_k f_{4k}. \quad s_i = \text{sh}\sigma_i h, \quad c_i = \text{ch}\sigma_i h. \end{aligned}$$

После применения обратного преобразования Фурье решение краевой задачи (6)–(8) можно записать в виде [34; 35]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(x_1, x_3, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{k} \times \\ &\times (x_1 - \xi, x_3, \omega) \mathbf{q}_0^T(\xi) d\xi, \\ \mathbf{k}(s, x_3, \omega) &= \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)$  представляются формулами:

$$\begin{aligned} K_{1j}(\alpha_1, x_3) &= -i\alpha_1 \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{1k} \times \\ &\times [\Delta_{jk} \text{sh}\sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+3} \text{ch}\sigma_k x_3], \\ &j = 1, 2, 4, \\ K_{3j}(\alpha_1, x_3) &= \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{3k} \times \\ &\times [\Delta_{jk} \text{ch}\sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+3} \text{sh}\sigma_k x_3], \\ K_{4j}(\alpha_1, x_3) &= \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^4 f_{4k} \times \\ &\times [\Delta_{jk} \text{sh}\sigma_k x_3 + \Delta_{j,k+3} \text{ch}\sigma_k x_3]. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) описывают перемещение произвольной точки слоя под действием заданной нагрузки. Тем самым представля-

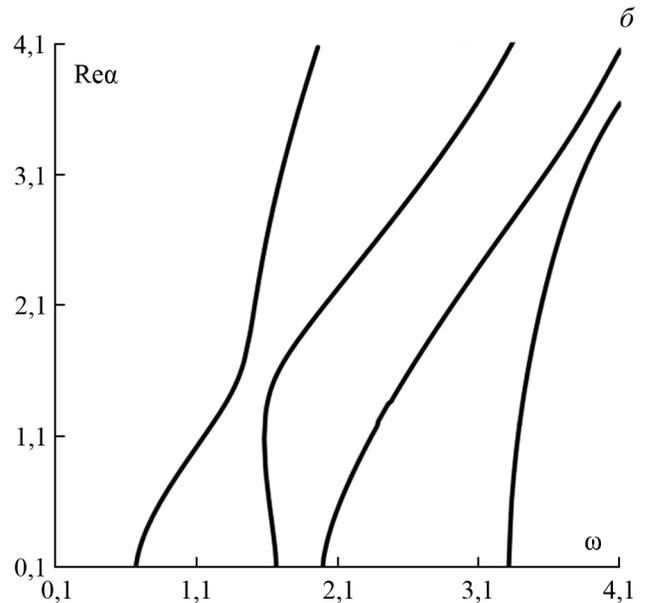
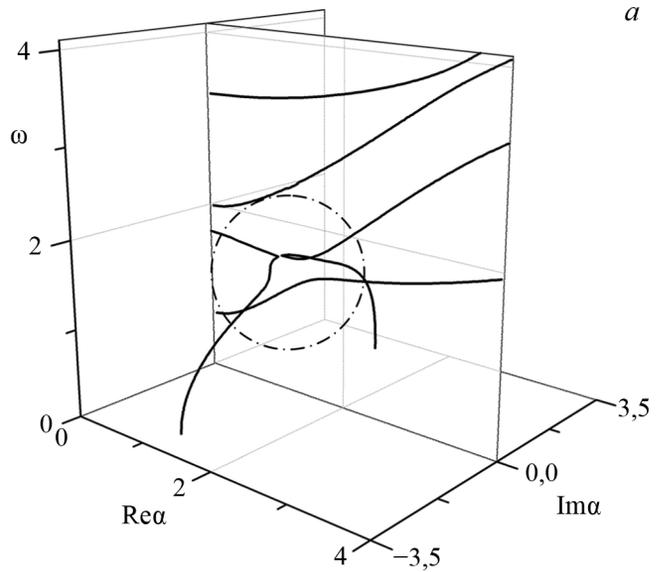


Рис. 1. Кривые полюсов функции  $K_{44}(\alpha, x_3, \omega)$  в трехмерном пространстве (а) и их проекция на вещественную плоскость  $\{\text{Im}\alpha = 0, \omega\}$  (б).

Fig. 1. The curves of the poles of the function  $K_{44}(\alpha, x_3, \omega)$  in three-dimensional space (a) and their projection on the real plane  $\{\text{Im}\alpha = 0, \omega\}$  (b).

