ВЕСТНИК ЮЖНОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА 2013. Том 9. Юбилейный выпуск. С. 20–28

МЕХАНИКА

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2013 г. В.В. Калинчук[1], Т.И. Белянкова[1], Д.Н. Шейдаков[1]

В рамках материальной (лагранжевой) системы координат проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики электромагнитоупругой среды, находящейся под действием начальных механических напряжений. Окончательные выражения, описывающие движение предварительно напряженной магнитоупругой среды, построены безотносительно к выбору криволинейной системы координат и представлены в компактной форме, удобной для проведения исследований теоретического и прикладного характера. Приведены определяющие соотношения движения магнитоупругой предварительно напряженной среды в прямоугольной декартовой системе координат. Изучено влияние начальных механических напряжений на пьезомагнетики класса 6*mm*.

Ключевые слова: электромагнитная среда, магнитоупругость, линеаризация, предварительные напряжения, начальная деформация.

На основе последовательной линеаризации нелинейных уравнений динамики электромагнитоупругой среды [1] дан вывод линеаризованных уравнений движения предварительно напряженной магнитоупругой среды, находящейся под действием начальных механических напряжений, в предположении, что внешнее магнитостатическое поле отсутствует. Уравнения и определяющие соотношения построены в общей форме безотносительно к выбору системы координат. Для прямоугольной декартовой системы координат уравнения представлены в координатной форме. На основе полученных соотношений исследовано влияние начальных напряжений на константы пьезоактивных магнитных материалов класса 6*mm*. В [2] были построены определяющие соотношения динамики электроупругой среды в отсутствие внешних электростатических полей, в [3] – при их наличии. Магнитные свойства среды не учитывались. В [4] на основе приближенных уравнений динамики предварительно напряженной магнитоупругой среды исследовано влияние начальных напряжений на скорость распространения волн Лява. Общие вопросы движения магнитоупругих сред, особенности постановки краевых задач рассматривались в [1, 5, 6].

1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СРЕД

В рассмотрение вводятся отсчетная v- и актуальная V-конфигурации, соответственно до и после действия поверхностных и массовых сил. Различие этих конфигураций заключается в способе задания радиусов-векторов, определяющих положение материальной точки [7]. В отсчетной конфигурации оно задается радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{i}_s a_s(q_1, q_2, q_3)$, представляющим собой непрерывную и требуемое число раз дифференцируемую функцию (q_1, q_2, q_3 – материальные координаты точки, $\mathbf{i}_s$ – базисные векторы ортонормированной системы координат). Место этой же точки в актуальной конфигурации задается радиусом-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{i}_s X_s(q_1, q_2, q_3, t)$, также представляющим собой непрерывную и требуемое число раз дифференцируемую функцию. Тем самым определяются отсчетная ν-конфигурация с материальной системой координат a_1, a_2, a_3 (Лагранжа) и актуальная V-конфигурация с пространственной системой координат X_1, X_2, X_3, (Эйлера) с соответствующими векторами основного базиса $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{R}_k$, взаимного базиса $\mathbf{r}^k$ и $\mathbf{R}^k$ и ∇-операторами [7]: в v-конфигурации

$$\nabla_0 = \mathbf{r}_k \frac{\partial}{\partial q_k},\ \ \mathbf{r}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial a_m}{\partial q_k},$$

в V-конфигурации

$$\nabla = \mathbf{R}_k \frac{\partial}{\partial q_k},\ \ \mathbf{R}_k = \mathbf{i}_m \frac{\partial X_m}{\partial q_k}.$$

[1] Южный научный центр Российской академии наук, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: kalin@ssc-ras.ru

Одним из основных параметров, характеризующим состояние магнитоупругой среды, является магнитный потенциал Ψ, по которому определяются вектор напряженности магнитного поля в актуальной конфигурации

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (1.1)$$

и вектор напряженности магнитного поля в отсчетной конфигурации, так называемый материальный вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{V} = -\nabla_0\Psi.$$

Последний определяет намагниченность в отсчетной конфигурации, так называемый материальный вектор намагниченности

$$\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{V}}. \quad (1.2)$$

Вектор $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{V}}$ и встречающийся ниже тензор $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{S}}$ являются производными термодинамического потенциала $\chi = \chi(\mathbf{S}, \mathbf{V})$ – скалярной функции, определяющей энергию, запасенную в процессе деформирования магнитоупругого тела, и зависящей от "материального" вектора намагниченности магнитного поля $\mathbf{V}$ и тензора деформации Коши – Грина $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{I}),\ \ \mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{C} = \nabla_0\mathbf{R}.$$

