

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640190301

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

© 2019 г. А.Н. Соловьёв^{1,2}, В.А. Чебаненко³, И.А. Паринов², П.А. Оганесян²

Аннотация. На основе прикладной теории колебаний многослойной пластины, учитывающей нелинейное распределение электрического потенциала в пьезоэлектрических слоях, проведено исследование напряженно-деформированного состояния и электрического поля кантилеверного биморфа. Такая нелинейная зависимость возникает при решении задач о нахождении собственных резонансных частот и форм колебаний или в случае вынужденных колебаний при их механическом возбуждении для некоторых электрических граничных условий. На основе разработанной теории исследовалась плоская задача о гармонических колебаниях трехслойной пластины, внешние слои которой обладают электроупругими свойствами, а внутренний слой – чисто упругий. В задаче были приняты гипотезы Кирхгофа для механических характеристик. Исходя из вариационного принципа и принятой в работе квадратичной зависимости электрического потенциала по толщине пьезослоев, при которой его распределение в середине слоя является неизвестной функцией, была выведена система дифференциальных уравнений и граничных условий. Полученная краевая задача решалась численными методами. На первом этапе были найдены собственные частоты, хорошо согласующиеся с данными конечно-элементного расчета. Дальнейшее исследование электрического состояния при возбуждении пластины в окрестности первого резонанса показало, что наиболее выраженный нелинейный характер электрический потенциал имеет в случае, когда его значения на электродах равны. В ситуации, когда имеется ненулевая разность электрического напряжения на электродах, его распределение по толщине близко линейному, за исключением малой области возле заделки биморфа, где, как показывает конечно-элементный расчет, распределения механических и электрических полей имеет более сложный характер. Сравнение результатов расчета напряженно-деформированного состояния и электрического поля по предложенной прикладной теории с конечно-элементным расчетом в ACELAN продемонстрировало хорошую согласованность в области первых изгибных резонансов. На последнем этапе был проведен сравнительный анализ линейной и нелинейной постановки задачи, результаты которого свидетельствуют о том, что различие в значениях электрического потенциала может достигать 50 %.

Ключевые слова: электроупругость, пластина, изгибные колебания, нелинейность, электрический потенциал.

STUDY OF OSCILLATION OF A BIMORPH PLATE TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEARITY OF THE ELECTRIC POTENTIAL

A.N. Soloviev^{1,2}, V.A. Chebanenko³, I.A. Parinov², P.A. Oganesyanyan²

Abstract. Based on the applied theory of oscillations of a multilayer plate, which takes into account the nonlinear distribution of the electric potential in the piezoelectric layers, a study of the stress-strain state and electric field of the cantilever bimorph was carried out. Such a nonlinear dependence arises when solving

¹ Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

² Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

³ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: valera.chebanenko@yandex.ru

problems of finding the natural resonant frequencies and modes of vibration, or in the case of forced vibrations during their mechanical excitation, for some electrical boundary conditions. Based on the developed theory, the plane problem of harmonic vibrations of a three-layer plate, the outer layers of which have electroelastic properties, and the inner layer is purely elastic, was studied. In the problem, Kirchhoff hypotheses for mechanical characteristics were adopted. Using the variational principle and the quadratic dependence of the electric potential over the thickness of the piezoelectric layers, in which its distribution in the middle of the layer is an unknown function, a system of differential equations and boundary conditions was obtained. The obtained boundary value problem was solved by numerical methods. At the first stage, natural frequencies that are in good agreement with the data of the finite element calculation were obtained. Further investigation of the electric state of the plate under mechanical excitation in the vicinity of the first resonance showed that the electric potential has the most distinct nonlinear character when its values on the electrodes are equal. In a situation where there is a nonzero difference in the voltage across the electrodes, its thickness distribution is nearly linear, with the exception of a small area near the bimorph clamp. As the finite element analysis showed, the distributions of mechanical and electric fields in this area have a more complex character. A comparison of the results of calculating the stress-strain state and electric field according to the proposed applied theory with the finite element calculation in ACELAN showed good agreement in the field of the first bending resonances. At the last stage, a comparative analysis of the linear and nonlinear formulation of the problem was carried out; its results showed that the difference in the values of the electric potential can reach 50 %.

Keywords: electroelasticity, plate, bending vibrations, nonlinearity, electric potential.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что пьезоэлектрические материалы широко применяют в качестве актуаторов, датчиков и генераторов в машиностроительной и аэрокосмической областях для мониторинга состояния конструкций, контроля формы, активного подавления паразитических вибраций, подавления шума и т.д. Такое широкое применение достигается за счет их хороших электромеханических свойств, гибкости в процессе проектирования, простоты производства, а также высокой эффективности преобразования как электрической энергии в механическую, так и в обратную сторону. При использовании пьезоэлектрических материалов в качестве актуаторов деформации можно контролировать за счет изменения величины приложенного электрического потенциала. В свою очередь, принцип работы датчика деформации заключается в измерении наведенного потенциала. В области накопления энергии с помощью пьезоэлектрических материалов происходит преобразование свободной механической энергии, присутствующей в конструкциях, в электрическую и последующее ее преобразование в пригодную для питания маломощных устройств. Подробный обзор приведен в работах [1–3].

