

УДК 539.3  
DOI: 10.7868/S25000640200202

## ТОРСИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЙ ТРУБЫ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

© 2020 г. В.А. Лыжов<sup>1</sup>, О.В. Бочарова<sup>1</sup>, И.Б. Михайлова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Исследована краевая задача о гармонических торсионных колебаниях полого упругого цилиндра, стенка которого выполнена из функционально градиентного материала. Представленная в статье математическая модель допускает произвольную зависимость материальных параметров от радиуса цилиндра, в частности, рассмотрены линейный, квадратичный, бикубический, обратно-пропорциональный, обратно-квадратичный законы. Функции изменения плотности и модуля сдвига материала стенки цилиндра могут отличаться друг от друга. Исследовано влияние различных видов изменения параметров стенки цилиндра на дисперсионные свойства и фазовые скорости первой и второй моды поверхностных волн. Проведено сравнение результатов, полученных для функционально-градиентных цилиндров, с результатами, полученными для однородного цилиндра с мягким или жестким покрытием. Анализ дисперсионных свойств и фазовых скоростей первой и второй мод поверхностных волн показал, что в случае жесткого покрытия фазовая скорость моды неоднородного цилиндра выше скорости соответствующей моды однородного цилиндра. Соответственно, в случае податливого покрытия скорость моды неоднородного цилиндра меньше скорости соответствующей моды однородного цилиндра. Эта закономерность одинаково проявляется как для различных видов функционально градиентных цилиндров, так и для однородного цилиндра с покрытием. Исследования показали, что интенсивность изменения скорости зависит от степени различия значений материальных параметров покрытия и основания или от вида функциональных зависимостей. Изменение скорости более всего выражено для акустически неоднородных тел. В случае акустически однородного цилиндра фазовая скорость каждой моды либо совпадает с соответствующей скоростью для однородного цилиндра, либо отличается от нее несущественно.

**Ключевые слова:** упругий цилиндр, покрытие, торсионные колебания, фазовая скорость, дисперсионные характеристики.

### TORSION WAVES ON THE SURFACE OF A HOLLOW PIPE WITH INHOMOGENEOUS COATING

V.A. Lyzhov<sup>1</sup>, O.V. Bocharova<sup>1</sup>, I.B. Michailova<sup>1</sup>

**Abstract.** The boundary-value problem of harmonic torsion vibrations of a hollow elastic cylinder, the wall of which is made of a functionally gradient material, is investigated. The mathematical model presented in the article allows an arbitrary dependence of material parameters on the radius of the cylinder, in particular, linear, quadratic, bicubic, inversely proportional, inverse quadratic laws are considered. It should be noted that the functions of changing the density and shear modulus of the material of the cylinder wall may differ from each other. The effect of various types of changes in the cylinder wall parameters on the dispersion properties and phase velocities of the first and second modes of surface waves is investigated. The results obtained for functionally gradient cylinders are compared with the results obtained for a homogeneous cylinder with a soft or hard coating. An analysis of the dispersion properties and phase velocities of the first and second modes of surface waves showed that, in the case of hard coating, the phase velocity of the mode of an inhomogeneous cylinder is higher than the velocity of the corresponding mode of a homogeneous one. Accordingly, in the case of a compliant coating, the mode velocity of an inhomogeneous cylinder is less than the velocity of the

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: maggod-rnd@yandex.ru

corresponding mode of a homogeneous one. This regularity is equally manifested both for various types of functionally gradient cylinders and for a uniform coated cylinder. Research has shown, that the rate of change of speed depends on the degree of difference in the values of the material parameters of the coating and the base or on the type of functional dependencies. The change of velocity is most pronounced for acoustically inhomogeneous bodies. In the case of an acoustically homogeneous cylinder, the phase velocity of each mode either coincides with the corresponding velocity for a homogeneous cylinder or differs insignificantly from it.

