

УДК 539.3  
DOI: 10.7868/S25001640190401

## ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

© 2019 г. Д.Н. Шейдаков<sup>1</sup>, И.Б. Михайлова<sup>1</sup>, Н.Е. Шейдаков<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе подробно изучены особенности потери устойчивости нелинейно-упругих тел с поверхностными напряжениями при разных видах простого и комбинированного нагружения. Были рассмотрены круглая плита при радиальном сжатии и прямоугольная плита при двухосном сжатии и растяжении, круговой стержень при осевом сжатии, а также сжатая цилиндрическая труба при внутреннем или внешнем давлении. Для учета влияния поверхностных напряжений использовалась модель Гертена – Мердока. Данная модель с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений в рамках модели Гертена – Мердока может рассматриваться как тензор усилий, действующий в этой мембране. Устойчивость исследована в точной трехмерной постановке статическим методом Эйлера, основанном на решении линеаризованной в окрестности докритического состояния однородной краевой задачи, описывающей нейтральное равновесие тела. В случае полулинейного материала для всех рассмотренных тел были найдены спектры критических значений соответствующих параметров нагружения и построены области устойчивости. На основании анализа полученных результатов установлено, что поверхностные напряжения могут оказывать существенное влияние на потерю устойчивости нелинейно-упругих тел. Характер данного влияния зависит от формы тела и типа деформации и может быть как стабилизирующим, так и негативным. При этом степень влияния поверхностных напряжений на бифуркацию равновесия определяется общим размером (масштабом) тела – она пренебрежимо мала для больших, но весьма существенна для микро- и наноразмерных тел.

**Ключевые слова:** нелинейная упругость, неустойчивость, поверхностные напряжения Гертена – Мердока, плита, стержень, труба.

### INFLUENCE OF SURFACE STRESSES ON BUCKLING OF NONLINEARLY ELASTIC BODIES

D.N. Sheydakov<sup>1</sup>, I.B. Mikhailova<sup>1</sup>, N.E. Sheydakov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the present paper, we studied in detail the buckling features of nonlinearly elastic bodies with surface stresses for different types of simple and combined loading. A circular plate under radial compression and a rectangular plate under biaxial compression and extension, a circular rod under axial compression, and also a compressed cylindrical tube under internal or external pressure were considered. To take into account the influence of surface stresses, the Gurtin-Murdoch model was used. From the mechanical point of view, this model is equivalent to a deformable body with a glued elastic membrane. In this case, the stress resultant tensor acting in the membrane can be interpreted as surface stresses. Stability was investigated in the exact three-dimensional formulation using the static Euler method, based on the solution of a homogeneous boundary-value problem linearized in the vicinity of the subcritical state that describes the neutral equilibrium of the body. In the case of the Harmonic model, for all considered bodies, the spectra of critical values of the corresponding loading parameters were found, and the stability regions were constructed. Based on the analysis of the obtained

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

<sup>2</sup> Ростовский государственный экономический университет (Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69

results, it was found that surface stresses can have a significant influence on the buckling of nonlinearly elastic bodies. The nature of this influence depends on the shape of the body and the type of deformation and can be both stabilizing and negative. The degree of influence of surface stresses on the equilibrium bifurcation is determined by the overall size (scale) of the body – it is negligible for large but very significant for micro- and nanoscale bodies.

**Keywords:** nonlinear elasticity, buckling, surface stresses of Gurtin-Murdoch, plate, rod, tube.

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес с теоретической и прикладной точек зрения, так как исчерпание несущей способности и разрушение строительных и инженерных конструкций достаточно часто наступает именно вследствие потери устойчивости под действием внешних нагрузок. При этом в связи с развитием современных технологий и появлением новых материалов актуальными становятся вопросы анализа устойчивости упругих тел с учетом различных поверхностных явлений [1]. Например, согласно экспериментальным данным, характер деформирования тел при микро- и наноразмерах часто существенно отличается от поведения тел макроразмеров, что может быть объяснено поверхностными эффектами [2]. Кроме того, последние могут играть значительную роль в механике тел, на поверхности которых нанесено сверхтонкое покрытие или произведена некоторая обработка поверхности, изменяющая ее свойства. В последнее время для моделирования поверхностных явлений получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями [3; 4]. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект [5–7].

Целью настоящего исследования является анализ особенностей потери устойчивости различных нелинейно-упругих тел с поверхностными напряжениями. Для учета влияния последних используется модель Гертена – Мердока [8], которая с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор

усилий, действующий в мембране. Ранее было показано, что такая дополнительная поверхностная упругость влияет на эффективные свойства материалов, вызывая, в частности, увеличение жесткости в рамках линейной теории [9–12].

## ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Как показано ранее [13–16], в рамках модели Гертена – Мердока система уравнений статики нелинейно-упругого тела с поверхностными напряжениями при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия в объеме

$$\mathring{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

условий равновесия на части поверхности тела  $\Omega_s$ , где действуют поверхностные напряжения

$$\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \mathring{\nabla}_s \cdot \mathbf{D}_s \right) \Big|_{\Omega_s} = \mathbf{t}, \quad (2)$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{C}_s, \quad \mathbf{P}_s = 2 \frac{\partial W_s(\mathbf{G}_s)}{\partial \mathbf{G}_s},$$

и геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T, & \mathbf{C} &= \mathring{\nabla} \mathbf{R}, \\ \mathbf{G}_s &= \mathbf{C}_s \cdot \mathbf{C}_s^T, & \mathbf{C}_s &= \mathring{\nabla}_s \mathbf{R} \Big|_{\Omega_s}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$  – тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно;  $\mathring{\nabla}$  – трехмерный набла-оператор в лагранжевых координатах;  $\mathring{\nabla}_s$  – поверхностный набла-оператор;  $\mathbf{D}_s$  и  $\mathbf{P}_s$  – тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы и типа Кирхгофа;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела;  $\mathbf{t}$  – вектор поверхностной нагрузки;  $W$  и  $W_s$  – плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации

соответственно;  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{G}_s$  – меры деформации Коши – Грина в объеме и на поверхности;  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{C}_s$  – градиенты деформации;  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор, определяющий положение частиц тела в деформированном состоянии.

С учетом (3) в случае изотропного тела для тензора напряжений Кирхгофа  $\mathbf{P}$  справедливы следующие соотношения [17]:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 \chi_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k, \quad \chi_k = 2 \frac{\partial W(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_k}, \quad (5)$$

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^3 G_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k,$$

где  $G_k, \mathbf{d}_k (k = 1, 2, 3)$  – собственные значения и собственные векторы меры деформации Коши – Грина  $\mathbf{G}$ . В то же время выражение тензора поверхностных напряжений типа Кирхгофа  $\mathbf{P}_s$  имеет вид [18]:

$$\mathbf{P}_s = \kappa_1 \mathbf{I}_s + 2\kappa_2 \mathbf{G}_s, \quad \kappa_\alpha = 2 \frac{\partial W_s(j_1, j_2)}{\partial j_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

$$j_1 = \text{tr} \mathbf{G}_s, \quad j_2 = \text{tr} \mathbf{G}_s^2$$

Здесь  $j_1, j_2$  – инварианты меры поверхностной деформации типа Коши – Грина  $\mathbf{G}_s$ ,  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$  – трехмерный и поверхностный единичные тензоры соответственно.

Пусть задано некоторое начально-деформированное (докритическое) состояние равновесия нелинейно-упругого тела с поверхностными напряжениями, описываемое радиус-вектором  $\mathbf{R}$ . Рассмотрим малое возмущение этого состояния. Будем полагать, что возмущенное состояние равновесия реализуется при тех же самых внешних нагрузках и определяется радиус-вектором  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$ . Здесь  $\eta$  – малый параметр,  $\mathbf{v}$  – вектор добавочных перемещений.

Согласно (1), (3) линейризованные уравнения равновесия в объеме имеют вид [17]:

$$\mathring{\nabla} \cdot \mathbf{D}^\bullet = 0, \quad \mathbf{D}^\bullet = \left[ \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}) \right]_{\eta=0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{C} + \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathring{\nabla} \mathbf{v}. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{D}^\bullet$  и  $\mathbf{P}^\bullet$  – линейризованные тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно. Чтобы найти выражение последнего, проведем линейризацию определяющих соотношений (5) [13–16]:

$$\mathbf{P}^\bullet = \sum_{k=1}^3 (\chi_k^\bullet \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k^\bullet \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^\bullet), \quad (9)$$

$$\mathbf{G}^\bullet = \sum_{k=1}^3 (G_k^\bullet \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k^\bullet \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^\bullet).$$

Учитывая, что векторы  $\mathbf{d}_k$  и  $\mathbf{d}_k^\bullet$  взаимно ортогональны, то есть  $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_k^\bullet = 0$ , из (9) получим ( $k, l, m = 1, 2, 3; k \neq l \neq m$ ):

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{d}_k = \chi_k^\bullet, \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{d}_m = \frac{\chi_k - \chi_m}{G_k - G_m} \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{d}_m,$$

где соотношения для  $\chi_k^\bullet$  имеют вид:

$$\chi_k^\bullet = \sum_{n=1}^3 \chi_{kn} G_n^\bullet, \quad \chi_{kn} = \frac{\partial \chi_k(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_n}, \quad (11)$$

$$G_n^\bullet = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{G}^\bullet \cdot \mathbf{d}_n.$$

Формулы (10), (11) дают представление всех компонент линейризованного тензора напряжений Кирхгофа  $\mathbf{P}^\bullet$  в базисе  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  через компоненты линейризованной меры деформации Коши – Грина  $\mathbf{G}^\bullet$ , а сам тензор  $\mathbf{G}^\bullet$  равен

$$\mathbf{G}^\bullet = \mathring{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^\top + \mathbf{C} \cdot \mathring{\nabla} \mathbf{v}^\top. \quad (12)$$