Типичные актуаторы, датчики и генераторы, работающие на изгиб, представляют собой конструкцию, состоящую из нескольких слоев с различными механическими и электрическими свойствами. Классическую конструкцию из двух пьезоэлектрических слоев, наклеенных на подложку либо друг

на друга, называют биморфом. Более сложные многослойные конструкции относят к функционально-градиентным материалам.

Для моделирования слоистых конструкций, работающих в качестве датчика, актуатора и генератора, были предложены различные математические модели. Так, в ранних работах [4; 5] были представлены аналитические решения трехмерных уравнений теории электроупругости при статическом цилиндрическом изгибе и свободных колебаниях. Тем не менее вывод и получение аналитических решений подобных уравнений в случае произвольной геометрии представляет собой сложную задачу. Другим подходом является использование моделей с индуцированной деформацией для моделирования отклика актуатора. Подобные модели приведены в работах [6; 7], но там электрический потенциал не рассматривался как переменная, описывающая электрическое состояние, что, в свою очередь, не давало возможности получить связанные электромеханические отклики, а лишь позволяло моделировать отклик актуатора. Конечно-элементные модели были предложены во многих работах [8–12], тем не менее они тоже имеют свои недостатки, например необходимость в больших вычислительных мощностях при использовании трехмерных элементов в задачах, когда толщина одного слоя намного меньше других размеров конструкции.

При моделировании пьезоэлектрических конструкций (актуаторов [13] и пьезоэлектрических генераторов [14]) широко применяют гипотезу о линейном распределении электрического потенци-

ала по толщине. Тем не менее в некоторых материалах с поляризацией по толщине при приложении электрического поля могут возникать сдвиговые деформации и напряжения [12]. Кроме того, они возникают в многослойных пьезоэлектрических композитах [15], в связи с чем учет нелинейности потенциала представляет собой определенный интерес.

В работе [16] рассматривалась сэндвич-модель третьего порядка. Авторами было показано, что подобная модель дает дополнительный вклад в жесткость из-за квадратичной деформации сдвига и кубического члена электрического потенциала. Данный факт был подтвержден более высокими собственными частотами. Ряд работ [17; 18] посвящен разработке связанной уточненной послойной теории для конечно-элементного анализа многослойных функционально градиентных пьезоэлектрических материалов. Авторы использовали как квадратичный, так и кубический электрический потенциал, а также учитывали продольное распределение потенциала. Это позволило учесть сдвиговые напряжения и деформации. Были рассмотрены вынужденные и свободные колебания, показавшие хорошую сходимость с аналитическими решениями и коммерческими конечно-элементными пакетами. Тем не менее не были представлены графики продольного распределения потенциала. В работе [19] была представлена уточненная связанная глобально-локальная теория для конечно-элементного анализа толстых пьезоэлектрических композитов, работающих на сдвиговой моде. Авторы использовали квадратичное распределение потенциала по толщине. Также прикладные теории колебаний многослойных пьезоэлектрических пластин с учетом неоднородного распределения электрического потенциала по толщине конструкции были разработаны в статьях [20; 21]. Ранее нами [22] была представлена прикладная теория, позволяющая моделировать колебания в пьезоэлектрических преобразователях, обладающих неоднородной поляризацией. Неоднородность заключалась в наличии в электроупругом слое областей продольной и поперечной поляризации, а также переходных зон.

Использование нелинейного распределения электрического потенциала наряду с учетом его продольного распределения представляет собой определенный интерес в задачах расчета многослойных актуаторов, так как позволяет более точно моделировать сдвиговые напряжения и деформации, возникающие в подобных конструкциях.

Тем не менее нелинейное поведение электрического потенциала в окрестности резонансов недостаточно изучено. Ранее нами [23] была предложена прикладная теория, учитывающая нелинейность распределения электрического потенциала в продольном и поперечном направлениях, и исследовано напряженно-деформированное и электрическое состояние шарнирно-опертого биморфа. Как оказалось, принятые гипотезы о распределении полей выполнялись во всей области пластины вплоть до краев. В настоящей работе подобные распределения исследуются для кантилеверного биморфа в районе жесткой заделки. В данной работе показано, что в малой области электрическое состояние носит сложный характер, однако это не влияет на интегральные характеристики, такие как собственные частоты и перемещения, что продемонстрировано на основе сравнения с конечно-элементными расчетами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается плоская задача об установившихся изгибных колебаниях пластины, обладающей бесконечной шириной в направлении x_2 . Пластина состоит из трех слоев. Внешние – два одинаковых слоя из пьезоактивного материала, поляризованного в направлении оси x_3 . Между ними находится чисто упругий слой. Считаем, что все рассмотренные функции не зависят от переменной x_2 . Выберем начало координат на срединной плоскости у левого конца пластины.