ется возможность детально исследовать процессы, протекающие в термоупругом слое и инициированные осциллирующим источником колебаний. В случае потребности расширить спектр воздействия на слой в формуле (10) достаточно изменить вектор нагрузки, включив в его состав компоненты механических составляющих.

Использование формул (10) и (11) эффективно при детальном исследовании спектральных

свойств задачи, определяемых дисперсионным уравнением

$$\det \mathbf{L} = 0, \quad (12)$$

поскольку от них зависит расположение интегрального контура  $\Gamma$  в представлении (10). Как правило, он почти всюду совпадает с вещественной осью и отклоняется от нее лишь при обходе полюсов функции  $K_{ij}$  (11) с отрицательной вещественной частью сверху, а с положительной – снизу. Такое правило обхода полюсов подынтегральной функции определяет единственное решение, удовлетворяющее условиям излучения [34; 35].

Особое место занимает проблема самостоятельного исследования дисперсионных свойств подынтегральной функции задачи для термоупругих сред. Ранее [26; 28] было установлено, что полярное множество символа ядра интегрального оператора задачи для термоупругой среды состоит из двух семейств комплексных полюсов. Первое семейство представляет собой регулярные полюсы с малой мнимой частью. Именно оно определяет расположение контура  $\Gamma$  в интегральном представлении (10), а также структуру поверхностного волнового поля, поскольку незначительность мнимой составляющей обуславливает сравнительно небольшое затухание поверхностных волн. Второе семейство включает комплексные полюсы с большой мнимой частью. Это определяет существенное затухание соответствующих им поверхностных волн. Тем самым это

семейство полюсов слабо влияет на структуру поверхностного волнового поля. Эти свойства определяют специфику краевых задач для термоупругих сред. В то же время в работе остались неисследованными их спектральные свойства, в частности влияние на них коэффициентов, связывающих упругие и тепловые свойства термоупругой среды.

### ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕРМОУПРУГОСТИ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ

Исследование роли термоупругих параметров проводится на примере краевой задачи о колебаниях термоупругого слоя, выполненного из селенида кадмия. Расчеты проведены при следующих значениях параметров [30]:

$$\begin{aligned} T_0 &= 300 \text{ К}, \rho_0 = 5,504 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, c_{11} = 7,41 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{12} &= 4,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{13} &= 3,93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, c_{33} = 8,36 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, c_{44} = \\ &= 1,32 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \beta_{11} &= 0,621 \cdot 10^6 \text{ Н/м/К}, \beta_{33} = 0,551 \cdot 10^6 \text{ Н/м/К}, \\ K_1 &= 9 \text{ Вт/м/К}, K_3 = 9 \text{ Вт/м/К}, c_\varepsilon = 260 \text{ Дж/кг/К}. \end{aligned}$$

Предполагается, что слой находится в нормальных условиях при температуре 300 К, начальные механические напряжения отсутствуют. Колебания в слое индуцируются тепловым потоком  $q_{40} = \text{const}$ , распределенным в области  $[-1, 1]$  на поверхности. Решение задачи описывается скалярным аналогом интегрального представления (10):

$$u_4(x_1, x_3, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_{44}(\alpha, x_3, \omega) \times \\ \times Q_{40}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha.$$

Свойства функции  $u(x_1, x_3, \omega)$  во многом зависят от распределения полюсов, которые определяются уравнением (12). На рисунке 1 представлены рассчитанные в ограниченном частотном диапазоне кривые регулярных – комплексных полюсов функции  $K_{44}(\alpha, x_3, \omega)$  с малой мнимой частью в трехмерном пространстве  $\{\text{Re}\alpha, \text{Im}\alpha, \omega\}$  (рис. 1а) и их проекция на плоскость  $\{\text{Im}\alpha = 0, \omega\}$  (рис. 1б). Из графиков следует, что проекция кривых распределения полюсов на вещественную плоскость  $\{\text{Im}\alpha = 0, \omega\}$  для связной термоупругой задачи идентична распределению полюсов для упругой задачи без учета тепловых эффектов. Обращает на себя внимание вторая мода, представляющая собой сложный объ-