Согласно (2) линейризованные условия равновесия на части поверхности тела  $\Omega_s$ , где действуют поверхностные напряжения, имеют вид [1; 18]:

$$\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\bullet - \mathring{\nabla}_s \cdot \mathbf{D}_s^\bullet \right) \Big|_{\Omega_s} = \mathbf{t}^\bullet. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{t}^\bullet$  – линейризованный вектор поверхностной нагрузки, а  $\mathbf{D}_s^\bullet$  – линейризованный тензор поверхностных напряжений типа Пиолы, для которого с учетом выражений (3), (6) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{D}_s^\bullet = \mathbf{P}_s^\bullet \cdot \mathbf{C}_s + \mathbf{P}_s^\bullet \cdot \mathring{\nabla}_s \mathbf{v}_s, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_s^\bullet = \kappa_1^\bullet \mathbf{I}_s + 2\kappa_2^\bullet \mathbf{G}_s + 2\kappa_2 \mathbf{G}_s^\bullet,$$

где

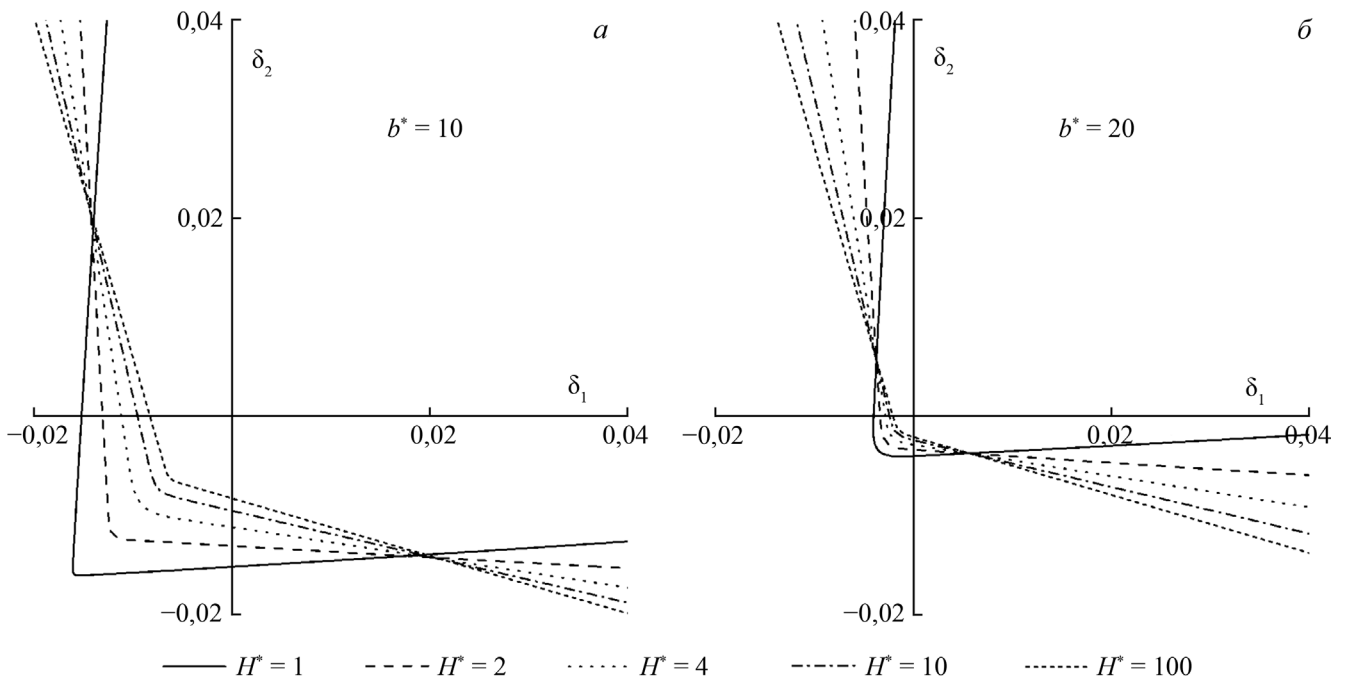
$$\kappa_\alpha^\bullet = \sum_{\beta=1}^2 \kappa_{\alpha\beta} j_\beta^\bullet, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \kappa_\alpha(j_1, j_2)}{\partial j_\beta}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$j_1^\bullet = \text{tr} \mathbf{G}_s^\bullet, \quad j_2^\bullet = 2\text{tr}(\mathbf{G}_s \cdot \mathbf{G}_s^\bullet), \quad (15)$$

$$\mathbf{G}_s^\bullet = \mathring{\nabla}_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{C}_s^\top + \mathbf{C}_s \cdot \mathring{\nabla}_s \mathbf{v}_s^\top, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} \Big|_{\Omega_s}.$$

Здесь  $\mathbf{P}_s^\bullet$  – линейризованный тензор поверхностных напряжений типа Кирхгофа,  $\mathbf{G}_s^\bullet$  – линейризованная мера поверхностной деформации типа Коши – Грина, а  $\mathbf{v}_s$  – вектор добавочных перемещений поверхности  $\Omega_s$ .

Таким образом, исследование устойчивости нелинейно-упругого тела с поверхностными напряжениями в общем случае сводится к решению линейризованных уравнений равновесия (7), (13) в объеме и на поверхности тела с учетом соотношений (4)–(6), (8)–(12), (14), (15).