Пусть пьезоэлектрические слои электродированы с обеих сторон $x_3 = \pm(H/2 + h)$ и $x_3 = \pm H/2$ (жирные линии на рисунке 1). Внешние и внутренние электроды соединены между собой. Колебания пластины возбуждаются распределенной гармонической нагрузкой p_i с круговой частотой ω .

Колебания пластины описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i &= p_i, \\ D_{i,i} &= 0, \end{aligned}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ρ – плотность материала; u_i – компоненты вектора перемещений; D_i – компоненты вектора электрической индукции. Считаем, что боковая поверхность пластины свободна от напряжений: $\sigma_{11} = \sigma_{13} = 0$ при $x_1 = \pm a$. На лицевых поверхностях пластины $x_3 = \pm(H/2 + h)$ нагрузки отсутствуют: $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$. Внешней средой является воздух, поэтому $D_1 = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = L$.

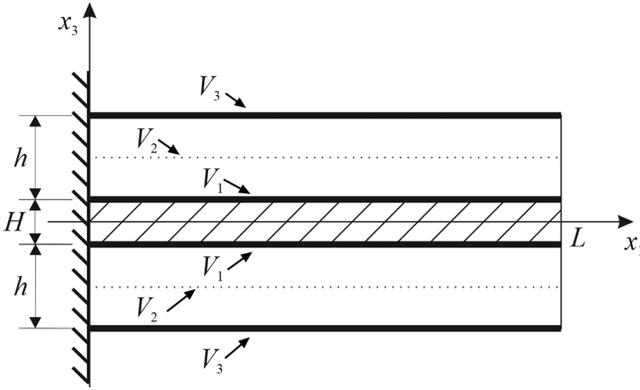


Рис. 1. Исследуемая пластина.

Fig. 1. The plate under study.

В этом случае определяющие соотношения для электроупругой среды, поляризованной в направлении оси x_3 , имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}^E \varepsilon_{11} + c_{13}^E \varepsilon_{33} + e_{31} \varphi_{,3}, \\ \sigma_{33} &= c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{33}^E \varepsilon_{33} + e_{33} \varphi_{,3}, \\ \sigma_{13} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{13} + e_{31} \varphi_{,1}, \\ D_1 &= 2e_{15} \varepsilon_{13} - \varepsilon_{11}^S \varphi_{,1}, \\ D_3 &= e_{31} \varepsilon_{11} + e_{33} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^S \varphi_{,3},\end{aligned}\quad (1)$$

где c_{ij}^E – модули упругости, измеренные при постоянном электрическом поле; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; e_{ij} – пьезоэлектрические постоянные; φ – электрический потенциал; ε_{ij}^S – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянных деформациях.

Для чисто упругого внутреннего слоя определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} &= c_{11} \varepsilon_{11} + c_{13} \varepsilon_{33}, \\ \hat{\sigma}_{33} &= c_{13} \varepsilon_{11} + c_{33} \varepsilon_{33}, \\ \hat{\sigma}_{13} &= 2c_{44} \varepsilon_{13}.\end{aligned}\quad (2)$$

Далее для построения прикладной теории колебаний примем гипотезы Кирхгофа. В соответствии с ними распределение перемещений по толщине имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}u_1(x_1, x_3) &= -x_3 w_1, \\ u_3(x_1, x_3) &= w(x_1),\end{aligned}\quad (3)$$

где $w(x_1)$ – функция прогиба срединной поверхности пластины.

Кроме того, принятые гипотезы предполагают, что нормальное напряжение $\sigma_{33} = 0$ всюду в области

пластины. Пользуясь этим условием, исключим деформацию ε_{33} из определяющих соотношений для электроупругой (1) и упругой (2) сред:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}^* u_{1,1} + e_{31}^* \varphi_{,3}, \\ D_3 &= e_{31}^* u_{1,1} - \varepsilon_{33}^* \varphi_{,3}, \\ \hat{\sigma}_{11} &= \tilde{c}_{11}^* u_{1,1}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_{11}^* &= c_{11}^E - \frac{c_{13}^E{}^2}{c_{33}^E}, \\ e_{31}^* &= e_{31} - \frac{c_{13}^E e_{33}}{c_{33}^E}, \\ \varepsilon_{33}^* &= \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}, \\ \tilde{c}_{11}^* &= c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}.\end{aligned}$$

Выражения для σ_{13} , $\hat{\sigma}_{13}$ и D_1 останутся неизменными.