**Keywords:** elastic cylinder, coating, torsion oscillations, phase velocity, dispersion characteristics.

## ВВЕДЕНИЕ

Распространению акустических волн в цилиндрических телах, выполненных из функционально градиентных материалов (ФГМ), уделяется значительное внимание в литературе [1–4]. Это связано с возможностью существенного улучшения физико-механических и акустических свойств цилиндрических объектов за счет использования функционально ориентированных материалов. Однако исследование краевых задач для объектов в случае произвольной зависимости материальных параметров от радиуса связано с определенными трудностями. При рассмотрении подобных задач авторы применяют различные подходы. Метод конечных элементов применен в работе [1] для изучения смещений, напряжений при распространении волн в толстом полом коротком цилиндре, выполненном из ФГМ. В статье [2] рассмотрено распространение и отражение термоупругих волн в толстых ФГМ-цилиндрах. В качестве инструмента исследования предложен гибридный бессеточный метод, основанный на конечно-разностных методах. Локальный бессеточный метод Петрова – Галёркина для анализа распространения тепловых и упругих волн в толстом полом ФГМ-цилиндре использован в статье [3]. В работе [4] авторы предложили новый подход для изучения распространения волн в полом цилиндре, изготовленном из неоднородных композиционных материалов. Уравнения движения решаются путем разложения компонент вектора смещения с использованием полиномов Лежандра и тригонометрических функций. Построены дисперсионные кривые волн для продольной, крутильной и изгибной мод, получены механические смещения и напряжения. Неоднородность параметров в стенке цилиндра может быть обусловлена наличием напряженного состояния или действием внешних полей различной физической природы. В работах [5; 6] использована линеаризованная теория распространения осесимметричных волн для исследования динамических процессов в двух- и трехслойных полых цилиндрах с неоднородными начальными напряжениями.

Динамические свойства трубы, заполненной находящейся под большим давлением сжимаемой жидкостью, исследованы в статьях [7; 8]. Выявлены особенности структуры поверхностного волнового поля как при наличии, так и в отсутствие жидкости. Особенности волнового поля на поверхности и реакция среды на радиальное воздействие бандажа для цилиндров с многослойной стенкой исследованы в работах [9; 10]. В статье [11] был предложен эффективный подход для исследования различных сред с переменными по глубине свойствами. В рамках метода определены особенности распределения контактных напряжений и динамической жесткости для различных видов функционально градиентных цилиндров [12] и цилиндров с неоднородными включениями [13]. В данной работе рассматриваются колебания упругого неоднородного полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. При этом каких-либо ограничений на вид зависимости материальных параметров материала от радиуса не накладывается. Для исследования применен гибридный метод, основанный на численно-аналитическом восстановлении функции Грина. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании акустических волноводов, определении безопасных условий эксплуатации труб и валов, в области неразрушающего контроля для оценки свойств новых структурно неоднородных материалов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассмотрение вводится цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ . Рассмотрены торсионные колебания кругового бесконечного цилиндра, ось которого совпадает с осью  $z$ , удовлетворяющие условиям:

$$u_r = u_z = 0, u_\varphi = u_\varphi(r, z), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = 0,$$

здесь  $u_r, u_z, u_\varphi$  – радиальная, осевая и тангенциальная компоненты вектора перемещений соот-

ветственно. Уравнение движения установившихся гармонических колебаний в случае, когда материальные параметры являются функциями радиуса, имеет вид:

$$\frac{\partial \theta_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\theta_{r\varphi} + \theta_{\varphi r}}{r} + \frac{\partial \theta_{\varphi z}}{\partial z} = -\rho(r)\omega^2 u_{\varphi}, \quad (1)$$

где компоненты тензора напряжений  $\Theta$  определяются выражениями:

$$\theta_{r\varphi} = \theta_{\varphi r} = \mu(r) \left( \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right),$$

$$\theta_{\varphi z} = \mu(r) \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z}.$$

