

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640210401

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО МАТЕРИАЛА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2021 г. А.Н. Соловьёв^{1,2}, Б.Т. До^{1,3}, В.А. Чебаненко⁴, В.Б. Васильев¹

Аннотация. Работа посвящена исследованию поперечных колебаний биморфа, состоящего из двух пьезомагнитоэлектрических слоев, находящегося в переменном магнитном поле. Пьезомагнитоэлектрические слои представляют собой многослойный композит с чередующимися пьезоэлектрическими и пьезомагнитными слоями. Механические и физические свойства такого композита задаются эффективными константами, известными из литературы. На основе прикладной теории колебаний многослойной пластины, учитывающей нелинейное распределение электрического и магнитного потенциала в пьезоактивных слоях как в продольном, так и поперечном направлении, проведено исследование напряженно деформированного состояния, электрического и магнитного поля шарнирно опертого биморфа. Электрический потенциал принят равным нулю на всех электродах, в то время как магнитный равен нулю на внутренней границе и неизвестен на внешних. Поэтому распределение электрического и магнитного потенциалов в середине слоя принимается неизвестными функциями, а в случае магнитного потенциала распределение на внешней границе также является функцией, которую следует найти. В задаче были приняты гипотезы Кирхгофа для механических характеристик. С использованием вариационного принципа и принятой в работе квадратичной зависимости электрического и магнитного потенциалов по толщине пьезоактивных слоев была получена система дифференциальных уравнений и граничных условий. Полученная краевая задача решалась численными методами.

Сравнение результатов расчета по предложенной теории с плоской задачей, решенной в конечно-элементном пакете FlexPDE, в низкочастотной области показало, что погрешность в нахождении характеристик механического и магнитного полей составляет менее 1 %. В свою очередь при определении электрического поля разница составила порядка 5 % в средней части пластины и 27 % в окрестности точек опоры. Такая погрешность связана с тем, что конечно-элементный анализ демонстрирует явный нелинейный характер распределения электрического поля, в то время как прикладная теория – линейный.

Ключевые слова: пьезоэлектрики, пьезомагнетики, устройство сбора энергии, электроупругость, изгибные колебания.

A STUDY OF VIBRATIONS OF A BIMORPHOUS PLATE FROM PIEZOELECTROMAGNETIC MATERIAL IN AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD

A.N. Soloviev^{1,2}, B.T. Do^{1,3}, V.A. Chebanenko⁴, V.B. Vasiliev¹

Abstract. This work presents a study of transverse vibrations of a bimorph consisting of two piezomagnetolectric layers located in an alternating magnetic field. Piezomagnetolectric layers are a multilayer composite with alternating piezoelectric and piezomagnetic layers. The mechanical and physical

¹ Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

² Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105

³ Технический университет им. Ле Куи Дона (Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam), Вьетнам, 100000, г. Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, 236

⁴ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: valera.chebanenko@yandex.ru

properties of such a composite are specified by effective constants known in the literature. Based on the applied theory of oscillations of a multilayer plate, taking into account the nonlinear distribution of the electric and magnetic potential in the piezoactive layers both in the longitudinal and transverse directions, a study of the stress-strain state, electric and magnetic fields of a hinged bimorph was carried out. The electric potential is assumed to be zero at all electrodes, while the magnetic potential is equal to zero at the inner boundary and is unknown at the outer ones. Thus, the distribution of the electric and magnetic potentials in the middle of the layer is assumed to be unknown functions, and the distribution of the magnetic potential at the outer boundary is also a function to be found. In this task, Kirchhoff's hypotheses for mechanical characteristics were applied. The variational principle and the quadratic dependence of the electric and magnetic potentials on the thickness of the piezoactive layers is also used in this work. A system of differential equations and boundary conditions was obtained. The resulting boundary value problem was solved by numerical methods.

Comparison of the calculation results according to the proposed theory with the flat problem solved in the finite element package FlexPDE in the low-frequency region showed that the error in finding the characteristics of the mechanical and magnetic fields is less than 1 %. In turn, when determining the electric field, the difference was about 5% in the middle part of the plate and 27 % in the vicinity of the support points. This error is due to the fact that the finite element analysis demonstrates a clear nonlinear character of the electric field distribution, while the applied theory is linear.

Keywords: piezoelectrics, piezomagnetics, energy harvesting device, electroelasticity, bending vibrations.

ВВЕДЕНИЕ

При производстве сенсорных и измерительных систем, современных малогабаритных бытовых приборов, сотовых телефонов и беспроводных сенсорных систем для мониторинга и диагностики технического состояния различных объектов и прочих устройств применение мощных источников энергии не требуется, однако мобильность и энергонезависимость вышеперечисленных устройств являются обязательными условиями.

Известно, что пьезоэлектрические материалы широко используются в качестве актуаторов, датчиков и генераторов в машиностроении и авиакосмической промышленности для мониторинга конструкций, накопления энергии, активного подавления паразитных колебаний, шумоподавления и т.д. Данные материалы отличают хорошие электромеханические свойства, гибкость в процессе проектирования, простота производства и высокая эффективность преобразования электрической энергии в механическую и обратно. При использовании пьезоэлектрических материалов в

качестве актуаторов за счет изменения величины приложенного электрического потенциала можно управлять деформациями. В датчиках измерение деформации происходит за счет измерения наведенного потенциала. В области накопления энергии с помощью пьезоэлектрических материалов происходит преобразование свободной механической энергии, присутствующей в конструкциях, в электрическую и ее последующее преобразование в пригодную для питания маломощных устройств. Подробный обзор приведен в работах [1–3].