Будем считать, что электрический потенциал для верхнего пьезоэлектрического слоя имеет следующее распределение:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \tilde{x}_3) &= V_1(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} - 1 \right) + V_2(x_1) \left(1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{h^2} \right) + \\ &+ V_3(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} + 1 \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь для удобства описания введена относительная координата $\tilde{x}_3 = x_3 - (H/2 + h/2)$. В нижнем слое предполагаем аналогичное распределение при $\tilde{x}_3 = x_3 + (H/2 + h/2)$.

Использование электрического потенциала в виде (4) позволяет учитывать электрические граничные условия на $x_3 = \pm(H/2 + h)$ и $x_3 = \pm H/2$, а также значение в середине пьезоактивных слоев $x_3 = \pm(H/2 + h/2)$. В рамках исследуемой задачи будем рассматривать следующий случай:

$$\begin{aligned}V_1(x_1) &= V_1 = \text{const}, \\ V_2(x_1) &= \Phi(x_1), \\ V_3(x_1) &= V_3 = \text{const}.\end{aligned}$$

Здесь $\Phi(x_1)$ – неизвестная функция распределения потенциала в середине пьезоактивного слоя в направлении оси x_1 .

Далее воспользуемся вариационным уравнением для случая установившихся колебаний, обобщающим принцип Гамильтона в теории электроупругости. Для случая плоской деформации при отсутствии поверхностных нагрузок и поверхностных зарядов вариационное уравнение имеет вид:

$$\int_0^L \int_{-h}^h \delta \tilde{H} dx_3 dx_1 - \rho \omega^2 \int_0^L \int_{-h}^h u_i \delta u_i dx_3 dx_1 + \int_0^L \int_{-h}^h p_i \delta u_i dx_3 dx_1 = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{H} = U - E_i D_i$ – электрическая энтальпия, вариация которой равна $\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i$.

С учетом принятых гипотез (3) вариация энтальпии принимает следующий вид:

$$\delta \tilde{H} = \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} - D_1 \delta E_1 - D_3 \delta E_3. \quad (6)$$

Будем считать, что компоненты вектора распределенной нагрузки $\mathbf{p} = \{0, p\}^T$. Проварьируем (6) и подставим в (5). После интегрирования по толщине приравняем коэффициенты при независимых вариациях δw и $\delta \Phi$. Тем самым мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{12} \tilde{c}_{11}^* H^3 + \frac{1}{2} c_{11}^* H^2 h + c_{11}^* H h^2 + \frac{2}{3} c_{11}^* h^3 \right) \frac{d^4 w}{dx_1^4} + \\ & + \left(\frac{1}{12} \rho \omega^2 H^3 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 H^2 h + \rho \omega^2 H h^2 + \frac{2}{3} \rho \omega^2 h^3 \right) \times \\ & \times \frac{d^2 w}{dx_1^2} - \frac{4}{3} e_{31}^* h \frac{d^2 \Phi}{dx_1^2} - (H \omega^2 \rho + 2 h \omega^2 \rho) w - p = 0, \\ & \frac{16}{15} h \vartheta_{11}^S \frac{d^2 \Phi}{dx_1^2} + \frac{4}{3} h e_{31}^* \frac{d^2 w}{dx_1^2} - \frac{32}{3} \frac{\vartheta_{33}^*}{h} \Phi + \frac{16}{3} \frac{\vartheta_{33}^*}{h} V_1 + \\ & + \frac{16}{3} \frac{\vartheta_{33}^*}{h} V_3 = 0. \end{aligned}$$

Приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях во внеинтегральных слагаемых, получим граничные условия:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{12} \tilde{c}_{11}^* H^3 + \frac{1}{2} c_{11}^* H^2 h + c_{11}^* H h^2 + \frac{2}{3} c_{11}^* h^3 \right) \frac{d^3 w}{dx_1^3} + \\ & + \left(\frac{1}{12} \rho \omega^2 H^3 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 H^2 h + \rho \omega^2 H h^2 + \frac{2}{3} \rho \omega^2 h^3 \right) \times \\ & \times \frac{dw}{dx_1} + \frac{4}{3} e_{31}^* h \frac{d\Phi}{dx_1} = 0, \\ & - \left(e_{31}^* H + \frac{5}{3} e_{31}^* h \right) V_3 + \left(e_{31}^* H + \frac{1}{3} e_{31}^* h \right) V_1 + \\ & + \left(\frac{1}{12} \tilde{c}_{11}^* H^3 + \frac{1}{2} c_{11}^* H^2 h + c_{11}^* H h^2 + \frac{2}{3} c_{11}^* h^3 \right) \times \\ & \times \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{4}{3} e_{31}^* h \Phi = 0, \\ & - \frac{16}{15} h \vartheta_{11}^S \frac{d\Phi}{dx_1} = 0. \end{aligned}$$

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С помощью полученной модели исследуем пластину, изготовленную из пьезокерамики PZT-4, жестко заземленную с левого конца в точке 0 и свободную с правого $x_1 = L$. Внутренний слой у нее выполнен из того же материала, но не обладает пьезоактивными свойствами. С учетом вышеизложенного расчеты проведены при следующих значениях параметров: $H = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 0,2$ м, $\rho = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{11}^E = c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{13}^E = c_{13} = 7,43 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{33}^E = c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15} = 12,7$ Кл/м², $e_{31} = -5,2$ Кл/м², $e_{33} = 15,1$ Кл/м², $\vartheta_{11}^S = 64,6 \cdot 10^{-10}$ Ф/м, $\vartheta_{33}^S = 56,2 \cdot 10^{-10}$ Ф/м.