На поверхности в некоторой области  $-a \leq z \leq a$  задана тангенциальная внешняя нагрузка, вне области и на внутренней поверхности механические напряжения отсутствуют. Граничные условия определяются следующими выражениями:

$$r = R_0: \theta_{r\varphi} = \begin{cases} q(R_0, z)e^{-i\omega t}, & -a \leq z \leq a, \\ 0, & |z| > a, \end{cases} \quad (2)$$

$$r = R_1: \theta_{r\varphi} = 0, \quad -\infty \leq z \leq \infty.$$

С учетом функциональной зависимости материальных параметров, в покомпонентном представлении уравнение движения (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mu \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{\varphi} + \\ + \mu' \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u_{\varphi} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для последующих исследований вводятся новые переменные:

$$\begin{aligned} Y_1 &= U'_{\varphi}, \\ Y_2 &= U_{\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом переменных (4) уравнение движения (3) может быть представлено в виде системы уравнений:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, r)\mathbf{Y}, \quad (5)$$

где элементы матрицы  $\mathbf{M}$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\mu}{r} + \mu' \right), \\ m_{12} &= \frac{1}{\mu r} \left( \frac{\mu}{r} + \mu' \right) + \sigma_2^2, \end{aligned}$$

$$m_{21} = 1, \quad m_{22} = 0,$$

$$\sigma_2^2 = \alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Общее решение системы (5) представляется в виде:

$$Y_j = \sum_{i=1}^2 c_i y_{ij}(r), \quad j=1, 2, \quad (6)$$

где  $y_{ij}$  – линейно-независимые решения системы (5) с граничными условиями:

$$y_{ij}(R_1) = \delta_{ij}.$$

При использовании представления (6) и граничных условий (2) система для определения коэффициентов  $c_i(\alpha) (i=1, 2)$  принимает вид:

$$\mathbf{LC} = \mathbf{Q}^*. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{C} = \uparrow \{c_1, c_2\}$  – вектор коэффициентов;  $\mathbf{Q}^* = \uparrow \{Q_{\varphi}, 0\}$  – правая часть; матрица  $\mathbf{L}$  определяется выражениями:

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_{11}(R_0) & l_{12}(R_0) \\ l_{11}(R_1) & l_{12}(R_1) \end{Bmatrix},$$

$$l_{11}(r) = \mu(r)y_{11} - \frac{\mu(r)y_{21}}{r},$$

$$l_{12}(r) = \mu(r)y_{12} - \frac{\mu(r)y_{22}}{r}.$$

После применения обратного преобразования Фурье получаем интегральное представление общего решения для исходной краевой задачи:

$$u_{\varphi}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{11} Q_{\varphi}(\alpha) e^{iaz} d\alpha. \quad (8)$$

Здесь символ ядра  $K_{11}$  строится численно:

$$K_{11} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{i=1}^2 \Delta_{i1} y_{1i},$$

где  $\Delta_0$  и  $\Delta_{i1}$  – определитель и алгебраические дополнения элементов матрицы  $\mathbf{L}$ .

Однозначное решение краевой задачи будет существовать при удовлетворении дисперсионного уравнения:

$$\begin{vmatrix} l_{11}(R_0) & l_{12}(R_0) \\ l_{11}(R_1) & l_{12}(R_1) \end{vmatrix} = 0.$$

## ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проведены расчеты дисперсионных диаграмм и фазовых скоростей для первых двух мод торсион-

ных колебаний функционально градиентного цилиндра. В исследовании рассмотрены следующие законы изменения материальных параметров (нумерация соответствует обозначениям на рисунке 1):

1. Однородный цилиндр:

$$f(r) = \text{const} = 1.$$

2. Бикубический закон:

$$f(r) = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \right)^6.$$

3. Квадратичный закон:

$$f(r) = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \right)^2.$$

4. Линейный закон:

$$f(r) = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \right).$$

5. Обратная зависимость:

$$f(r) = \frac{1}{3 - 2 \cdot \left( \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \right)}.$$

6. Обратная биквадратная зависимость:

$$f(r) = \frac{1}{3 - 2 \cdot \left( \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \right)^4}.$$