Здесь $\mathbf{G}$ – мера деформации Коши – Грина, $\mathbf{C}$ – тензор-градиент деформации, $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Магнитные и механические свойства магнитоупругой среды в актуальной конфигурации описываются вектором намагниченности [1, 5]

$$\mathbf{m} = -J^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{v}},$$

вектором магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{m}$$

и уравнениями состояния в виде

$$\mathbf{M}^{\mathrm{H}} = \mathbf{M} + \mathbf{mH},$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} - \mathbf{mH}.$$

Тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ и магнитный тензор Максвелла $\mathbf{M}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{M} = \mu_0\mathbf{HH} - \frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{HI},$$

$$\mathbf{T} = J^{-1}\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{C},$$

где $J = \sqrt{\det\mathbf{G}}$ – метрический множитель, μ_0 – магнитная проницаемость материала среды.

В отсчетной конфигурации магнитные и механические свойства магнитоупругой среды описываются вектором намагниченности $\boldsymbol{\mu}$ (1.2), тензором напряжений Пиола

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{C}, \quad (1.3)$$

материальной формой вектора магнитной индукции

$$\mathbf{b} = \mu_0 J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{H} - \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{V}}, \quad (1.4)$$

магнитным тензором Пиола – Максвелла

$$\mathbf{j} = \mu_0 J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{HH} - \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{HI}\right). \quad (1.5)$$

Нетрудно заметить, что в представлении материальных форм вектора магнитной индукции и магнитного тензора напряжений участвует вектор напряженности магнитного поля в актуальной конфигурации, что связано с пространственной формой представления характеристик магнитного поля.

2. ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим задачу о колебаниях магнитоупругой среды, занимающей объем v, ограниченный поверхностью $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$. Полагаем, что на части поверхности o_1задан вектор $\mathbf{R}^*$, определяющий перемещение точек среды, на части поверхности o_2 – вектор механических напряжений $\mathbf{t}^*_{\mathbf{n}}$ [7]. На части поверхности o_3 задан магнитный потенциал ψ^*, на части поверхности o_4 – вектор магнитной индукции $\mathbf{b}^*$.

Краевая задача в лагранжевых координатах описывается уравнением движения [1, 7]

$$\nabla_0\cdot(\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{j}) = \rho_0\ddot{\mathbf{R}}, \quad (2.1)$$

уравнением вынужденной магнитостатики

$$\nabla_0\cdot\mathbf{b} = 0 \quad (2.2)$$

и граничными условиями на поверхности $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$ ($\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности):
на o_1

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^*,$$

на o_2

$$\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{j}) = \mathbf{t}^*_{\mathrm{n}},$$

на o_3

$$\Psi = \psi^*,$$

на o_4

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^*.$$

3. НАЧАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СРЕДЫ

Будем предполагать, что существует некоторая равновесная начально-деформированная конфигурация магнитоупругого тела, заданная радиусом-вектором $\mathbf{R}_1 = (X_1^1, X_2^1, X_3^1)$ и потенциалом ψ_1. Она определяется:

– тензором-градиентом деформации $\mathbf{C}_1 = \nabla_0 \mathbf{R}_1$,

– вектором напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_1 = -\nabla_1 \psi_1$,

– тензором напряжений Пиола $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{\Pi}(\mathbf{C}_1, \psi_1)$,

– магнитным тензором Пиола–Максвелла $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}(\mathbf{C}_1, \psi_1)$,

– вектором магнитной индукции $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}(\mathbf{C}_1, \psi_1)$.

Уравнения статики в объеме и на поверхности $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$ в начально-деформированной конфигурации представляются соотношениями

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{j}_1) = 0,$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{b}_1 = 0,$$

на o_1

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^*, \tag{3.1}$$

на o_2

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{j}_1) = \mathbf{t}_1^*,$$

на o_3

$$\psi_1 = \psi_1^*,$$

на o_4

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_1 = 0.$$

Предположим, что под действием поверхностных или массовых сил этой конфигурации сообщается малое механическое $\eta\mathbf{u}$ и магнитное $\eta\psi$ возмущение. То есть положение точек в возмущенной конфигурации определяется радиусом-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \eta\mathbf{u}$, а магнитное поле – потенциалом $\Psi = \psi_1 + \eta\psi$.