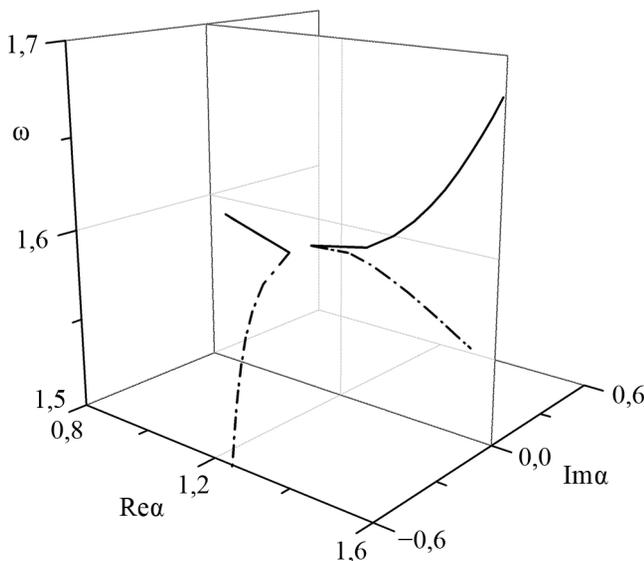


Рис. 2. Окрестность критической частоты – частоты возникновения второй моды.

Fig. 2. The near area of the critical frequency – the frequency of the second mode beginning.

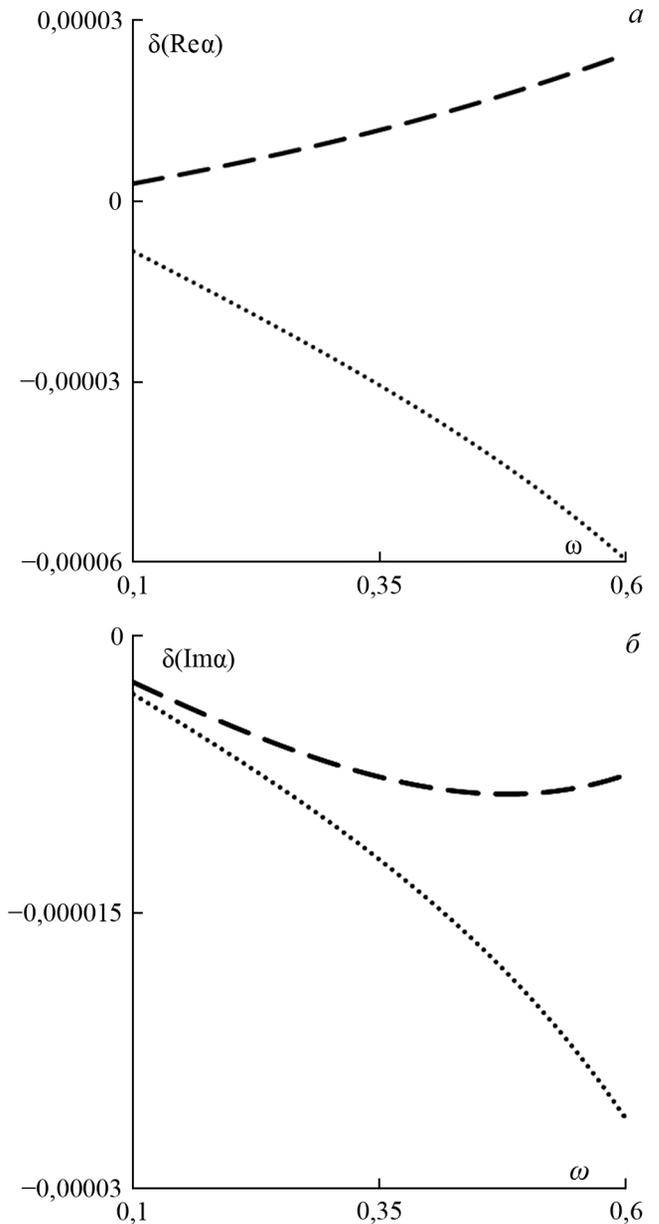
ект. На рисунке 2 приведен фрагмент второй моды (окружность на рисунке 1а) в окрестности критической частоты ее возникновения. Видно, что вторая мода представляет собой две непересекающиеся ветви. На низких частотах обе ветви являются почти мнимыми (комплексными с малой вещественной составляющей). На критической частоте (частота возникновения второй моды) они становятся почти вещественными (комплексными с малой мнимой составляющей). При этом одна ветвь обуславливает появление так называемой обратной волны [34; 35] с отрицательной фазовой скоростью. Она существует в ограниченном диапазоне частот. Вторая ветвь связана с регулярной волной, фазовая скорость которой положительна. Эта волна с момента появления существует в неограниченном диапазоне частот. Влияние коэффициента термоупругости на первое семейство полюсов иллюстрирует рисунок 3, на котором представлены их разности при различных уровнях связности задачи. Как следует из рисунков, связность задачи незначительно влияет на регулярные полюсы с малой мнимой частью.