7. Однородный цилиндр:

$$f(r) = \text{const} = 0,33.$$

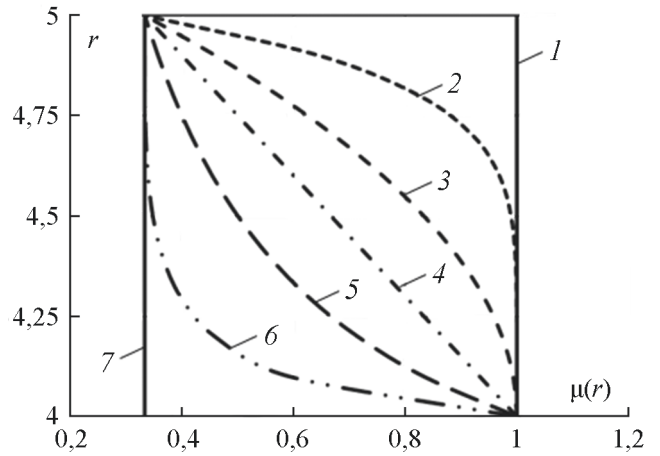


Рис. 1. Законы изменения модуля сдвига по радиусу для функционально градиентного цилиндра.

Fig. 1. The shear module functions of radius for a functionally gradient cylinder.

На рисунке 2 приведены зависимости фазовых скоростей первой и второй моды функционально градиентного цилиндра. Внутренний радиус  $R_1 = 4$ , внешний радиус  $R_0 = 5$ . Модуль сдвига изменяется в соответствии с указанными выше законами 1–7. Плотность не зависит от радиуса и является константой:  $\rho = 1$ .

Функционально градиентный цилиндр будем называть акустически однородным, когда плотность изменяется по такому же закону, что и модуль сдвига:

$$\mu(r) = \rho(r) = f(r).$$

В случае акустически однородного цилиндра фазовые скорости численно совпадают со скоро-