Типовые актуаторы, сенсоры и генераторы, работающие на изгибных модах, представляют собой многослойную структуру, состоящую из нескольких слоев с различными механическими и электрическими свойствами.

Существует класс материалов, обладающих пьезомагнитными свойствами. Пьезомагнетизм – это явление, наблюдаемое в некоторых антиферромагнитных и ферромагнитных кристаллах. Он характеризуется линейной связью между магнитной поляризацией системы и механической деформацией. В пьезомагнитном материале можно вызвать спонтанный магнитный момент, приложив физическое напряжение, или физическую деформацию, приложив магнитное поле. Одним из самых распространенных пьезомагнитных материалов является CoFe_2O_4 [4–6]. Существуют работы [7–9], где исследуется композит на основе CoFe_2O_4 и BaTiO_3 , обладающий пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами одновременно.

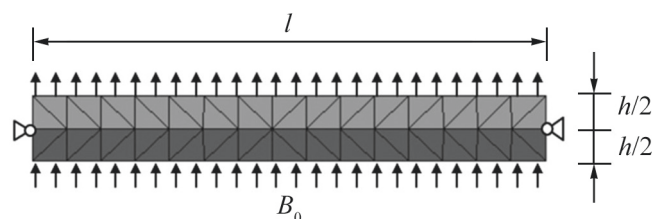


Рис. 1. Пьезомагнитоэлектрический биморф.
Fig. 1. Piezomagnetolectric bimorph.

Классические решения задач электроупругости приведены в работах [10–12] наряду с решением задач магнитоупругости.

Прикладные теории колебаний многослойных пьезоэлектрических пластин с учетом специфики распределения электрического потенциала по толщине конструкции развиты в статье [13]. В работе [14] развита прикладная теория колебаний пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией.

В работах [15; 16] рассмотрены динамические связанные задачи о гармонических колебаниях электромагнитоупругого слоя и полупространства под действием осциллирующей нагрузки при различных электрических и магнитных условиях на его гранях наряду с предварительными напряжениями, а также их влияния на дисперсионные свойства.

Ранее нами была предложена прикладная теория, учитывающая нелинейность распределения электрического потенциала в продольном и поперечном направлениях, и исследовано напряженно-деформированное и электрическое состояние шарнирно-опертого биморфа [17] и консольного [18]. В обоих случаях прикладная теория показала хорошую сходимость с результатами конечно-элементного моделирования. Также нами была получена прикладная теория колебаний биморфа [19], состоящего из электроупругого и магнитоупругого слоев, хорошо согласующаяся с данными конечно-элементного анализа.

В данной работе рассматриваются колебания устройства в рамках плоского напряженного состояния. Построена прикладная теория изгибных колебаний двухслойного пьезомагнитоэлектрического биморфа. Результаты расчетов сравниваются с результатами конечно-элементного моделирования в пакете FlexPDE.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается плоская задача об установившихся изгибных колебаниях пластины, обладающей бесконечной шириной (рис. 1). Пластина состоит из двух одинаковых слоев, обладающих пьезомагнитоэлектрическими свойствами. Большие поверхности слоев электродированы, а сами слои поляризованы по толщине. Биморф шарнирно закреплен по краям, а все поверхности свободны от механических напряжений. На верхнюю и нижнюю границы пластины воздействует магнитный поток B_0 , в то время как на границе между слоями магнитный потенциал считается равным нулю.

Электрический потенциал равен нулю на всех электродах. Боковые поверхности считаются изолированными от магнитных и электрических полей.

Для описания колебаний данной пластины воспользуемся общими уравнениями и определяющими соотношениями для плоской задачи пьезомагнитоупругости [20]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \sigma_\Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \\ \mathbf{H} &= -\nabla \xi, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{h} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры механических напряжений и деформации; \mathbf{D} и \mathbf{E} – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля; \mathbf{B} и \mathbf{H} – векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля; ρ – плотность материала; \mathbf{c} – тензор упругих модулей; \mathbf{e} – тензор пьезоэлектрических модулей; \mathbf{h} – тензор пьезомагнитных модулей; \mathbf{k} – тензор диэлектрических проницаемостей; $\boldsymbol{\alpha}$ – тензор магнитоэлектрических модулей; $\boldsymbol{\mu}$ – тензор магнитных проницаемостей; \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил; σ_Ω – объемная плотность электрических зарядов; \mathbf{u} – вектор перемещений; φ и ξ – электрический и магнитный потенциалы.

Для завершения постановки задачи к этим уравнениям также необходимо добавить граничные условия для механических, электрических и магнитных полей.