Проведем сравнение результатов предложенной модели с результатами расчетов на основе метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в пакете ACELAN [24].

На первом этапе найдем первые три моды колебаний при условии $V_1 = V_3 = 0$.

Таблица 1. Резонансные частоты исследуемой модели
Table 1. Resonant frequencies of the studied model

Мода Mode	Прикладная теория (Гц) Applied theory (Hz)	МКЭ (Гц) FEM (Hz)	Погрешность (%) Error (%)
Первая / First	168,81	172,58	2,1
Вторая / Second	1057,87	1060,23	2,2
Третья / Third	2962,11	2881,26	2,8

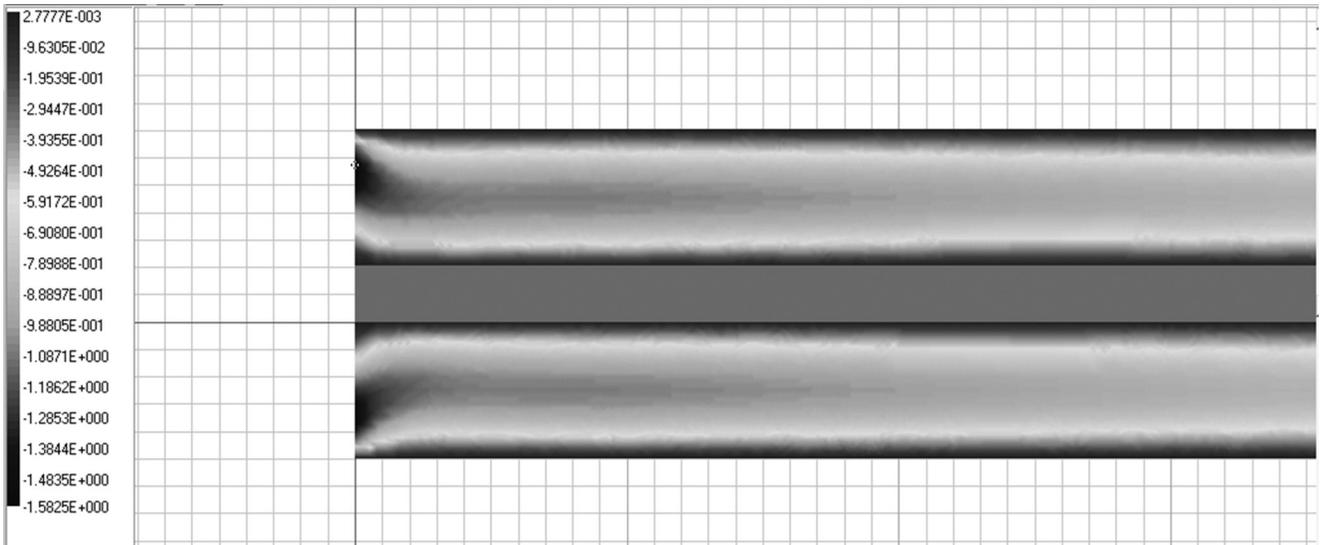


Рис. 2. Распределение электрического потенциала в пластине, полученное в пакете ACELAN.

Fig. 2. The distribution of electric potential in the plate obtained in the ACELAN package.

Сравнение результатов расчета собственных частот, приведенных в таблице 1, показало малый разброс между прикладной теорией и результатами МКЭ.

Далее рассмотрим колебания пластины на частоте 172 Гц при условии $V_1 = V_3 = 0$ и $p = 1$ Н.

Как видно из рисунка 2, распределение электрического потенциала во всей пластине, полученное на основе МКЭ, обладает нелинейным характером как по толщине, так и по длине.

Поскольку колебания пластины происходят вблизи первого резонанса, а затухание не учитывается, то для дальнейших сравнений между прикладной теорией и МКЭ результаты необходимо

пронормировать по максимальным значениям прогиба балки.

Распределение электрического потенциала по длине и толщине верхнего пьезоактивного слоя, представленное на рисунке 3, демонстрирует нелинейный характер. Вблизи точки заземления пластины наблюдается минимум значений электрического потенциала.

Анализ рисунка 4 показывает нелинейный характер распределения электрического потенциала по длине пьезоактивного слоя, а также близость результатов прикладной теории и конечно-элементного анализа. Как можно заметить из результатов конечно-элементного моделирования (рис. 1, 4), в жесткой заделке электрическое состояние имеет более сложную структуру, чем предполагается в прикладной теории, но, как показывают расчеты, этот краевой эффект быстро затухает при удалении от заделки.