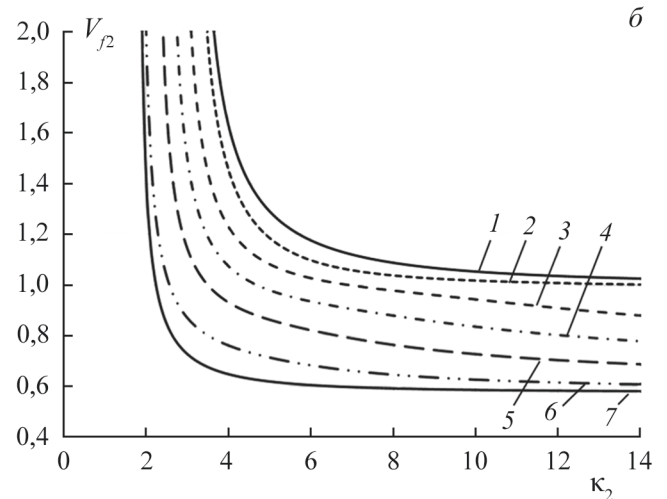
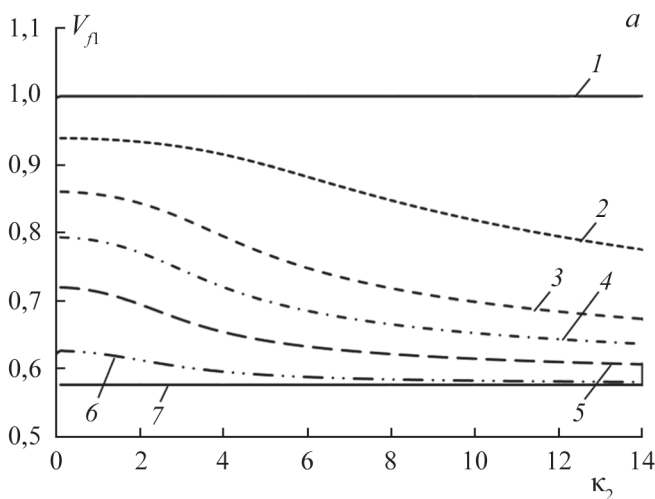
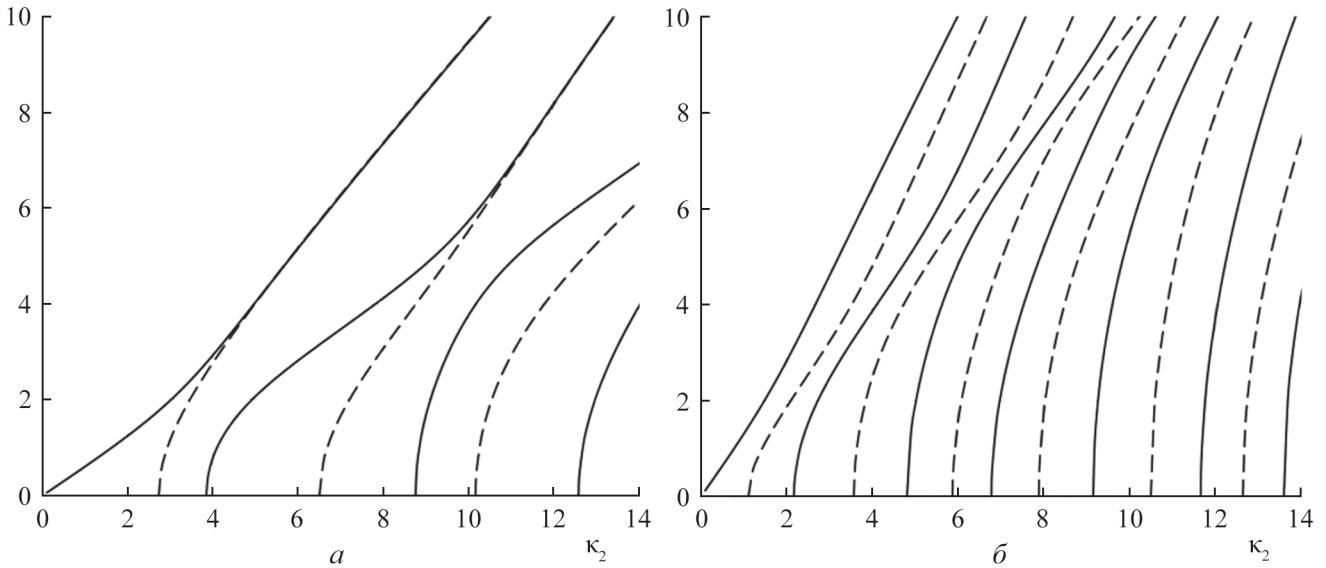


Рис. 2. Фазовые скорости поверхностных волн для первой (а) и второй моды (б) функционально градиентного цилиндра. Цифрами обозначены кривые, соответствующие различным законам изменения материальных параметров.

Fig. 2. The phase velocities of surface waves for the first (a) and second modes (b) of a functionally gradient cylinder. The numbers indicate the curves corresponding to various laws of material parameters.



**Рис. 3.** Кривые нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) определителя  $\Delta_0$ : *a* – однородный цилиндр, жесткое покрытие,  $\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 4\mu_1$ ; *б* – однородный цилиндр, мягкое покрытие,  $\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 0,33\mu_1$ .  
**Fig. 3.** Curves of zeros (dashed lines) and poles (solid lines) of the determinant  $\Delta_0$ : *a* – homogeneous cylinder, hard coating,  $\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 4\mu_1$ ; *б* – homogeneous cylinder, soft coating,  $\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 0.33\mu_1$ .

стями соответствующей моды однородного цилиндра  $\mu(r) = \rho(r) = \text{const} = 1$ . Утверждение справедливо для любой из обозначенных выше зависимостей 1–7, что проявляется наложением графика фазовой скорости на кривую, обозначенную номером 1 на рисунке 2.