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ

Воспользуемся вариационным уравнением для случая установившихся колебаний [11], обобщающим принцип Гамильтона в теории электроупругости, добавив в рассмотрение магнитные составляющие. Для случая плоской деформации при отсутствии поверхностных нагрузок и при наличии магнитного потока вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \iint_S \delta \tilde{H} dS - \rho \omega^2 \iint_S u_i \delta u_i dS + \\ \iint_S (p_i \delta u_i + \sigma_0 \delta \varphi + B_0 \delta \xi) dS = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\delta \tilde{H} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - B_i \delta H_i$.

Далее для построения прикладной теории колебаний примем гипотезы Кирхгофа. В соответствии с ними распределение перемещений по толщине имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3) &= -x_3 w_1, \\ u_3(x_1, x_3) &= w(x_1). \end{aligned}$$

В частности, для механического поля принята гипотеза единой нормали. Поскольку рассматривается задача, в которой значение электрического потенциала на электродах равно нулю, его распределение для первых мод колебаний довольно точно описывается линейной функцией. Но с учетом возможной неоднородности по длине элемента, связанной с влиянием граничных условий на концах биморфа, его распределение по толщине принимается за квадратичную функцию:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \tilde{x}_3) &= V_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} - 1 \right) + \\ &+ V_1(x_1) \left(1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{h^2} \right) + V_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} + 1 \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_3 = x_3 - h/2$. Здесь функции V_0 , V_1 и V_2 отвечают за значение электрического потенциала на внутреннем электроде, в середине слоя и на внешнем электроде соответственно. Чтобы удовлетворить условиям задачи, примем эти функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_0(x_1) &= V_0 = \text{const}, \\ V_1(x_1) &= \Phi(x_1), \\ V_2(x_1) &= V_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь функция $\Phi(x_1)$ является неизвестной.

Магнитный потенциал на внутренней границе пьезомагнитного слоя принимается равным нулю, а на внешней границе его распределение неизвестно. Поэтому удобно использовать распределение магнитного потенциала в следующем виде.

$$\begin{aligned} \xi(x_1, \tilde{x}_3) &= M_0(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} - 1 \right) + \\ &+ M_1(x_1) \left(1 - \frac{4\tilde{x}_3^2}{h^2} \right) + M_2(x_1) \frac{\tilde{x}_3}{h} \left(\frac{2\tilde{x}_3}{h} + 1 \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_3 = x_3 - h/2$. Здесь функции M_0 , M_1 и M_2 отвечают за значение магнитного потенциала на внутренней границе, в середине слоя и на внешней границе соответственно. Чтобы удовлетворить условиям задачи, примем эти функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_0(x_1) &= M_0 = \text{const}, \\ M_1(x_1) &= \Xi_2(x_1), \end{aligned}$$

$$M_2(x_1) = \Xi_3(x_1).$$

Здесь функции $\Xi_2(x_1)$ и $\Xi_3(x_1)$ являются неизвестными.

После вариации уравнения (2) проинтегрируем его по толщине, а затем приравняем коэффициенты при независимых вариациях δw , $\delta \Phi$, $\delta \Xi_2$ и $\delta \Xi_3$ к нулю. Тем самым мы получаем систему из четырех дифференциальных уравнений (3) от четырех неизвестных функций, зависящих от x_1 (далее опустим нижний индекс), и пять граничных условий (4).

$$\begin{aligned} &\frac{16\tilde{\kappa}_{33}}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\kappa}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\kappa}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \\ &\quad + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\kappa_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ &\quad - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \\ &\quad - \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} M_0 = 0, \\ &\frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_0 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 - \frac{32\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) - \frac{32\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) + \\ &\quad + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ &\quad - \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) - \\ &\quad - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0, \quad (3) \\ &\quad - \frac{2\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_0 - \frac{14\tilde{\alpha}_{33}}{3H} V_2 + \frac{16\tilde{\alpha}_{33}}{3H} \Phi(x) + \\ &\quad + \frac{16\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_2(x) - \frac{14\tilde{\mu}_{33}}{3H} \Xi_3(x) - \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - \\ &\quad - \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + \\ &\quad + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) - 2B_0 - \frac{2\tilde{\mu}_{33}}{3H} M_0 = 0, \\ &\quad \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_2(x) - \\ &\quad - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d^2}{dx^2} \Xi_3(x) + 2p_3H - \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \\ &\quad + 2\omega^2 \rho w(x)H + \frac{2H^3 \tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^4}{dx^4} w(x) = 0. \\ &\frac{16\kappa_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0, \\
 & \frac{16\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{16\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \\
 & + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0, \\
 & \frac{2\alpha_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Phi(x) + \frac{2\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \\
 & + \frac{4\mu_{11}H}{15} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) = 0, \\
 & \frac{\tilde{e}_{31}H}{3} V_0 - \frac{5\tilde{e}_{31}H}{3} V_2 + \frac{4\tilde{e}_{31}H}{3} \Phi(x) + \\
 & + \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_2(x) - \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \Xi_3(x) + \\
 & + \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{\tilde{h}_{31}H}{3} M_0 = 0 \\
 & - \frac{4\tilde{e}_{31}}{3} \frac{d}{dx} \Phi(x) - \frac{4\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_2(x) + \frac{5\tilde{h}_{31}H}{3} \frac{d}{dx} \Xi_3(x) - \\
 & - \frac{2H^3\tilde{c}_{11}}{3} \frac{d^3}{dx^3} w(x) + \frac{2\rho\omega^2 H^3}{3} \frac{d}{dx} w(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь были введены следующие обозначения:

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33},$$

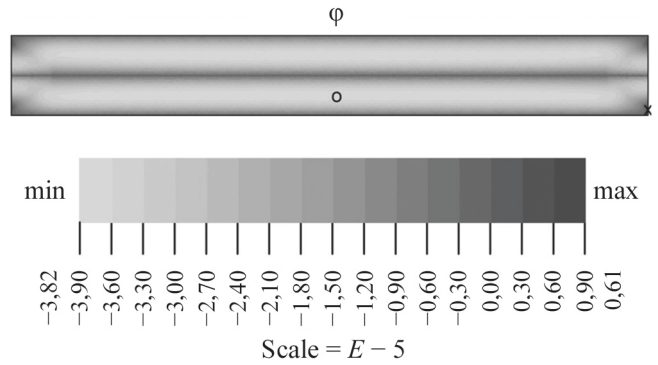
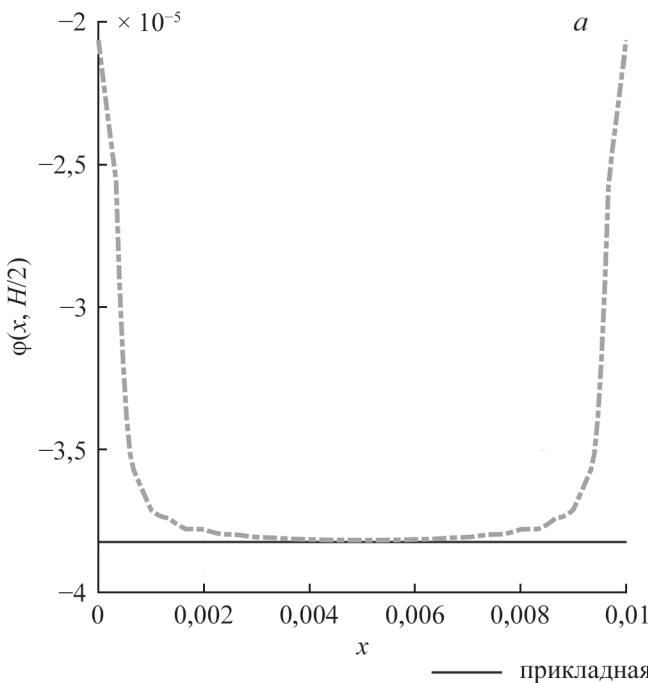


Рис. 2. Результаты конечно-элементного моделирования: распределение электрического потенциала в биморфе.
Fig. 2. Results of finite element modeling: the distribution of the electric potential in the bimorph.

$$\tilde{e}_{31} = e_{31} - c_{13}e_{33} / c_{33},$$

$$\tilde{h}_{31} = h_{31} - c_{13}h_{33} / c_{33},$$

$$\tilde{\alpha}_{33} = -\alpha_{33} - e_{33}h_{33} / c_{33},$$

$$\tilde{\kappa}_{33} = -\kappa_{33} - e_{33}^2 / c_{33}.$$

Они возникли после удовлетворения условию $\sigma_{33} = 0$ и исключения ϵ_{33} .

Для верификации полученной теории в конечно-элементном (КЭ) пакете FlexPDE на базе общих уравнений (1) для плоской задачи была построена модель описанного выше биморфа разме-

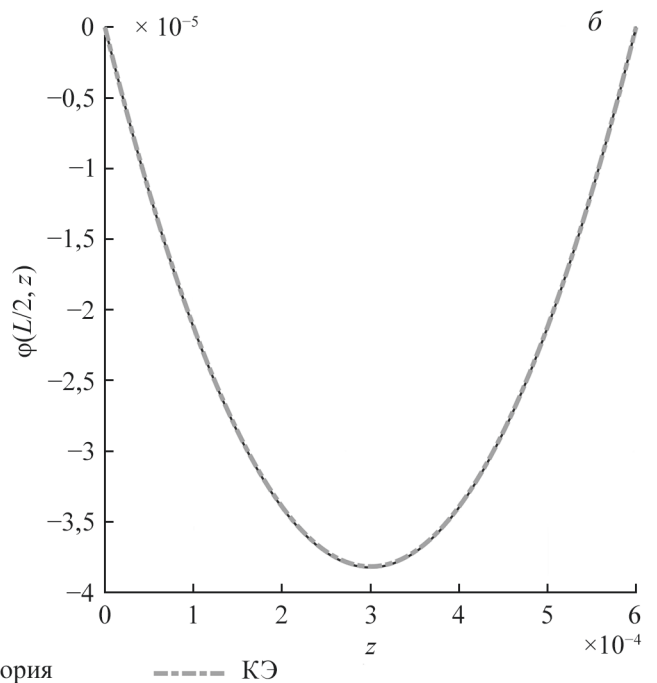


Рис. 3. Сравнение распределения электрического потенциала, полученного на основе прикладной теории и КЭ: *a* – по длине верхнего слоя; *б* – по толщине в средней точке верхнего слоя.