Следуя [2, 3, 7], представим тензорные и векторные величины, описывающие возмущенную конфигурацию, в виде

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_1 + \eta\mathbf{\Pi}^{\bullet}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \eta\mathbf{j}^{\bullet}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \eta\mathbf{b}^{\bullet}, \tag{3.4}$$

где символом $^{\bullet}$ обозначены конвективные производные соответствующих функций, которые определяются формулой [7]

$$\mathbf{T}^{\bullet} = \frac{d}{d\eta}\mathbf{T}(C_1 + \eta\nabla_0 u,\ \psi_1 + \eta\psi)\,|_{\eta=0}.$$

Тензоры $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{j}$ и вектор $\mathbf{b}$ должны удовлетворять системе уравнений (2.1), (2.2) и возмущенным граничным условиям:

на o_2

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{j}) = \mathbf{t}_1^* + \eta\mathbf{t}^*, \tag{3.5}$$

на o_4

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$$

при следующих условиях на перемещение $\mathbf{u}$ и потенциал ψ:

на o_1

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \tag{3.6}$$

на o_3

$$\psi = \psi^*.$$

Подставим выражения (3.2)–(3.4) в уравнения (2.1), (2.2), граничные условия (3.5) и учтем соотношения (3.1) и (3.6). Сохранив лишь линейные относительно η члены, придем к определенной в базисе естественной конфигурации линеаризованной краевой задаче относительно неизвестных возмущений перемещения $\mathbf{u}$ и магнитного потенциала ψ, которая состоит из системы уравнений

$$\nabla_0 \cdot (\mathbf{\Theta} + \mathbf{v}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}},$$

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$$

и линеаризованных граничных условий: на o_1

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*,$$

на o_2

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{\Theta} + \mathbf{v}) = \mathbf{t}^*,$$

на o_3

$$\Psi = \psi^*,$$

на o_4

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Pi}^{\bullet},\ \mathbf{v} = \mathbf{j}^{\bullet},\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}^{\bullet}.$$

С учетом представления (1.3) и использования правил дифференцирования для вычисления тензора $\mathbf{\Theta}$ последовательно получаем

$$\mathbf{\Theta} = (\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{C})^{\bullet} = (\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{SC}}^1 \cdot\cdot\, \mathbf{C}^{\bullet\mathbf{T}} + \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{SV}}^1 \cdot \mathbf{V}^{\bullet}) \cdot \mathbf{C}_1 + \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}}^1 \cdot \mathbf{C}^{\bullet}. \tag{3.7}$$

Далее используем формулу перехода [1, 2, 7]

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}} \cdot \mathbf{C}, \tag{3.8}$$

представление конвективных производных градиента деформации

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \nabla_0 \mathbf{u},\ \mathbf{C}^{\bullet\mathbf{T}} = \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \tag{3.9}$$

и производной материального вектора напряженности магнитного поля

$$\mathbf{V}^{\bullet} = -(\nabla_0 \Psi)^{\bullet} = -\nabla_0 \psi. \tag{3.10}$$

После внесения выражений (3.8)–(3.10) в представление (3.7) получим

$$\mathbf{\Theta} = (\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{SS}}^1 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{SV}}^1 \cdot \nabla_0 \psi) \cdot \mathbf{C}_1 + \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}}^1 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}. \tag{3.11}$$

Здесь и далее индексом “1” обозначены значения соответствующих функций в начально-деформированном состоянии.

Аналогично для конвективной производной магнитного тензора $\mathbf{j}$ с учетом представления (1.5) и правил дифференцирования запишем

$$\mathbf{v} = \varepsilon_0 \lfloor J^{\bullet}\mathbf{C}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{j} + J(\mathbf{C}^{-\mathrm{T}})^{\bullet} \cdot \mathbf{j} + J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{j}^{\bullet} \rfloor, \quad (3.12)$$

где

$$\mathbf{j}^{\bullet} = \mathbf{j}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}^{\bullet}, \quad (3.13)$$

здесь $\mathbf{j}_{\mathbf{H}}$ – тензор III ранга (производная тензора $\mathbf{j}$ по вектору $\mathbf{H}$) вида

$$\mathbf{j}_{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \lfloor H_j \delta_{in} + H_i \delta_{jn} - H_n \delta_{ij} \rfloor \, \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \mathbf{i}_n. \quad (3.14)$$

Конвективные производные скалярной функции J и тензора $\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}$ имеют вид

$$J^{\bullet} = J_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{u},\ (\mathbf{C}^{-\mathrm{T}})^{\bullet} = -\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}} \cdot \nabla_1 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}. \quad (3.15)$$