Далее рассмотрим случай, когда на внутренних электродах задан электрический потенциал $V_3 = 10$ В, а на внешних электродах потенциал $V_1 = 0$. Возбуждение колебаний происходит путем воздействия $p = 1$ Н с частотой 200 Гц.

В завершение проведем сравнение между линейным и нелинейным способами задания распределения электрического потенциала.

Анализ рисунков 5 и 6 позволяет сделать заключение, что в случае, когда на одном из электродов задан электрический потенциал, отличный от нуля, форма распределения электрического потенциала по толщине близка к линейной, за исключени-

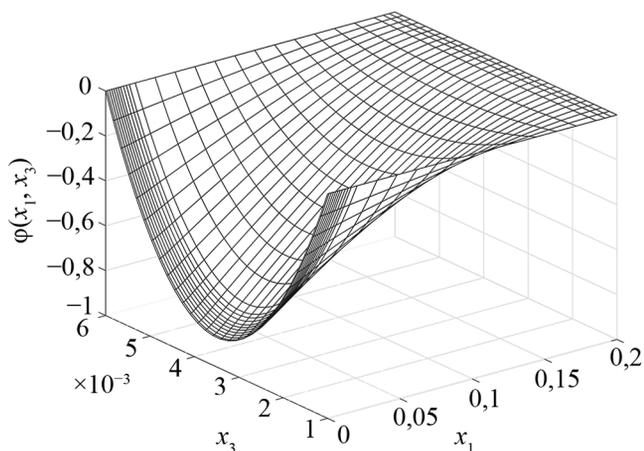


Рис. 3. Распределение электрического потенциала по длине и толщине для верхнего пьезоактивного слоя, полученное на основе прикладной теории.

Fig. 3. Distribution of electric potential along the length and thickness for the upper piezoelectric layer, obtained on the basis of applied theory.

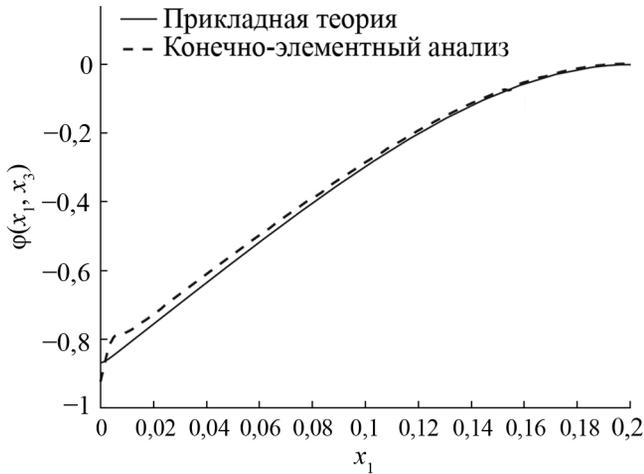


Рис. 4. Распределение электрического потенциала по длине в середине верхнего пьезоактивного слоя, полученное на основе прикладной теории и МКЭ.

Fig. 4. Distribution of electric potential along the length in the middle of the upper piezoelectric layer, obtained on the basis of applied theory and FEM.

ем области вблизи заделки. Однако распределение электрического потенциала по длине пьезокерамического слоя имеет нелинейный характер, причем отличие может составлять до 50 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе прикладной теории колебаний многослойной пластины, учитывающей нелинейное распределение электрического потенциала в пьезо-

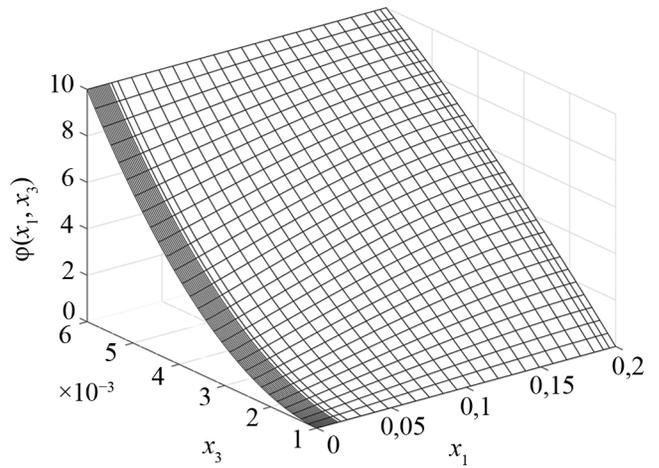


Рис. 5. Распределение электрического потенциала по длине и толщине для верхнего пьезоактивного слоя при $V_1 = 0$ и $V_3 = 10$ В, полученное на основе прикладной теории.