**Рис. 1.** Влияние общего размера на устойчивость квадратной плиты с поверхностными напряжениями. Толщина недеформированной плиты составляет 10 % (а) и 5 % (б) от ее стороны.

**Fig. 1.** Size effect on the stability of square plate with surface stresses. The thickness of the undeformed plate is 10 % (a) and 5 % (b) of its side.

### КВАДРАТНАЯ ПЛИТА ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ – СЖАТИИ

Рассмотрим квадратную плиту толщиной  $2h$  и со стороной  $b$ . Будем полагать, что на ее верхней  $\Omega_+(x_3 = h)$  и нижней  $\Omega_-(x_3 = -h)$  лицевых поверхностях действуют поверхностные напряжения, то есть  $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$ . В случае двухосного растяжения – сжатия плиты радиус-вектор  $\mathbf{R}$  определяется следующими соотношениями [13]:

$$\mathbf{R} = \lambda_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f(x_3) \mathbf{e}_3, \quad (16)$$

$$0 \leq x_\alpha \leq b, \quad \alpha = 1, 2; |x_3| \leq h,$$

где  $x_1, x_2, x_3$  – декартовы координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты);  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  – ортонормированный векторный базис декартовых координат;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – заданные коэффициенты растяжения – сжатия вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно;  $f(x_3)$  – некоторая функция, характеризующая толщинную деформацию плиты.

Согласно [13] подстановка вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \\ v_1 &= V_1(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \\ v_2 &= V_2(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2, \\ v_3 &= V_3(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2, \\ \gamma_1 &= \pi m_1 / b, \quad \gamma_2 = \pi m_2 / b, \quad m_1, m_2 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

позволяет отделить переменные  $x_1, x_2$  в линеаризованных уравнениях равновесия (7), (13), а также удовлетворить условиям «скользящей заделки» на краях плиты ( $x_1 = 0, b$ ;  $x_2 = 0, b$ ). В результате исследование устойчивости квадратной плиты с поверхностными напряжениями сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для описания упругих свойств плиты в объеме использована модель полулинейного материала [17]:

$$W = \frac{1}{2} \lambda (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + 2\mu (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2), \quad (18)$$

где  $\delta_k = \sqrt{G_k} - 1$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – главные относительные удлинения. При этом плотности поверхностной потенциальной энергии деформации для верхней и нижней лицевых поверхностей  $W_+$  и  $W_-$  полагались квадратичными формами инвариантов  $j_1^\pm, j_2^\pm$  и  $j_1^-, j_2^-$  соответственно [2]:

$$W_\pm = \frac{1}{8} \lambda_\pm (j_1^\pm - 2)^2 + \frac{1}{4} \mu_\pm (j_2^\pm - 2j_1^\pm + 2). \quad (19)$$

В качестве материала плиты рассматривался алюминий [3]:

$$\begin{aligned} \lambda &= 52,05 \text{ ГПа}, \quad \mu = 34,7 \text{ ГПа}, \\ \lambda_\pm &= -3,49 \text{ Па} \cdot \text{м}, \quad \mu_\pm = 6,22 \text{ Па} \cdot \text{м}. \end{aligned} \quad (20)$$

Путем численного решения линеаризованной краевой задачи [13], полученной из уравнений (7), (13) с учетом соотношений (16)–(20), найдены критические кривые в плоскости параметров нагружения, соответствующие различным модам выпучивания квадратной плиты с поверхностными напряжениями. На основании анализа этих кривых построены области устойчивости для плит различных размеров. Следует отметить, что в данной работе не рассматривались очень толстые плиты ( $b^* = b/2h < 5$ ). В результате установлено, что изгибная неустойчивость (прогиб – четная функция  $x_3$ ) возникает при наиболее низких нагрузках.

Рисунок 1 иллюстрирует влияние общего размера (масштаба) квадратной плиты на ее устойчивость. На графиках построены границы областей устойчивости в плоскости параметров нагружения (главные относительные удлинения  $\delta_1$  и  $\delta_2$ ) для плит с различной относительной толщиной  $H^* = 2h\mu / \mu_+$  (размерный параметр при фиксированном отношении стороны к толщине плиты  $b^*$ ). Согласно полученным результатам при двухосном сжатии устойчивость плиты увеличивается с уменьшением ее общего размера (масштаба). Однако если вдоль одной из осей действует растягивающая нагрузка, то плиты меньшего размера, наоборот, оказываются менее устойчивыми. Обнаруженные эффекты обусловлены влиянием поверхностных напряжений. Оно пренебрежимо мало на макроуровне, но весьма существенно для микро- и наноразмерных плит ( $H^* < 50$ ).