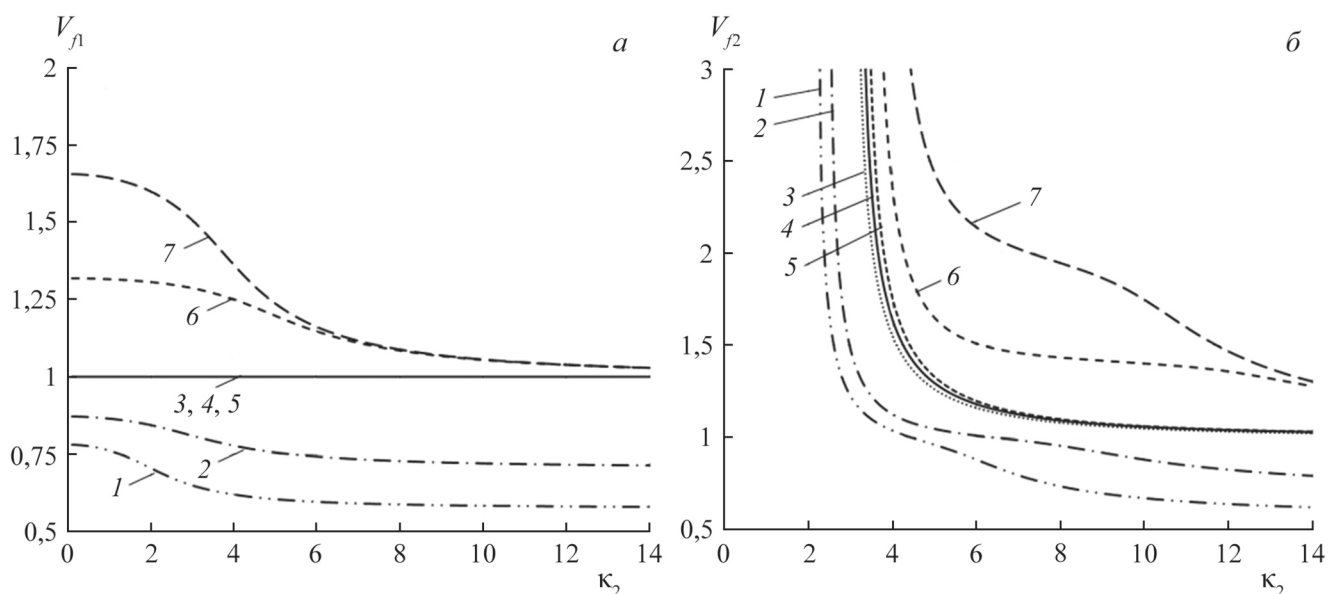
Для верификации результатов выполнены расчеты дисперсионных диаграмм и фазовых скоростей торсионных волн для однородного цилиндра с покрытием. Модель представляет собой два вложенных полых однородных цилиндра, материальные параметры в каждом слое постоянны и не зависят от радиуса. Внутренний

цилиндр  $4,0 \leq r \leq 4,5, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty$ , внешний  $4,5 \leq r \leq 5,0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty$ . Поля смещений и напряжений на границе раздела  $r=4,5$  непрерывны. Граничные условия на поверхности совпадают с условиями (2) для функционально градиентного цилиндра. Соотношения между материальными параметрами цилиндра и покрытия приведены в таблице 1. Рассмотрены случаи цилиндра с мягким покрытием (1–3), однородный цилиндр (4), цилиндр с жестким покрытием (5–7).

Дисперсионные диаграммы для цилиндра с мягким и жестким покрытием приведены на рисунке 3 – распределение нулей и полюсов определителя  $\Delta_0$  в зависимости от безразмерной частоты  $\kappa_2$ . Чередование нулей и полюсов гарантирует единственность решения (8) краевой задачи. Как видно из рисунка 3*a*, для цилиндра с жестким покрытием (табл. 1, строка 7) нули накладываются на полюса начиная с некоторой характерной для каждой моды частоты. Это свидетельствует о быстром затухании колебаний моды в области выше этой характерной частоты. Для цилиндра с мягким покрытием (табл. 1, строка 1; рис. 3*б*) такое поведение нулей не наблюдается. В случае акустически однородного цилиндра с мягким и жестким покрытием (табл. 1, строки 3 и 5 соответственно) дисперсионные диаграммы совпадают с таковой для однородного цилиндра (табл. 1, строка 4).