Fig. 5. Distribution of electric potential along the length and thickness for the upper piezoelectric layer at $V_1 = 0$ and $V_3 = 10$ V, obtained on the basis of applied theory.

электрических слоях как в продольном, так и поперечном направлении, проведено исследование напряженно-деформированного состояния и электрического поля кантилеверного биморфа. Такое распределение возникает при решении задач нахождения собственных резонансных частот и форм колебаний или в случае вынужденных колебаний при их механическом возбуждении, когда значения электрического напряжения на электродированных поверхностях равны.

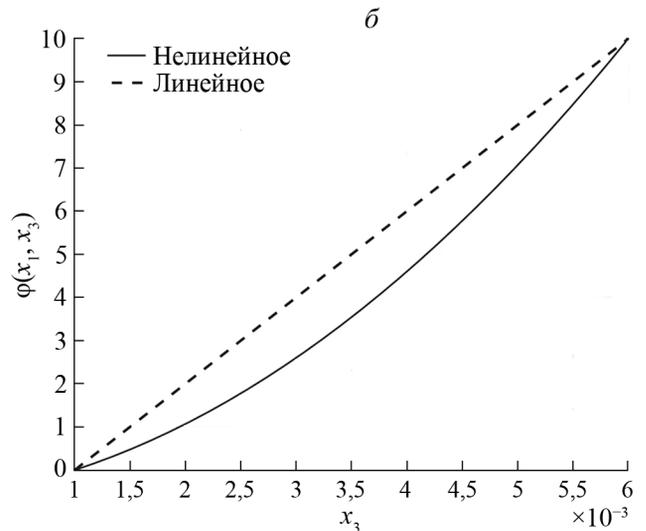
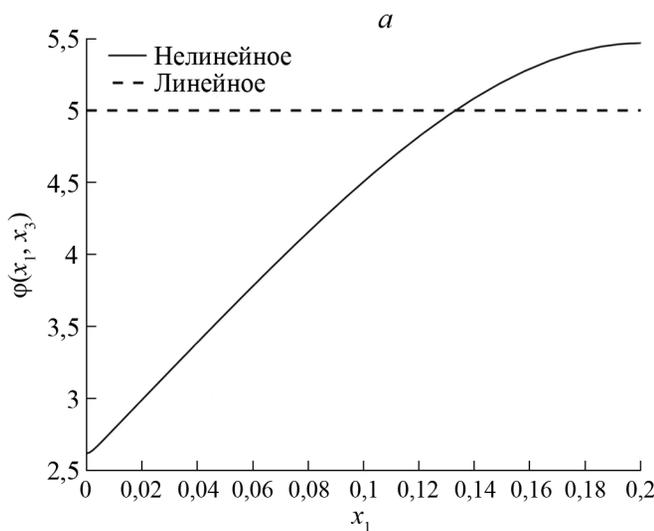


Рис. 6. Сравнение линейного и нелинейного распределения электрического потенциала для верхнего пьезоактивного слоя при $V_1 = 0$ и $V_3 = 10$ В, полученное на основе прикладной теории: *a* – по длине в середине слоя; *б* – по толщине в средней точке пластины.

Fig. 6. Comparison of the linear and nonlinear distribution of the electric potential for the upper piezoelectric layer at $V_1 = 0$ and $V_3 = 10$ V, obtained on the basis of applied theory: *a* – along the length in the middle of the layer; *b* – along the thickness at the midpoint of the plate.

Было показано, что при возбуждении пластины в окрестности первого резонанса наиболее выраженный нелинейный характер электрический потенциал имеет в случае, когда его значения на электродах равны нулю. В ситуации, когда имеется ненулевая разность электрического напряжения на электродах, распределение потенциала близко линейному. Исключение составляет область возле заделки. Результаты конечно-элементного моделирования показали, что распределения механических и электрических полей в этой области имеет более сложный характер. В остальных областях результаты демонстрируют хорошую согласованность. Сравнение линейного и квадратичного способов

задания потенциала показало, что различие в значениях электрического потенциала может достигать 50 %.

Принятое в работе квадратичное распределение электрического потенциала по толщине показало хорошую согласованность результатов с данными конечно-элементного моделирования и может быть использовано для расчета собственных колебаний и установившихся колебаний при заданной разности электрических напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-38-00912 мол_а и 19-08-00365 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