Внеся формулы (3.13)–(3.15) в выражение (3.12), получим:

$$\mathbf{v} = \varepsilon_0 J_1 \mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}} \cdot [(\mathbf{I}\nabla_1 \cdot \mathbf{u} - \nabla_1 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \cdot \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}^1_{\mathrm{H}} \cdot \mathbf{H}^{\bullet}]. \quad (3.16)$$

Аналогично вычислим конвективную производную вектора $\mathbf{b}$ (1.4):

$$\boldsymbol{\beta} = \mu_0 (J^{\bullet}\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}}\, \mathbf{H}_1 + J_1(\mathbf{C}^{-\mathrm{T}})^{\bullet}\, \mathbf{H}_1 + J_1 \mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}} \mathbf{H}^{\bullet}) - \\ - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VV}} \cdot \mathbf{V}^{\bullet} - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{C}^{\bullet \mathrm{T}}. \quad (3.17)$$

Подставив выражения (3.12) и (3.15) в представление (3.17), получим

$$\boldsymbol{\beta} = \mu_0 (J_1 \mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}} \cdot [\nabla_1 \cdot \mathbf{u}\mathbf{H}_1 - \nabla_1 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}^{\bullet}] + \\ + \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VV}} \cdot \nabla_0 \psi - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}. \quad (3.18)$$

Для вычисления конвективной производной вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}^{\bullet}$, участвующей в представлениях конвективных производных тензора Максвелла (3.16) и магнитной индукции (3.18), используем выражение (1.1), для которого последовательно получаем

$$\mathbf{H}^{\bullet} = -(\nabla \Psi)^{\bullet} = -(\mathbf{C}^{-1} \cdot \nabla_0 \Psi)^{\bullet} = \\ = -(\mathbf{C}^{-1})^{\bullet} \cdot \nabla_0 \Psi - \mathbf{C}^{-1} \cdot (\nabla_0 \Psi)^{\bullet}.$$

Используя формулы

$$(\mathbf{C}^{-1})^{\bullet} = -\nabla_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{C}_1^{-1},\ (\nabla_0 \Psi)^{\bullet} = \nabla_0 \psi,$$

имеем

$$\mathbf{H}^{\bullet} = \nabla_1 \mathbf{u} \cdot \nabla_1 \psi_1 - \nabla_1 \psi.$$

Окончательно, с учетом представления (1.1) получим

$$\mathbf{H}^{\bullet} = -\nabla_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_1 - \nabla_1 \psi. \quad (3.19)$$

Из представлений (3.16), (3.18), (3.19) видно, что в описании тензора $\mathbf{v}$ и векторов $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{H}^{\bullet}$, определяющих варьированное напряженное состояние в актуальной конфигурации, участвует оператор ∇_1, определенный в базисе начальной конфигурации. Это обусловлено пространственной формой представления характеристик магнитного поля. Для перехода к материальному представлению необходимо использовать связь между дифференцированием в естественной и в начально-деформированной конфигурации

$$\nabla_1 = \mathbf{C}_1^{-1} \cdot \nabla_0.$$

В настоящей работе рассматривается случай отсутствия воздействия внешних магнитостатических полей. Создаваемое в начальной конфигурации за счет механического воздействия магнитное поле является производным, возникающим за счет пьезоэффекта. Напряженность этого поля для большинства пьезоэлектриков незначительна, поэтому при описании уравнений движения и граничных условий в начально-деформированном состоянии вполне допустимо пренебречь членами, содержащими вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_1$ в качестве множителя. Тем самым в случае отсутствия воздействия внешних магнитостатических полей конвективная производная вектора $\mathbf{b}$ представляется в виде

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VV}} - \mu_0 J_1 \mathbf{G}_1^{-1}) \cdot \nabla_0 \psi - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}. \quad (3.20)$$

Использование выражения (3.11) затруднено из-за того, что тензор $\nabla_0 \mathbf{u}$ и вектор $\nabla_0 \psi$ стоят внутри произведения. Для представления тензора $\boldsymbol{\Theta}$ в более удобной форме целесообразно использовать тензоры четвертого порядка [7]

$$\mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathbf{r}_s \mathbf{r}_t \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t,\ \mathbf{C}_{\mathrm{III}} = \mathbf{r}_s \mathbf{r}_t \mathbf{r}^t \mathbf{r}^s \quad (3.21)$$