Fig. 3. Comparison of the electric potential distribution obtained on the basis of the applied theory and FEA: *a* – along the length of the upper layer; *б* – along the thickness at the midpoint of the upper layer.

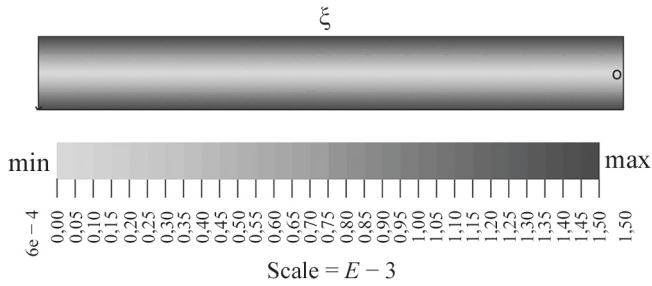


Рис. 4. Результаты конечно-элементного моделирования: распределение магнитного потенциала в биморфе.

Fig. 4. Results of finite element modeling: the distribution of the magnetic potential in the bimorph.

ром $10 \cdot 1,2$ мм. В качестве пьезоактивного материала был использован композит [9], включавший в себя 20 % CoFe_2O_4 и 80 % BaTiO_3 , со следующими материальными константами: $\rho = 5874$ кг/м³, $c_{11}^E = 1,85 \cdot 10^{11}$ Па, $c_{12}^E = 9,0 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{13}^E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{33}^E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Па, $c_{44}^E = 3,9 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{31} = -0,2$ Кл/м², $e_{33} = 0,5$ Кл/м², $e_{15} = 8,8$ Кл/м², $\kappa_{11} = 9,4 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\kappa_{33} = 3 \cdot 10^{-10}$ Ф/м, $\alpha_{11} = -2,3 \cdot 10^{-8}$ Н·с/(В·Кл), $\alpha_{33} = 2,35 \cdot 10^{-11}$ Н·с/(В·Кл), $h_{31} = 15$ Н/(А·м), $h_{33} = -6$ Н/(А·м), $h_{15} = 110$ Н/(А·м), $\mu_{11} = 1,25 \cdot 10^{-4}$ Н·с²/Кл², $\mu_{33} = 2 \cdot 10^{-5}$ Н·с²/Кл². Биморф возбуждался магнит-

ным потоком, приложенным к большим внешним граням, величиной $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ Вб с частотой 18 Гц.

Далее представлены результаты КЭ-расчета и их сравнение с прикладной теорией.

На рисунке 2 представлено распределение электрического потенциала. Из графика видно, что распределение потенциала по толщине слоя нелинейно, в то время как по длине линейно, за исключением областей в окрестности шарнирных креплений. Рисунки 3а и 3б, демонстрирующие срезы данного графика, еще раз подтверждают данный вывод. Кроме того, зависимость потенциала от толщины, представленная на рисунке 3б, имеет выраженный квадратичный характер, который хорошо описывается предложенной теорией.

На основе данных рисунка 4 можно сделать заключение, что распределение магнитного потенциала линейно как по толщине, так и по длине слоев. Анализ рисунков 5а и 5б, где представлены срезы данного распределения, наглядно показывают линейный характер магнитного потенциала.

Механические характеристики, рассчитанные на основе прикладной теории, также хорошо согласуются с КЭ-моделированием, что продемонстрировано на рисунке 6.