На рисунке 4а представлены кривые семейства нерегулярных полюсов – комплексных полюсов с большой мнимой частью, – рассчитанные для реального значения коэффициента термоупругости  $\beta_{kk}$ . Данное семейство является основной спецификой термоупругой задачи. Эти полюсы определяют волновое поле в окрестности границы области действия нагрузки. В структуре поверхностного волнового поля вдали от краев они играют незначительную роль в связи с большим затуханием. Кривые на рисунках 4б и 4в рассчитаны для значений коэффициента термоупругости  $0,2 \beta_{kk}$  и  $5 \beta_{kk}$ .

Как следует из рисунков, коэффициент связности существенно влияет на комплексные полюсы. Уменьшение коэффициента приводит к уменьшению количества мод комплексных полюсов, увеличение коэффициента – к увеличению их количества.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

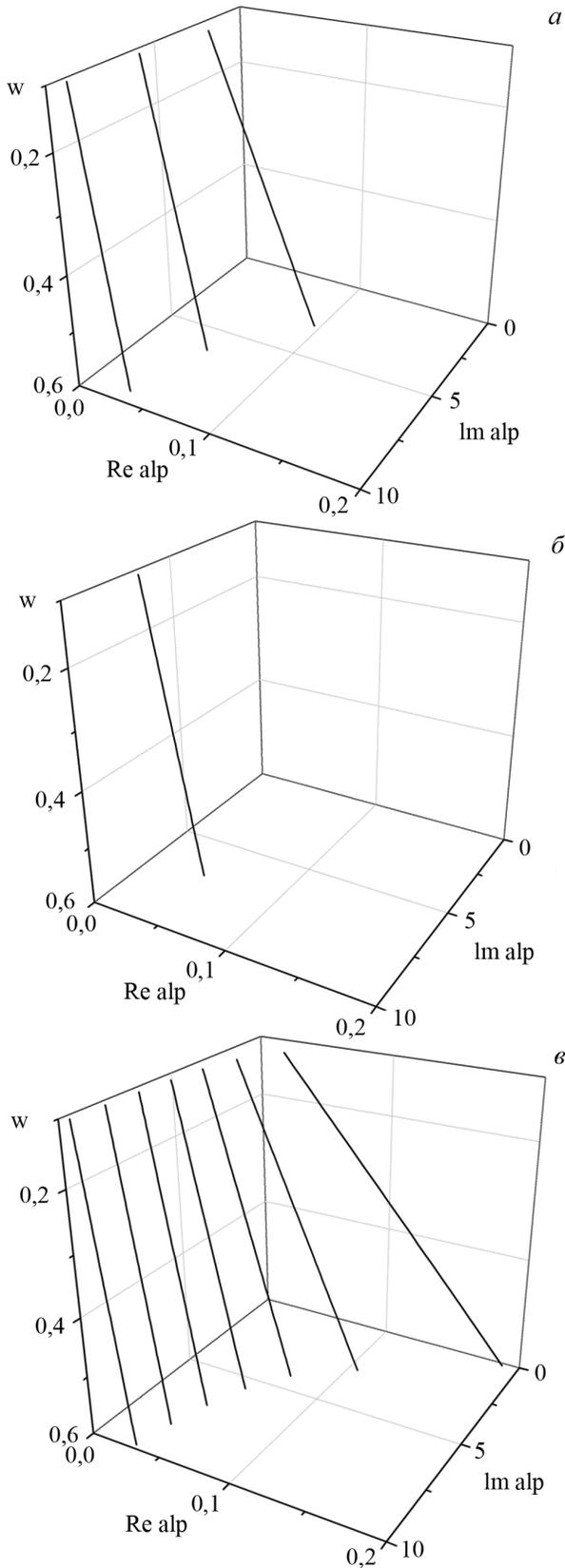
Рассмотрена краевая задача о гармонических колебаниях термоупругого слоя. Методами операционного исчисления задача в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение системы уравнений является основой для построения решения исходной задачи в виде интегрального представления, описывающего движение произвольной точки среды.