- Chopra I. 2002. Review of state of art of smart structures and integrated systems. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 40(11): 2145–2187. doi: 10.2514/2.1561
- Gaudenzi P. 2009. *Smart structures: physical behavior, mathematical modeling and applications*. New York, Wiley: 175 p.
- Chebanenko V.A., Akopyan V.A., Parinov I.A. 2015. Piezoelectric Generators and Energy Harvesters: Modern State of the Art. In: *Piezoelectrics and Nanomaterials: Fundamentals, Developments and Applications*. New York, Nova Science Publishers: 243–277.
- Heyliger P.R., Brooks S.B. 1995. Exact free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending. *International Journal of Solids and Structures*. 32(20): 2945–2960. doi: 10.1016/0020-7683(94)00270-7
- Ray M.C., Rao K.M., Samanta B. 1993. Exact solution for static analysis of an intelligent structure under cylindrical bending. *Computers & Structures*. 47(6): 1031–1042. doi: 10.1016/0045-7949(93)90307-Y
- Saravanos D.A., Heyliger P.R. 1999. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells. *Applied Mechanics Reviews*. 52(10): 305–320. doi: 10.1115/1.3098918
- Sung C.K., Chen T.F., Chen S.G. 1996. Piezoelectric modal sensor/actuator design for monitoring/generating flexural and torsional vibrations of cylindrical shells. *Journal of Vibration and Acoustics*. 118(1): 48–55. doi: 10.1115/1.2889634
- Kogl M., Bucalem M.L. 2005. Analysis of smart laminates using piezoelectric MITC plate and shell elements. *Computers & Structures*. 83(15–16): 1153–1163. doi: 10.1016/j.compstruc.2004.08.024
- Allik H., Hughes T.J.R. 1970. Finite element method for piezoelectric vibration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2(2): 151–157. doi: 10.1002/nme.1620020202
- Benjeddou A. 2000. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers & Structures*. 76(1–3): 347–363. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00151-0
- Sheikh A.H., Topdar P., Halder S. 2001. An appropriate FE model for through thickness variation of displacement and potential in thin/moderately thick smart laminates. *Composite Structures*. 51(4): 401–409. doi: 10.1016/S0263-8223(00)00156-2
- Benjeddou A., Trindade M.A., Ohayon R.A. 1997. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 8(12): 1012–1025. doi: 10.1177/1045389X9700801202
- Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A. 2018. Mathematical Modelling of Piezoelectric Generators on the Base of the Kantorovich Method. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials, vol. 81*. Singapore, Springer: 227–258. doi: 10.1007/978-981-10-6895-9_11
- Maurini C., Pouget J., dell'Isola F. 2006. Extension of the Euler–Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach. *Computers & Structures*. 84(22–23): 1438–1458. doi: 10.1016/j.compstruc.2006.01.016
- Kapurja S., Kumari P., Nath J.K. 2010. Efficient modeling of smart piezoelectric composite laminates: a review. *Acta Mechanica*. 214(1–2): 31–48. doi: 10.1007/s00707-010-0310-0
- Trindade M.A., Benjeddou A. 2008. Refined sandwich model for the vibration of beams with embedded shear piezoelectric actuators and sensors. *Computers & Structures*. 86(9): 859–869. doi: 10.1016/j.compstruc.2007.05.031
- Lezgy-Nazargah M., Vidal P., Polit O. 2013. An efficient finite element model for static and dynamic analyses of functionally graded piezoelectric beams. *Composite Structures*. 104: 71–84. doi: 10.1016/j.compstruct.2013.04.010
- Beheshti-Aval S.B., Lezgy-Nazargah M. 2013. Coupled refined layerwise theory for dynamic free and forced response of piezoelectric laminated composite and sandwich beams. *Meccanica*. 48(6): 1479–1500. doi: 10.1007/s11012-012-9679-2
- Beheshti-Aval S.B., Shahvaghari Asl S., Lezgy-Nazargah M., Noori M. 2013. A finite element model based on coupled refined high-order global-local theory for static analysis of electromechanical embedded shear-mode piezoelectric sandwich composite beams with various widths. *Thin-Walled Structures*. 72: 139–163. doi: 10.1016/j.tws.2013.06.001

20. Ватульян А.О., Гетман И.П., Лапицкая Н.Б. 1991. Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины. *Прикладная механика*. 27(10): 101–105.
Vatul'yan A.O., Getman I.P., Lapitskaya N.B. 1991. Flexure of a piezoelectric bimorphic plate. *Soviet applied mechanics*. 27(10): 1016–1019. doi: 10.1007/BF00887512
21. Ватульян А.О., Рынкova А.А. 2001. Изгибные колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом. *Прикладная механика и техническая физика*. 42(1): 184–189.
Vatul'yan A.O., Rynkova A.A. 2001. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42(1): 164–168. doi: 10.1023/A:1018837401827
22. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Oganessian P.A., Shih-Fong Chao, Liu Y.-M. 2019. Applied theory for electro-elastic plates with non-homogeneous polarization. *Materials Physics and Mechanics*. 42(2): 242–255. doi: 10.18720/MPM.4222019_11
23. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganessian P.A. 2019. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution. *Materials Physics and Mechanics*. 42(1): 65–73. doi: 10.18720/MPM.4212019_7
24. Nasedkin A.V., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. 2014. New models of coupled active materials for finite element package ACELAN. *AIP Conference Proceedings*. 1637(1): 714–723. doi: 10.1063/1.4904643

Поступила 14.05.2019