### КРУГЛАЯ ПЛИТА ПРИ РАДИАЛЬНОМ СЖАТИИ

Рассмотрим теперь однородную круглую плиту толщиной  $2h$  и радиусом  $r_0$ , на верхней  $\Omega_+(z = h)$  и нижней  $\Omega_-(z = -h)$  лицевых поверхностях которой действуют поверхностные напряжения ( $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ). В случае ее радиального сжатия радиус-вектор  $\mathbf{R}$  определяется следующими соотношениями [16]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= ar\mathbf{e}_r + \gamma z\mathbf{e}_z \\ R &= ar, \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \gamma z, \\ 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |z| \leq h, \end{aligned}$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты);  $R, \Phi, Z$  – эйлеровы цилиндрические координаты;  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  и  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$  – ортонормированные векторные базисы

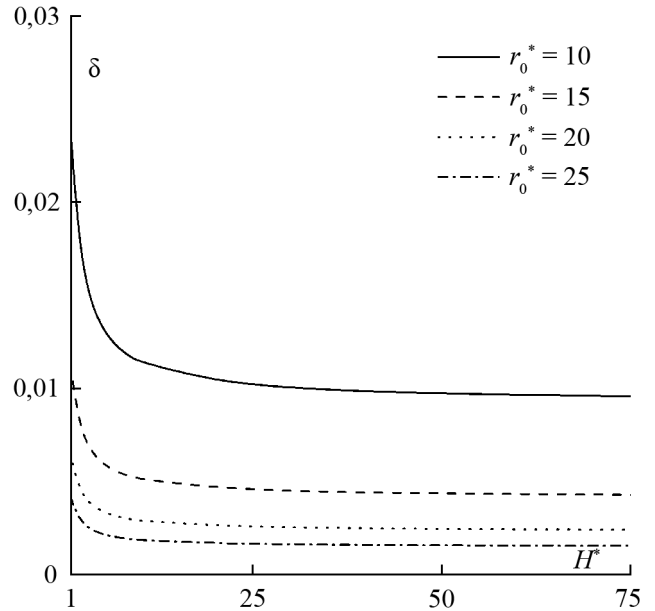


Рис. 2. Влияние общего размера на устойчивость круглой плиты с поверхностными напряжениями.  
Fig. 2. Size effect on the stability of circular plate with surface stresses.

лагранжевых и эйлеровых координат соответственно;  $\alpha$  – заданный коэффициент радиального сжатия;  $\gamma$  – некоторая константа, характеризующая толщину деформации плиты.

При описании упругих свойств круглой плиты, а также всех последующих тел с поверхностными напряжениями, рассматриваемых в рамках данной статьи, вновь будем использовать определяющие соотношения (18)–(20). Для удобства введем следующие безразмерные параметры: относительное радиальное сжатие  $\delta = 1 - \alpha$ , отношение радиуса к толщине  $r_0^* = r_0 / 2h$ , относительная толщина  $H^* = 2h\mu / \mu_+$ .

В случае осесимметричных возмущений [16] ( $J_0, J_1$  – функции Бесселя первого рода)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_R\mathbf{e}_R + v_\Phi\mathbf{e}_\Phi + v_Z\mathbf{e}_Z \\ v_R &= V_R(z)J_1(\beta r), \quad v_\Phi = V_\Phi(z)J_1(\beta r), \\ v_Z &= V_Z(z)J_1(\beta r), \\ \beta &= \zeta_m / r_0, \quad J_1(\zeta_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

переменная  $r$  в линеаризованных уравнениях равновесия (7), (13) отделяется, а на крае плиты ( $r = r_0$ ) удовлетворяются некоторые физически содержательные граничные условия. Путем численного решения полученной в результате линейной однородной краевой задачи найдены спектры критических значений относительного радиального сжатия  $\delta$ ,

соответствующие различным модам выпучивания круглой плиты с поверхностными напряжениями. На основании анализа этих спектров определено критическое радиальное сжатие для плит различных размеров. Следует отметить, что, как и в предыдущем случае, нами не рассматривались очень толстые плиты ( $r_0^* < 5$ ). В результате установлено, что изгибная неустойчивость возникает при наименьших нагрузках, а критическое радиальное сжатие соответствует первой изгибной моде ( $m = 1$ ).

Рисунок 2 иллюстрирует влияние общего размера (масштаба) круглой плиты на ее устойчивость. На графике построены зависимости критического радиального сжатия от относительной толщины  $H^*$  (размерный параметр) для плит с различным отношением радиуса к толщине  $r_0^*$ . Согласно полученным результатам устойчивость плиты возрастает при уменьшении ее общего размера (масштаба), что свидетельствует о стабилизирующем влиянии поверхностных напряжений на рассмотренную деформацию. Как и в предыдущем случае, это влияние весьма значительно при микро- и наноразмерах ( $H^* < 50$ ), но ничтожно в случае больших плит.