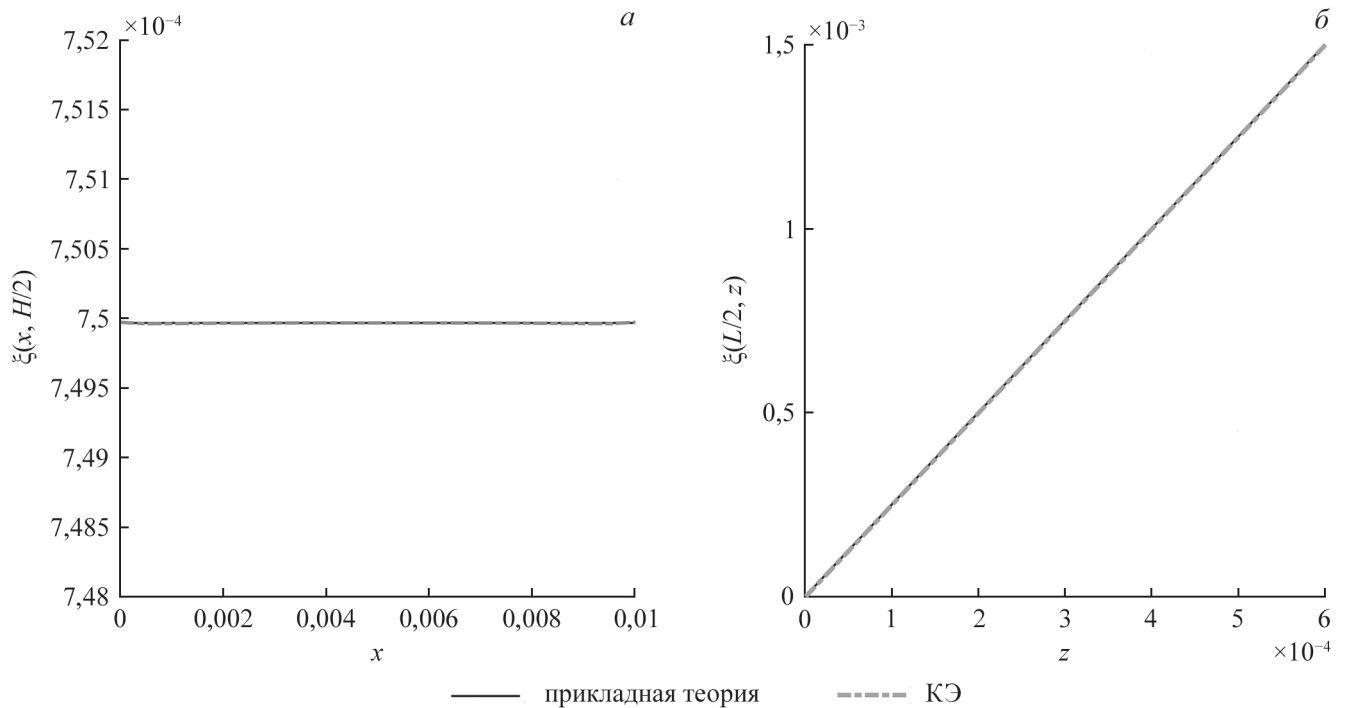


Рис. 5. Сравнение распределения магнитного потенциала, полученного на основе прикладной теории и КЭ: а – по длине верхнего слоя; б – по толщине в средней точке верхнего слоя.

Fig. 5. Comparison of the magnetic potential distribution obtained on the basis of the applied theory and FEA: а – along the length of the upper layer; б – along the thickness at the midpoint of the upper layer.

Анализ рисунков 3, 5 и 6 позволяет сделать заключение, что результаты расчета основных характеристик пьезомагнитоэлектрического биморфа, полученные на основе предложенной прикладной теории, хорошо согласуются с данными КЭ-расчета в низкочастотной области. Погрешность не превышает 1 %. Исключением является распределение электрического потенциала в окрестности шарнирного крепления. Конечно-элементный анализ демонстрирует явный нелинейный характер, в то время как прикладная теория – линейный. На краях биморфа погрешность достигает 27 %, в то время как в срединной части она составляет порядка 5 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена прикладная теория для расчета поперечных колебаний биморфа, состоящего из двух слоев композита на основе CoFe_2O_4 и BaTiO_3 , обладающего пьезоэлектрическими и пьезомагнитными свойствами одновременно, в переменном магнитном поле. Такая конструкция может служить моделью пьезоэлектрического генератора устройства сбора и накопления энергии при действии внешнего магнитного поля. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния биморфа, распределения электрического и магнитного полей. Сравнение результатов расчета биморфа по предложенной теории с КЭ-расчетом в низкочастотной области показало, что погрешность в нахождении характеристик механического и магнитного полей составляет менее 1 %. В свою очередь при определении электрического поля разница составила порядка 5 % в средней части пластины и 27 % в окрестности точек опоры.

Принятое в работе квадратичное распределение электрического и магнитного потенциалов по

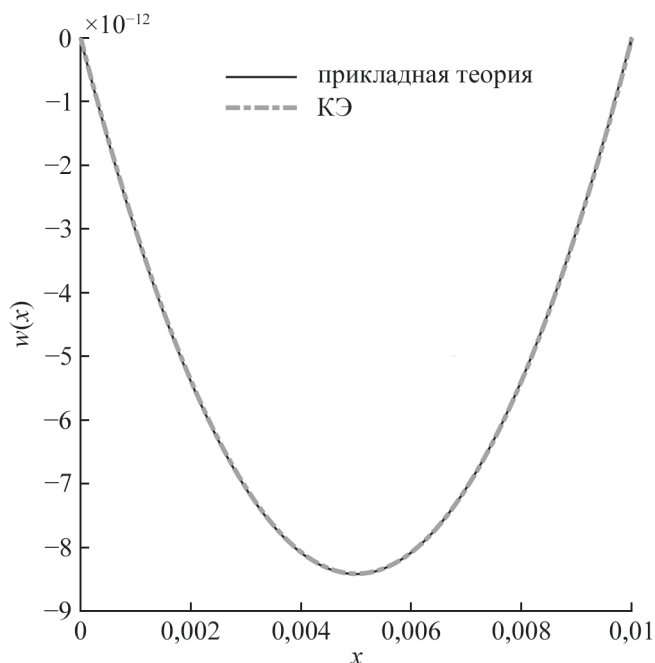


Рис. 6. Сравнение распределений прогиба по длине биморфа, полученных на основе прикладной теории и КЭ.

Fig. 6. Comparison of the distributions of the deflection along the bimorph length based on applied theory and FEA.