**Рис. 3.** Влияние коэффициента связности на регулярные полюсы с малой мнимой частью. Пунктирная линия представляет кривую разности  $\delta(\alpha)^1 = \alpha^{(1)} - \alpha$ , штриховая – разности  $\delta(\alpha)^2 = \alpha^{(2)} - \alpha$ , где  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  и  $\alpha$  – значения полюсов для значений коэффициентов термоупругости  $0,2 \beta_{kk}$ ,  $5 \beta_{kk}$  и  $\beta_{kk}$  соответственно;  $a$  – вещественные части;  $b$  – мнимые части.

**Fig. 3.** The effect of the connection coefficient on regular poles with a small imaginary part. The dotted line represents the difference curve  $\delta(\alpha)^1 = \alpha^{(1)} - \alpha$ , the dashed line is  $\delta(\alpha)^2 = \alpha^{(2)} - \alpha$ , where  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$  and  $\alpha$  are the pole values for the thermoelasticity coefficients  $0.2 \beta_{kk}$ ,  $5 \beta_{kk}$  and  $\beta_{kk}$  respectively;  $a$  – real parts;  $b$  – imaginary parts.

Изучение символа интегрального оператора предоставляет возможность исследовать спектральные свойства исходной краевой задачи. Анализ дисперсионных свойств позволил установить наличие двух полярных семейств. Основную роль в форми-



**Рис. 4.** Влияние коэффициента связности на комплексные полюсы: *a* – реальное значение  $\beta_{kk}$ ; *б* –  $0,2 \beta_{kk}$ ; *в* –  $5 \beta_{kk}$ .  
**Fig. 4.** The effect of the coupling coefficient on the complex poles: *a* – real value  $\beta_{kk}$ ; *б* –  $0,2 \beta_{kk}$ ; *в* –  $5 \beta_{kk}$ .

ровании структуры волнового поля на поверхности слоя играет семейство полюсов с малой мнимой составляющей. Другое полярное семейство представляет собой комплексные полюсы с большой мнимой составляющей. Они играют незначительную роль в формировании поверхностного волнового поля, поскольку соответствующие им волны характеризуются сильным затуханием. Исследование влияния тепловых характеристик материала на дисперсионные свойства задачи показывает, что роль коэффициента термоупругости незначительна в распределении первого семейства полюсов. В то же время воздействие коэффициента термоупругости на второе семейство полюсов является определяющим. От значения коэффициента зависит не только величина комплексных полюсов, но и их количество. В качестве примера исследовано распределение полюсов функции Грина для слоя из селенида кадмия, а также для гипотетического материала на основе селенида кадмия, в котором изменены лишь термоупругие коэффициенты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 19-01-00719, 19-08-01051).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муратиков К.Л. 1998. К теории генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями термоупругим методом. *Письма в журнал технической физики*. 24(13): 82–88.
2. Achenbach J.D. 2003. Laser excitation of surface wave motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 51(11–12): 1885–1902. doi: 10.1016/j.jmps.2003.09.021
3. Xu B., Feng J., Xu G., Wang J., Sun H., Cao G. 2008. Laser-generated thermoelastic acoustic sources and Lamb waves in anisotropic plates. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*. 91(1): 173–179. doi: 10.1007/s00339-007-4354-5
4. Verma K.L., Hasebe N. 2004. On the flexural and extensional thermoelastic waves in orthotropic plates with two thermal relaxation times. *Journal of Applied Mathematics*. 2004(1): 69–83. doi: 10.1155/S1110757X04308041
5. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics*. 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323
6. Kumar R., Kansal T. 2008. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate. *International Journal of Solids and Structures*. 45(22–23): 5890–5913. doi: 10.1016/S0020768308002710
7. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350