### КРУГОВОЙ СТЕРЖЕНЬ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Рассмотрим однородный круговой стержень радиуса  $r_+$  и длины  $l$ . Будем полагать, что на его боко-

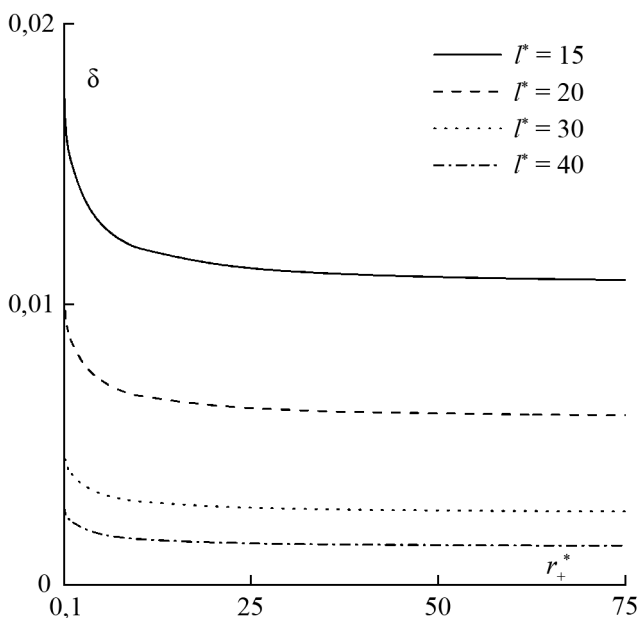


Рис. 3. Влияние общего размера на устойчивость кругового стержня с поверхностными напряжениями.

Fig. 3. Size effect on the stability of circular rod with surface stresses.

вой поверхности  $\Omega_+(r = r_+)$  действуют поверхностные напряжения, то есть  $\Omega_s = \Omega_+$ . В случае осевого сжатия стержня радиус-вектор  $\mathbf{R}$  определяется следующими соотношениями [15]:

$$\mathbf{R} = \gamma r \mathbf{e}_r + \alpha z \mathbf{e}_z$$

$$R = \gamma r, \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z, \quad (21)$$

$$0 \leq r \leq r_+, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l,$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты);  $R, \Phi, Z$  – эйлеровы цилиндрические координаты;  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  и  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$  – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат соответственно;  $\alpha$  – заданный коэффициент сжатия вдоль оси стержня;  $\gamma$  – некоторая константа, характеризующая радиальную деформацию стержня.

Согласно [15] подстановка

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_\Phi \mathbf{e}_\Phi + v_Z \mathbf{e}_Z$$

$$v_R = V_R(r) \cos n \varphi \cos \beta z,$$

$$v_\Phi = V_\Phi(r) \sin n \varphi \cos \beta z, \quad (22)$$

$$v_Z = V_Z(r) \cos n \varphi \sin \beta z,$$

$$\beta = \pi m / l, \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

приводит к отделению переменных  $\varphi$  и  $z$  в линеаризованных уравнениях равновесия (7), (13) и позволяет удовлетворить условиям «скользящей заделки» на торцах стержня ( $z = 0, l$ ). В результате исследование устойчивости кругового стержня с поверхностными напряжениями также сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для удобства введем следующие безразмерные параметры:

- относительное осевое сжатие  $\delta = 1 - \alpha$ ,
- отношение длины к радиусу  $l^* = l / r_+$ ,
- относительный радиус  $r_+^* = r_+ \mu / \mu_+$ .

Путем численного решения линеаризованной краевой задачи [15], полученной из уравнений (7), (13) с учетом соотношений (18)–(22), найдены спектры критических значений относительного осевого сжатия  $\delta$ , соответствующие различным модам выпучивания кругового стержня с поверхностными напряжениями. На основании анализа этих спектров определено критическое осевое сжатие для стержней различных размеров. В настоящей статье изучалась потеря устойчивости достаточно длинных стержней ( $l^* \geq 10$ ). Согласно полученным результатам в этом случае изгибная неустойчивость ( $n = 1$ ) возникает при наименьших нагрузках и критическое осевое сжатие соответствует первой изгибной моде ( $m = 1, n = 1$ ).

Рисунок 3 иллюстрирует влияние общего размера (масштаба) кругового стержня на его устойчивость. На графике построены зависимости критического осевого сжатия от относительного радиуса  $r_+^*$  (размерный параметр) для стержней с различным отношением длины к радиусу  $l^*$ . Согласно полученным результатам поверхностные напряжения оказывают стабилизирующее влияние на рассмотренную деформацию, о чем свидетельствует возрастание величины критического осевого сжатия при уменьшении общего размера (масштаба) стержня. Данное влияние пренебрежимо мало при макроразмерах, но весьма существенно для микро- и наноразмерных стержней ( $r_+^* < 50$ ).

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ТРУБА  
ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНЕШНЕМ  
ИЛИ ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ**

В завершение рассмотрим цилиндрическую трубу с внешним радиусом  $r_+$ , внутренним радиусом  $r_-$  и длиной  $l$ , на внешней  $\Omega_+(r = r_+)$  и внутренней  $\Omega_-(r = r_-)$  поверхностях которой действуют поверхностные напряжения ( $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ). В случае осевого сжатия трубы при внешнем  $p_+$  или внутреннем  $p_-$  гидростатическом давлении радиус-вектор  $\mathbf{R}$  определяется следующими соотношениями [14]:

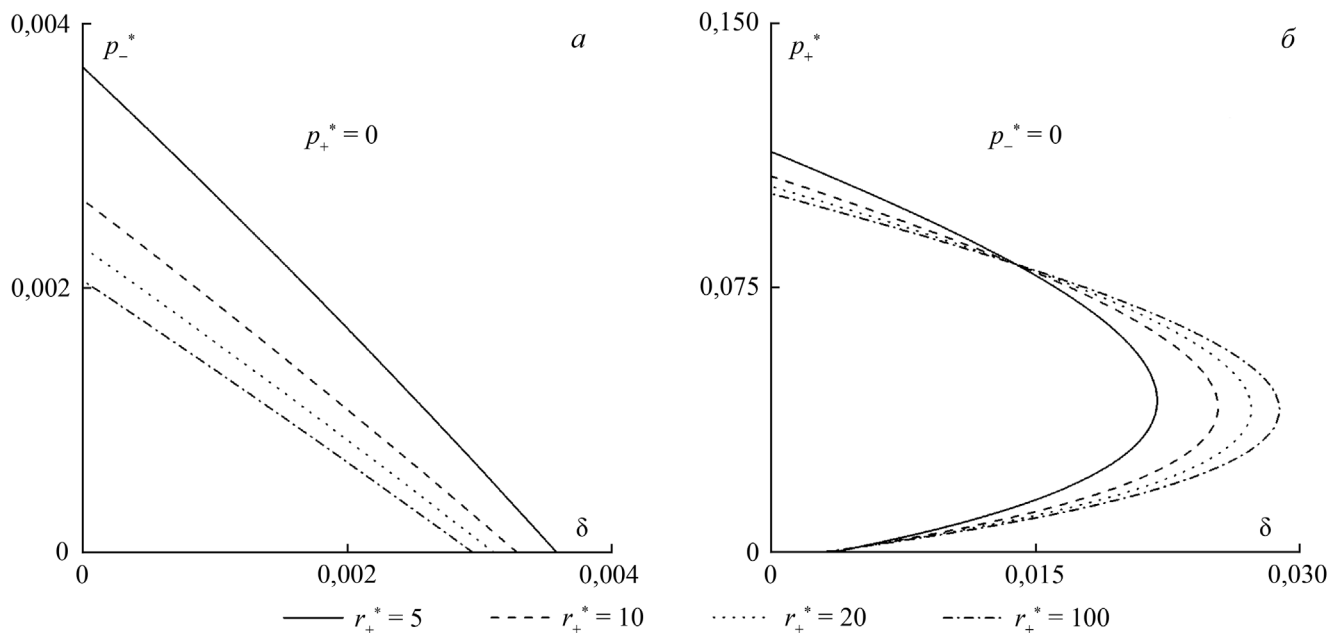
$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= f(r)\mathbf{e}_R + \alpha z\mathbf{e}_Z, \\ R &= f(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z, \\ r_- \leq r \leq r_+, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l, \end{aligned}$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты);  $R, \Phi, Z$  – эйлеровы цилиндрические координаты;  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  и  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$  – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат соответственно;  $\alpha$  – заданный коэффициент сжатия вдоль оси трубы;  $f(r)$  – некоторая функция, характеризующая радиальную деформацию трубы.

Для удобства введем следующие безразмерные параметры:

- относительное осевое сжатие  $\delta = 1 - \alpha$ ,
- отношение длины к радиусу  $l^* = l / r_+$ ,
- относительная толщина стенки  $h^* = (r_+ - r_-) / r_+$ ,
- относительный радиус  $r_+^* = r_+ \mu / \mu_+$ ,
- относительное внешнее давление  $p_+^* = p_+ / \mu$ ,
- относительное внутренне давление  $p_-^* = p_- / \mu$ .

Как и в случае кругового стержня, подстановка (22) позволяет свести анализ устойчивости цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений [14]. В результате численных расчетов найдены критические кривые в плоскостях параметров нагружения, соответствующие различным модам выпучивания. На основании анализа этих кривых построены области устойчивости для цилиндрических труб различных размеров. В настоящей статье рассматривались длинные трубы ( $l^* = 40$ ). Согласно полученным результатам



**Рис. 4.** Влияние общего размера на устойчивость цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями. Случаи внутреннего (а) и внешнего (б) давления.  
**Fig. 4.** Size effect on the stability of cylindrical tube with surface stresses. Cases of internal (a) and external (б) pressure.

в этом случае изгибная неустойчивость ( $n = 1$ ) возникает при наименьших нагрузках и граница области устойчивости совпадает с критической кривой для первой изгибной моды ( $m = 1, n = 1$ ).

Рисунок 4 иллюстрирует влияние общего размера (масштаба) цилиндрической трубы на ее устойчивость. На графиках построены границы областей устойчивости в плоскостях соответствующих параметров нагружения (относительное осевое сжатие  $\delta$  и относительное внутреннее  $p_-^*$  или внешнее  $p_+^*$  давление) для труб с различным относительным радиусом  $r_+^*$  (размерный параметр при фиксированном отношении длины к радиусу  $l^*$  и фиксированной относительной толщине стенки трубы  $h^*$ ). Согласно полученным результатам при внутреннем давлении ( $p_+^* = 0$ ) поверхностные напряжения стабилизируют деформацию осевого сжатия (устойчивость трубы увеличивается с уменьшением ее общего размера). Однако в случае внешнего давления ( $p_-^* = 0$ ) ситуация сложнее. При очень малом, а также при большом внешнем давлении влияние поверхностных напряжений на устойчивость сжатой трубы остается положительным. В то же время существует определенный диапазон значений внешнего давления, в котором поверхностные напряжения дестабилизируют деформацию осевого сжатия. Границы данного диа-