и формулы двукратного свертывания этих тензоров с заданными тензорами

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot\, \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} = \mathbf{C}_{\mathrm{III}} \cdot\cdot\, \mathbf{Q}. \quad (3.22)$$

Используя формулы (3.22), преобразуем выражение (3.11)

$$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{SS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{C}_{\mathrm{II}} \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{VS}} \cdot \mathbf{I} \cdot \nabla_0 \psi) \cdot \mathbf{C}_1 + \\ + \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathrm{III}} \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}.$$

Перепишем предыдущее выражение с учетом формулы (3.21) и представления единичного тензора $\mathbf{I} = \mathbf{r}_t \mathbf{r}^t$

$$\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{SS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{r}_t \mathbf{r}_s \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{SV}} \cdot \mathbf{r}_t \mathbf{r}^t \cdot \\ \cdot \nabla_0 \psi) \cdot \mathbf{C}_1 + \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{r}_s \mathbf{r}_t \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}.$$

Агрегаты $\mathbf{r}^s \mathbf{r}^t \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{r}^t \cdot \nabla_0 \psi$ являются скалярными величинами, что позволяет вынести их из произведения. Окончательно, конвективная производная тензора Пиола представляется в виде

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{Z}_{\mathbf{u}} \cdot\cdot\, \nabla_0 \mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Z}_{\psi} \cdot \nabla_0 \psi, \quad (3.23)$$

где $\mathbf{Z_u} = (\boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{SS}} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot\cdot\ \mathbf{r}_t\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{C}_1 + \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{r}_s\mathbf{r}_t)\mathbf{r}^t\mathbf{r}^s$ – тензор IV ранга, отвечающий за механическую составляющую конвективной производной тензора Пиола, $\mathbf{Z}_\psi = \boldsymbol{\chi}^1_{\mathbf{SV}} \cdot \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{r}^s$ – тензор III ранга, отвечающий за магнитную составляющую конвективной производной тензора Пиола.

4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В ДЕКАРТОВОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В декартовой системе координат, совпадающей с материальными координатами естественной конфигурации, векторы основного и взаимного базисов совпадают. Имеют место формулы

$$\nabla_0\mathbf{u} = \mathbf{i}_p\mathbf{i}_s\, u_{s,p},$$

$$\nabla_0\psi = \mathbf{i}_p\psi_{,p}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{C}_1 = \nabla_0\mathbf{R}_1 = \mathbf{i}_p\mathbf{i}_s\, X^1_{s,p}.$$

Индексом, p обозначено дифференцирование по координате a_p,

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}} = \frac{\partial\chi}{\partial S_{lp}}\,\mathbf{i}_l\,\mathbf{i}_p,$$

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{SS}} = \frac{\partial^2\chi}{\partial S_{lq}\,\partial S_{mp}}\,\mathbf{i}_l\,\mathbf{i}_q\,\mathbf{i}_m\,\mathbf{i}_p, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{II}} = \mathbf{i}_s\mathbf{i}_t\mathbf{i}_s\mathbf{i}_t,\ \ \mathbf{C}_{\mathrm{III}} = \mathbf{i}_s\mathbf{i}_t\mathbf{i}_t\mathbf{i}_s.$$

Внеся формулы (4.1) и (4.2) в выражения (3.20) и (3.23), получим представление компонент линеаризованных тензора напряжений $\boldsymbol{\Theta}$ и вектора магнитной индукции $\boldsymbol{\beta}$ в виде

$$\Theta_{lk} = \theta_{lksp}u_{s,p} + \varsigma_{lkp}\psi_{,p}, \tag{4.3}$$

$$\beta_l = \varsigma_{lsp}u_{s,p} - \eta_{lp}\psi_{,p},$$

где

$$\theta_{lksp} = \frac{\partial\chi}{\partial S_{lp}}\,\delta_{ks} + H^{qm}_{ks}\,\frac{\partial^2\chi}{\partial S_{lq}\,\partial S_{mp}},$$

$$\varsigma_{lsp} = -\,H^n_s\,\frac{\partial^2\chi}{\partial S_{ln}\,\partial V_p}, \tag{4.4}$$

$$\eta_{lp} = \varepsilon_0 J_1\, g^*_{lp} - \frac{\partial^2\chi}{\partial V_l\,\partial V_p}\,.$$