8. Singh H., Sharma J.N. 1985. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 77(3): 1046–1053. doi: 10.1121/1.392391
9. Sharma J.N., Sidhu R.S. 1986. On the propagation of plane harmonic waves in anisotropic generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 24(9): 1511–1516. doi: 10.1016/0020-7225(86)90160-6
10. Verma K.L. 2002. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 40(18): 2077–2096. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00030-7
11. El-Maghraby N.M. 2008. A two-dimensional generalized thermoelasticity problem for a half-space under the action of a body force. *Journal of Thermal Stresses*. 31(6): 557–568. doi: 10.1080/01495730801978281
12. Kumar R., Gupta V. 2013. Reflection and transmission of plane waves at the interface of an elastic half-space and a fractional order thermoelastic half-space. *Archive of Applied Mechanics*. 83(8): 1109–1128. doi: 10.1007/s00419-013-0737-6
13. Chiriță S. 2013. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mechanica*. 224(3): 657–674. doi: 10.1007/s00707-012-0776-z
14. Abouelregal A.E. 2011. Rayleigh waves in a thermoelastic solid half space using dual-phase-lag model. *International Journal of Engineering Science*. 49(8): 781–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.03.007
15. Elhagary M. 2013. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mechanica*. 224(12): 3057–3069. doi: 10.1007/s00707-013-0902-6
16. Flavin J.N., Green A.E. 1961. Plane thermo-elastic waves in an initially stressed medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 9(3): 179–190.
17. Волокитин Г.И. 1993. Волны Рэлея в нелинейной начально деформированной среде. *Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки*. 1–2: 19–25.
18. Levi G.Yu., Igumnov L.A. 2015. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*. 23(1): 42–46.
19. Ames K., Straughan B. 1992. Continuous dependence results for initially prestressed thermoelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*. 30(1): 7–13. doi: 10.1016/0020-7225(92)90116-X
20. Singh B. 2010. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Applied Mathematics and Computation*. 217: 705–715. doi: 10.1016/j.amc.2010.06.008
21. Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинин В.В. 2008. Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 4(3): 9–15.
22. Калинин В.В., Леви Г.Ю. 2014. Одна динамическая контактная задача для преднапряженного термоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра*. 10(2): 3–8.
23. Леви Г.Ю., Михайлова И.Б., Ворович Е.И. 2018. Динамическая смешанная задача для слоистого преднапряженного термоупругого полупространства. *Наука Юга России*. 14(1): 11–20. doi: 10.23885/2500-0640-2018-14-1-11-20
24. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2016. Функция Грина для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием. *Прикладная математика и техническая физика*. 57(5): 76–89. doi: 10.15372/PMTF20160509
25. Суворова Г.Ю., Анджинович И.Е., Калинин В.В. 2010. Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 6(4): 18–23.
26. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е. 1999. Динамическая контактная задача для термоупругого слоя. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 4: 109–110.
27. Калинин В.В., Суворова Г.Ю., Белянкова Т.И. 2012. Функция Грина термоупругого предварительно напряженного слоя. *Вестник Южного научного центра*. 8(3): 14–21.
28. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5): 537–546. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013
29. Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermoelectroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 9: 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
30. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*. 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036
31. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2017. К моделированию преднапряженного термоэлектроупругого полупространства с покрытием. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 1: 117–135.
32. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2014. Функция Грина преднапряженного термоэлектроупругого функционально-градиентного слоя. *Вестник Южного научного центра*. 10(4): 5–15.
33. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
34. Ворович И.И., Бабешко В.А. 1979. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М., Наука: 320 с.
35. Бабешко В.А. 1984. *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости*. М., Наука: 256 с.

## REFERENCES

1. Muratkov K.L. 1998. Theory of the thermoelastic generation of mechanical vibrations in internally stressed solids by laser radiation. *Technical Physics Letters*. 24(7): 536–538. doi: 10.1134/1.1262183
2. Achenbach J.D. 2003. Laser excitation of surface wave motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 51(11–12): 1885–1902. doi: 10.1016/j.jmps.2003.09.021
3. Xu B., Feng J., Xu G., Wang J., Sun H., Cao G. 2008. Laser-generated thermoelastic acoustic sources and Lamb waves in anisotropic plates. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*. 91(1): 173–179. doi: 10.1007/s00339-007-4354-5