толщине показало достаточно хорошую согласованность результатов расчета полевых характеристик с данными КЭ-моделирования во всей области биморфа за исключением окрестностей точек опоры. Конечно-элементный анализ демонстрирует явный нелинейный характер распределения электрического поля, в то время как прикладная теория – линейный.

Работа первого соавтора поддержана Правительством РФ, контракт № 075-15-2019-1928, фондом РФФИ, проект № 19-08-00365_А. Третий соавтор выполнял работу в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН (№ государственной регистрации проекта АА-А-А16-116012610052-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Gaudenzi P. 2009. *Smart structures: physical behavior, mathematical modeling and applications*. New York, Wiley: 194 p.
- Qader I.N., Kók M., Dagdelen F., Aydođdu Y. 2019. A review of smart materials: researches and applications. *El-Cezeri Journal of Science and Engineering*. 6(3): 755–788. doi: 10.31202/cejse.562177
- Chebanenko V.A., Akopyan V.A., Parinov I.A. 2015. Piezoelectric Generators and Energy Harvesters: Modern State of the Art. In: *Piezoelectrics and Nanomaterials: Fundamentals, Developments and Applications*. New York, Nova Science Publishers: 243–277.
- Amrillah T., Hermawan A., Wulandari C.P., Muthi'Ah A.D., Simanjuntak F.M. 2021. Crafting the multiferroic BiFeO_3 - CoFe_2O_4 nanocomposite for next-generation devices: A review. *Materials and Manufacturing Processes*. 36(14): 1579–1596. doi: 10.1080/10426914.2021.1945096
- Abraime B., Mahmoud A., Boschini F., Ait Tamerd M., Benyoussef A., Hamedoun M., Xiao Y., El Kenz A., Mounkachi O. 2018. Tunable maximum energy product in CoFe_2O_4 nanopowder for permanent magnet application. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 467: 129–134. doi: 10.1016/j.jmmm.2018.07.063
- Lamouri R., Mounkachi O., Salmani E., Hamedoun M., Benyoussef A., Ez-Zahraouy H. 2020. Size effect on the magnetic properties of CoFe_2O_4 nanoparticles: a Monte

- Carlo study. *Ceramics International*. 46(6): 8092–8096. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.12.035
7. Kim J.-Y. 2011. Micromechanical analysis of effective properties of magneto-electro-thermo-elastic multilayer composites. *International Journal of Engineering Science*. 49(9): 1001–1018. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.05.012
 8. Venkata Siva K., Kaviraj P., Arockiarajan A. 2020. Improved room temperature magnetoelectric response in CoFe_2O_4 - BaTiO_3 core shell and bipolar magnetostrictive properties in CoFe_2O_4 . *Materials Letters*. 268: 127623. doi: 10.1016/j.matlet.2020.127623
 9. Challagulla K.S., Georgiades A.V. 2011. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures. *International Journal of Engineering Science*. 49(1): 85–104. doi: 10.1016/j.ijengsci.2010.06.025
 10. Новацкий В., Шачнев В.А. 1986. *Электромагнитные эффекты в твердых телах*. М., Мир: 160 с.
 11. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. 1988. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М., Наука: 472 с.
 12. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. 2006. *Электромагнитоупругие волны*. Ереван, изд-во Ереванского государственного университета: 492 с.
 13. Vatul'yan A.O., Rynkova A.A. 2001. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42(1): 164–168. doi: 10.1023/A:1018837401827
 14. Soloviev A.N., Oganessian P.A., Lupeiko T.G., Kirillova E.V., Chang S.H., Yang C.D. 2016. Modeling of non-uniform polarization for multi-layered piezoelectric transducer for energy harvesting devices. In: *Advanced Materials*. Heidelberg, Springer: 651–658. doi: 10.1007/978-3-319-26324-3_46
 15. Levi M.O., Kalinchuk V.V. 2017. Some features of the dynamics of electro-magneto-elastic half-space with initial deformations. In: *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics) (Omsk, Russia, 14–16 November 2017)*. Omsk, IEEE: 1–5. doi: 10.1109/Dynamics.2017.8239478
 16. Леви М.О., Анджинович И.Е., Воронич Е.И., Агаян К.Л. 2012. Влияние граничных условий на динамику электромагнитоупругой полуграниченной среды. *Вестник Южного научного центра*. 8(4): 14–19.
 17. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganessian P.A. 2019. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution. *Materials Physics and Mechanics*. 42(1): 65–73. doi: 10.18720/MPM.4212019_7
 18. Соловьёв А.Н., Чебаненко В.А., Паринов И.А., Оганесян П.А. 2019. Исследование колебаний биморфной пластины с учетом нелинейности электрического потенциала. *Наука Юга России*. 15(3): 3–11. doi: 10.7868/S25000640190301
 19. Binh D.T., Chebanenko V.A., Duong L.V., Kirillova E., Thang P.M., Soloviev A.N. 2020. Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph. *Journal of Advanced Dielectrics*. 10(3): 2050007. doi: 10.1142/S2010135X20500071
 20. Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganessian P.A., Soloviev A.N. 2018. Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials, vol. 81*. Singapore, Springer: 69–88. doi: 10.1007/978-981-10-6895-9_5