**Таблица 1.** Соотношения между материальными параметрами цилиндра и покрытия  
**Table 1.** Relations between the material constants of the cylinder and the coating

Номер случая Case number	Соотношение параметров цилиндра и покрытия / Relation between cylinder and coating parameters
1	$\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 0,33\mu_1$
2	$\rho_2 = 0,66\rho_1, \mu_2 = 0,33\mu_1$
3	$\rho_2 = 0,33\rho_1, \mu_2 = 0,33\mu_1$
4	$\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = \mu_1$
5	$\rho_2 = 4\rho_1, \mu_2 = 4\mu_1$
6	$\rho_2 = 2\rho_1, \mu_2 = 4\mu_1$
7	$\rho_2 = \rho_1, \mu_2 = 4\mu_1$



**Рис. 4.** Фазовые скорости поверхностных волн для первой (а) и второй моды (б) однородного цилиндра с покрытием. Цифрами обозначены кривые, соответствующие различным соотношениям параметров цилиндра и покрытия (см. табл. 1).

**Fig. 4.** The phase velocities of surface waves for the first (a) and second modes (б) of a coated cylinder. The numbers indicate the curves corresponding to different ratios of cylinder and coating parameters (see Table 1).

На рисунке 4 приведены зависимости фазовых скоростей первой и второй моды от безразмерной частоты  $\kappa_2$  для однородного цилиндра с покрытием.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены торсионные колебания неоднородного полого цилиндра, стенка которого выполнена из функционально градиентного материала. Для конкретных видов функциональной зависимости исследовано распределение нулей и полюсов, а также фазовые скорости поверхностных волн. По результатам исследования можно сформулировать следующие закономерности:

– В случае жесткого покрытия фазовая скорость моды выше скорости соответствующей моды однородного цилиндра. Соответственно, в случае мягкого покрытия скорость моды оказывается меньше. Закономерность одинаково проявляется как для

различных видов функционально градиентных цилиндров, так и для однородного цилиндра с покрытием.

– Интенсивность изменения скорости зависит от разницы значений материальных параметров  $\rho$  и  $\mu$  или функциональных зависимостей  $\rho(r)$  и  $\mu(r)$ . Изменение скорости более всего выражено для акустически неоднородных сред и покрытий.

– В случае акустически однородного цилиндра –  $\rho = \mu$  или  $\rho(r) = \mu(r)$  – фазовая скорость моды совпадает с соответствующей скоростью для однородного цилиндра или отличается от нее несущественно.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Южного научного центра Российской академии наук, № госрегистрации 01201354242, и при частичной поддержке РФФИ (проекты 19-48-230042\_p\_a, 18-38-00871\_мол\_a).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Asemi K., Akhlaghi M., Salehi M. 2012. Dynamic analysis of thick short length FGM cylinders. *Meccanica*. 47(6): 1441–1453. doi: 10.1007/s11012-011-9527-9
2. Shariyat M. 2012. Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 65(1): 24–37. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2012.09.001
3. Hosseini S.M., Sladek J., Sladek V. 2011. Meshless local Petrov-Galerkin method for coupled thermoelasticity analysis of a functionally graded thick hollow cylinder. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 35(6): 827–835. doi: 10.1016/j.enganabound.2011.02.001
4. Elmaimouni L., Lefebvre J.-E., Ratolojanahary F.E., Gryba T. 2014. Acoustic wave propagation in functionally graded materials cylindrically: Polynomial approach. In: *2014 Second World Conference on Complex Systems (WCCS) (Agadir, Morocco, 10–12 November 2014)*. IEEE: 440–445. doi: 10.1109/ICoCS.2014.7061006