пазона почти не зависят от общего размера трубы и определяются упругими свойствами материала в объеме и на поверхности, а также геометрическими пропорциями трубы. Как и ранее, обнаруженные эффекты наиболее выражены при микро- и наноразмерах ( $r_+^* < 50$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели Герттина – Мердока подробно изучено влияние поверхностных напряжений на потерю устойчивости различных нелинейно-упругих тел при простом и комбинированном нагружении. Установлено, что характер данного влияния зависит от формы тела и типа деформации и может быть как стабилизирующим, так и негативным. При этом степень влияния поверхностных напряжений на бифуркацию равновесия определяется общим размером (масштабом) тела – она пренебрежимо мала для больших, но весьма существенна для микро- и наноразмерных тел.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (гранты 19-01-00719-а, 19-48-230042-р\_а) и в рамках реализации государственного задания ЮНЦ РАН, номер государственной регистрации 01201354242.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145. doi: 10.1023/A:1007448209058
- Altenbach H., Morozov N.F. (Eds.). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p. doi: 10.1007/978-3-642-35783-1
- Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2009. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics*. Vol. 42. San Diego, Elsevier: 1–68. doi: 10.1016/S0065-2156(08)00001-X
- Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Sinica*. 24(1): 52–82. doi: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8
- Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301
- Cuenot S., Frétygn C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev B*. 69(16): 165410-1–65410-5. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410
- Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363. doi: 10.1098/rspa.2005.1637
- Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
- Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. 2011. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses. *ZAMM*. 91(9): 699–710. doi: 10.1002/zamm.201000214
- Eremeyev V.A. 2016. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mech.* 227(1): 29–42. doi: 10.1007/s00707-015-1427-y
- Guo J.G., Zhao Y.P. 2005. The size-dependent elastic properties of nanofilms with surface effects. *J. Appl. Phys.* 98(7): 074306–074311. doi: 10.1063/1.2071453
- Wang Z.Q., Zhao Y.P., Huang Z.P. 2010. The effects of surface tension on the elastic properties of nano structures. *Int. J. Eng. Sci.* 48(2): 140–150. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.07.007
- Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. 2016. Бифуркация равновесия нелинейно-упругих прямоугольных плит с поверхностными напряжениями. *Наука Юга России*. 12(4): 3–9.
- Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. 2017. Устойчивость нелинейно-упругой цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями. *Наука Юга России*. 13(3): 3–9. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-3-9
- Sheyidakov D.N. 2018. Effect of surface stresses on stability of elastic circular cylinder. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 87. *Advances in Mechanics of Microstructured Media and*



- Structures*. Cham, Springer: 343–355. doi: 10.1007/978-3-319-73694-5\_18
16. Sheydakov D.N. 2019. Buckling of elastic circular plate with surface stresses. In: *Advanced Structured Materials. Vol. 110. Recent Developments in the Theory of Shells*. Cham, Springer: 577–590. doi: 10.1007/978-3-030-17747-8\_29
  17. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
  18. Еремеев В.А., Zubov L.M. 2008. *Механика упругих оболочек*. М., Наука: 280 с.
  8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
  9. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P. 2011. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses. *ZAMM*. 91(9): 699–710. doi: 10.1002/zamm.201000214
  10. Eremeyev V.A. 2016. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mech.* 227(1): 29–42. doi: 10.1007/s00707-015-1427-y
  11. Guo J.G., Zhao Y.P. 2005. The size-dependent elastic properties of nanofilms with surface effects. *J. Appl. Phys.* 98(7): 074306–074311. doi: 10.1063/1.2071453
  12. Wang Z.Q., Zhao Y.P., Huang Z.P. 2010. The effects of surface tension on the elastic properties of nano structures. *Int. J. Eng. Sci.* 48(2): 140–150. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.07.007
  13. Sheydakov D.N., Mikhailova I.B. 2016. [Equilibrium bifurcation of nonlinearly elastic rectangular plates with surface stresses]. *Nauka Yuga Rossii*. 12(4): 3–9. (In Russian).
  14. Sheydakov D.N., Mikhailova I.B. 2017. [Stability of nonlinearly elastic cylindrical tube with surface stresses]. *Nauka Yuga Rossii*. 13(3): 3–9. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-3-9 (In Russian).
  15. Sheydakov D.N. 2018. Effect of surface stresses on stability of elastic circular cylinder. In: *Advanced Structured Materials. Vol. 87. Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures*. Cham, Springer: 343–355. doi: 10.1007/978-3-319-73694-5\_18
  16. Sheydakov D.N. 2019. Buckling of elastic circular plate with surface stresses. In: *Advanced Structured Materials. Vol. 110. Recent Developments in the Theory of Shells*. Cham, Springer: 577–590. doi: 10.1007/978-3-030-17747-8\_29
  17. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
  18. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2008. *Mekhanika uprugikh obolochek*. [Mechanics of elastic shells]. Moscow, Nauka: 280 p. (In Russian).

## REFERENCES

Поступила 28.08.2019