4. Verma K.L., Hasebe N. 2004. On the flexural and extensional thermoelastic waves in orthotropic plates with two thermal relaxation times. *Journal of Applied Mathematics*. 2004(1): 69–83. doi: 10.1155/S1110757X04308041
5. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics*. 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323
6. Kumar R., Kansal T. 2008. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate. *International Journal of Solids and Structures*. 45(22–23): 5890–5913. doi: 10.1016/S0020768308002710
7. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350
8. Singh H., Sharma J.N. 1985. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 77(3): 1046–1053. doi: 10.1121/1.392391
9. Sharma J.N., Sidhu R.S. 1986. On the propagation of plane harmonic waves in anisotropic generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 24(9): 1511–1516. doi: 10.1016/0020-7225(86)90160-6
10. Verma K.L. 2002. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 40(18): 2077–2096. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00030-7
11. El-Maghraby N.M. 2008. A two-dimensional generalized thermoelasticity problem for a half-space under the action of a body force. *Journal of Thermal Stresses*. 31(6): 557–568. doi: 10.1080/01495730801978281
12. Kumar R., Gupta V. 2013. Reflection and transmission of plane waves at the interface of an elastic half-space and a fractional order thermoelastic half-space. *Archive of Applied Mechanics*. 83(8): 1109–1128. doi: 10.1007/s00419-013-0737-6
13. Chiriță S. 2013. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mechanica*. 224(3): 657–674. doi: 10.1007/s00707-012-0776-z.
14. Abouelregal A.E. 2011. Rayleigh waves in a thermoelastic solid half space using dual-phase-lag model. *International Journal of Engineering Science*. 49(8): 781–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.03.007
15. Elhagary M. 2013. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mechanica*. 224(12): 3057–3069. doi: 10.1007/s00707-013-0902-6
16. Flavin J.N., Green A.E. 1961. Plane thermo-elastic waves in an initially stressed medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 9(3): 179–190.
17. Volokitin G.I. 1993. [Rayleigh waves in a nonlinear initially deformed medium]. *Izvestiya Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey shkoly. Estestvennye nauki*. 1–2: 19–25. (In Russian).
18. Levi G.Yu., Igumnov L.A. 2015. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*. 23(1): 42–46.
19. Ames K., Straughan B. 1992. Continuous dependence results for initially prestressed thermoelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*. 30(1): 7–13. doi: 10.1016/0020-7225(92)90116-X
20. Singh B. 2010. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Applied Mathematics and Computation*. 217: 705–715. doi: 10.1016/j.amc.2010.06.008
21. Sheidakov D.N., Belyankova T.I., Sheidakov N.E., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(3): 9–15. (In Russian).
22. Kalinchuk V.V., Levi G.Yu. 2014. [The dynamic contact problem for prestressed thermoelastic half-space]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 10(2): 3–8. (In Russian).
23. Levi G.Yu., Mikhailova I.B., Vorovich E.I. 2018. [The dynamic mixed problem for a prestressed layered thermoelastic half-space]. *Nauka Yuga Rossii*. 14(1): 11–20. doi: 10.23885/2500-0640-2018-14-1-11-20
24. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Green's function for a prestressed thermoelastic half-space with an inhomogeneous coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5): 828–840. doi: 10.1134/S0021894416050096
25. Suvorova G.Yu., Andjikovich I.E., Kalinchuk V.V. 2010. [Temperature effects in the dynamics of prestressed thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 6(4): 18–23. (In Russian).
26. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 1999. [Dynamic contact problem for thermo-elastic layer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*. 4: 109–110. (In Russian).
27. Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu., Belyankova T.I. 2012. [The Green function of prestressed thermoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 8(3): 14–21. (In Russian).
28. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5): 537–546. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013
29. Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermoelectroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 9: 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
30. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*. 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036
31. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 52(1): 95–110. doi: 10.3103/S0025654417010113
32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2014. [Green's function of a prestressed thermoelectroelastic functionally graded layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 10(4): 5–15. (In Russian).
33. Lurie A.I. 1980. *Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]*. Moscow, Nauka: 512 p. (In Russian).
34. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey. [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]*. Moscow, Nauka: 320 p. (In Russian).
35. Babeshko V.A. 1984. *Obobshchenny metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti. [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity]*. Moscow, Nauka: 256 p. (In Russian).

Поступила 01.02.2019