5. Akbarov S.D., Kepceler T., Mert Egilmeza M. 2011. Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*. 330(18–19): 4519–4537. doi: 10.1016/j.jsv.2011.04.009
6. Akbarov S.D., Bagirov E.T. 2019. Axisymmetric longitudinal wave dispersion in a bi-layered circular cylinder with inhomogeneous initial stresses. *Journal of Sound and Vibration*. 450: 1–27. doi: 10.1016/j.jsv.2019.03.003
7. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2009. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы. *Прикладная математика и механика*. 73(2): 289–302.
8. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинин В.В. 2009. Тorsионные колебания преднапряженного цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 3: 11–17.
9. Белянкова Т.И., Богомолов А.С., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности волнового поля на поверхности полой цилиндрической трубы с покрытием. *Вестник Южного научного центра*. 11(1): 16–23.
10. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности динамики трехслойного полого цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 4: 19–32.
11. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2004. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. S: 44–47.
12. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинин В.В. 2008. Динамическая контактная задача о крутильных колебаниях жесткого бандаж на поверхности полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. *Вестник Южного научного центра*. 4(4): 9–14.
13. Лыжов В.А., Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2017. О возможности возникновения резонансов при торсионных колебаниях неоднородного цилиндра. *Наука Юга России*. 13(4): 4–14. doi: 10.23885/2500-0640-2017-3-4-4-14
3. Hosseini S.M., Sladek J., Sladek V. 2011. Meshless local Petrov-Galerkin method for coupled thermoelasticity analysis of a functionally graded thick hollow cylinder. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 35(6): 827–835. doi: 10.1016/j.enganabound.2011.02.001
4. Elmaimouni L., Lefebvre J.-E., Ratolojanahary F.E., Gryba T. 2014. Acoustic wave propagation in functionally graded materials cylindrically: Polynomial approach. In: *2014 Second World Conference on Complex Systems (WCCS) (Agadir, Morocco, 10–12 November 2014)*. IEEE: 440–445. doi: 10.1109/ICoCS.2014.7061006
5. Akbarov S.D., Kepcelera T., Mert Egilmeza M. 2011. Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*. 330(18–19): 4519–4537. doi: 10.1016/j.jsv.2011.04.009
6. Akbarov S.D., Bagirov E.T. 2019. Axisymmetric longitudinal wave dispersion in a bi-layered circular cylinder with inhomogeneous initial stresses. *Journal of Sound and Vibration*. 450: 1–27. doi: 10.1016/j.jsv.2019.03.003
7. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2009. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(2): 209–219. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.04.011
8. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2009. [Torsion oscillations of a stressed cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 3: 11–17. (In Russian).
9. Belyankova T.I., Bogomolov A.S., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Specific features of wave field on the surface of a hollow cylindrical tube with a coating]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 11(1): 16–23. (In Russian).
10. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Features of dynamics of three-layer hollow cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 4: 19–32. (In Russian).
11. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2004. [On the dynamics of a medium with continuously varying depth properties]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*. S: 44–47. (In Russian).
12. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamic contact problem for torsion oscillations of rigid bandage on surface of hollow cylinder made of functionally graded material]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(4): 9–14. (In Russian).
13. Lyzhov V.A., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. [On the possibility of resonances occurrence for torsional oscillations of a inhomogeneous cylinder]. *Nauka Yuga Rossii*. 13(4): 4–14. (In Russian). doi: 10.23885/2500-0640-2017-3-4-4-14

## REFERENCES

1. Asemi K., Akhlaghi M., Salehi M. 2012. Dynamic analysis of thick short length FGM cylinders. *Meccanica*. 47(6): 1441–1453. doi: 10.1007/s11012-011-9527-9
2. Shariyat M. 2012. Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 65(1): 24–37. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2012.09.001

Поступила 20.02.2020