REFERENCES

1. Gaudenzi P. 2009. *Smart structures: physical behavior, mathematical modeling and applications*. New York, Wiley: 194 p.
2. Qader I.N., Kök M., Dagdelen F., Aydođdu Y. 2019. A review of smart materials: researches and applications. *El-Cezeri Journal of Science and Engineering*. 6(3): 755–788. doi: 10.31202/ecjse.562177
3. Chebanenko V.A., Akopyan V.A., Parinov I.A. 2015. Piezoelectric Generators and Energy Harvesters: Modern State of the Art. In: *Piezoelectrics and Nanomaterials: Fundamentals, Developments and Applications*. New York, Nova Science Publishers: 243–27.
4. Amrillah T., Hermawan A., Wulandari C.P., Muthi'Ah A.D., Simanjuntak F.M. 2021. Crafting the multiferroic BiFeO_3 - CoFe_2O_4 nanocomposite for next-generation devices: A review. *Materials and Manufacturing Processes*. 36(14): 1579–1596. doi: 10.1080/10426914.2021.1945096
5. Abraime B., Mahmoud A., Boschini F., Ait Tamerd M., Benyoussef A., Hamedoun M., Xiao Y., El Kenz A., Mounkachi O. 2018. Tunable maximum energy product in CoFe_2O_4 nanopowder for permanent magnet application. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 467: 129–134. doi: 10.1016/j.jmmm.2018.07.063
6. Lamouri R., Mounkachi O., Salmani E., Hamedoun M., Benyoussef A., Ez-Zahraouy H. 2020. Size effect on the magnetic properties of CoFe_2O_4 nanoparticles: a Monte Carlo study. *Ceramics International*. 46(6): 8092–8096. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.12.035
7. Kim J.-Y. 2011. Micromechanical analysis of effective properties of magneto-electro-thermo-elastic multilayer composites. *International Journal of Engineering Science*. 49(9): 1001–1018. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.05.012
8. Venkata Siva K., Kaviraj P., Arockiarajan A. 2020. Improved room temperature magnetoelectric response in CoFe_2O_4 - BaTiO_3 core shell and bipolar magnetostrictive properties in CoFe_2O_4 . *Materials Letters*. 268: 127623. doi: 10.1016/j.matlet.2020.127623
9. Challagulla K.S., Georgiades A.V. 2011. Micromechanical analysis of magneto-electro-thermo-elastic composite materials with applications to multilayered structures. *International Journal of Engineering Science*. 49(1): 85–104. doi: 10.1016/j.ijengsci.2010.06.025
10. Novatskiy V., Shachnev V.A. 1986. *Elektromagnitnye efekty v tverdykh telakh*. [Electromagnetic effects in solids]. Moscow, Mir: 160 p. (In Russian).
11. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. 1988. *Elektromagnitnouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel*. [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductive bodies]. Moscow, Nauka: 472 p. (In Russian).

12. Bagdasaryan G.E., Danoyan Z.N. 2006. *Elektromagnitoupругie volny*. [Electromagnetoelastic waves]. Yerevan, Yerevan State University: 492 p. (In Russian).
13. Vatul'yan A.O., Rynkova A.A. 2001. Flexural vibrations of a piezoelectric bimorph with a cut internal electrode. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42(1): 164–168. doi: 10.1023/A:1018837401827
14. Soloviev A.N., Oganessian P.A., Lupeiko T.G., Kirillova E.V., Chang S.H., Yang C.D. 2016. Modeling of non-uniform polarization for multi-layered piezoelectric transducer for energy harvesting devices. In: *Advanced Materials*. Heidelberg, Springer: 651–658. doi: 10.1007/978-3-319-26324-3_46
15. Levi M.O., Kalinchuk V.V. 2017. Some features of the dynamics of electro-magneto-elastic half-space with initial deformations. In: *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics) (Omsk, Russia, 14–16 November 2017)*. Omsk, IEEE: 1–5. doi: 10.1109/Dynamics.2017.8239478
16. Levi M.O., Andzhikov I.E., Vorovich E.I., Agayan K.L. 2012. [The influence of boundary conditions on the dynamics of semibounded electromagneto-elasticity media]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 8(4): 14–19. (In Russian).
17. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganessian P.A. 2019. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution. *Materials Physics and Mechanics*. 42(1): 65–73. doi: 10.18720/MPM.4212019_7
18. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganessian P.A. 2019. [Study of oscillation of a bimorph plate taking into account the nonlinearity of the electric potential]. *Nauka Yuga Rossii*. 15(3): 3–11. doi: 10.7868/S25000640190301
19. Binh D.T., Chebanenko V.A., Duong L.V., Kirillova E., Thang P.M., Soloviev A.N. 2020. Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph. *Journal of Advanced Dielectrics*. 10(3): 2050007. doi: 10.1142/S2010135X20500071
20. Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganessian P.A., Soloviev A.N. 2018. Finite element approach for composite magneto-piezoelectric materials modeling in ACELAN-COMPOS package. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems. Advanced Structured Materials*, vol. 81. Singapore, Springer: 69–88. doi: 10.1007/978-981-10-6895-9_5

Поступила 02.09.2021