Здесь g^*_{lp} – компоненты тензора $\mathbf{G}_1^{-1} = \mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_1^{-1}$. Участвующие в представлении (4.4) метрические множители H^{ql}_{kp}, H^n_p, а также g^*_{lp} являются комбинациями произведений градиентов деформации и записываются в виде

$$H^{ql}_{kp} = \frac{\partial X^1_k}{\partial a_q}\frac{\partial X^1_p}{\partial a_l},\ \ H^n_p = \frac{\partial X^1_p}{\partial a_n},$$

$$g^*_{lp} = (H^l_k H^p_k)^{-1} = \frac{\partial a_l}{\partial X^1_k}\frac{\partial a_p}{\partial X^1_k}\,.$$

5. СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Ниже исследуются магнитоупругие среды с прямолинейными границами (полупространство, слой, слоистое полупространство) в предположении, что среда подвержена однородной начальной деформации:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda},\ \mathbf{G} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \delta_{ij}\,\nu_i\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j,\ \ \nu_i = \mathrm{const}.$$

Здесь $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ – радиусы-векторы точки среды в начально-деформированном и естественном состоянии соответственно, $\nu_i = 1 + \delta_i$, δ_i – относительные удлинения волокон, направленных в естественной конфигурации вдоль осей a_i, $i = 1,2,3$, совпадающих с декартовыми координатами, δ_{ij} – символ Кронекера. Из формулы (4.1) следует представление компонент тензора $\mathbf{S}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}(\nu_i^2 - 1)\,.$$

Участвующие в представлении (4.4) метрические множители имеют вид

$$H^{ql}_{ks} = \delta_{qk}\,\delta_{ls}\,\nu_k\,\nu_s,\ \ H^n_s = \delta_{ns}\,\nu_s,$$

$$g^*_{km} = \delta_{km}\,\nu_m^{-2},\ \ J_1 = \nu_1\,\nu_2\,\nu_3\,.$$

При конкретизации начально-деформированного состояния целесообразно использовать компонентное представление термодинамического потенциала [3]:

$$\chi = \frac{1}{2}\,c_{qjkl}S_{qj}S_{kl} - f_{jkl}\,V_j\,S_{kl} -$$

$$-\,\frac{1}{2}\,\gamma_{qj}\,V_q\,V_j + \frac{1}{6}\,c_{mnqjkl}S_{mn}S_{qj}S_{kl}$$

Здесь c_{qjkl} – компоненты тензора упругих констант II порядка, который характеризует линейную деформацию при постоянной температуре и магнитном поле, c_{mnqjkl} – компоненты тензора VI ранга, который характеризует нелинейную деформацию при постоянной температуре и магнитном поле, f_{jkl} – компоненты тензора пьезомагнитных констант

II порядка, связанные с магнитоакустическими эффектами (изменение скорости акустических волн под действием приложенного магнитного поля), γ_{qj} – компоненты тензора II ранга констант магнитной восприимчивости.

Далее введем обозначения

$$P_{lp} = \frac{\partial \chi}{\partial S_{lp}} = c_{qjlp} S_{qj} - f_{jlp} V_j + \frac{1}{2} c_{mnqjlp} S_{mn} S_{qj},$$

$$c^{\times}_{qjlp} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial S_{lp} \partial S_{ij}} = c_{qjlp} + \frac{1}{2} c_{mnqjlp} S_{mn}.$$

Здесь P_{lp} – компоненты тензора Кирхгофа, $c^{\times}_{qjlp}$ – упругие константы, зависящие как от свойств материала, так и от вида начального напряженного состояния среды. Выражения для пьезомагнитных констант и констант магнитной восприимчивости в рамках сделанных предположений о малой величине магнитного поля не изменяются и имеют вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial S_{lp} \partial V_n} = -f_{nlp}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial V_l \partial V_p} = -\gamma_{lp}.$$

В этих обозначениях коэффициенты (4.4) в представлениях линеаризованных тензора напряжений и вектора магнитной индукции (4.3) приобретают вид

$$\begin{gathered} \theta_{lksp} = P_{lp}\, \delta_{ks} + \nu_k\, \nu_s\, c^{\times}_{lksp}, \\ \varsigma_{lsp} = \nu_s f_{lsp}, \\ \eta_{lp} = \mu_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3\, \nu_l^{-2} \delta_{lp} + \gamma_{lp}. \end{gathered} \tag{5.1}$$

При фиксированной начальной деформации эти коэффициенты являются постоянными, зависящими от вида начального напряженного состояния и величины начальной деформации. Их представление для рассматриваемых ниже пьезомагнитных сред класса $6mm$ будет приведено ниже.

Для единообразия дальнейших выкладок обозначим

$$c^{*}_{lksp} = \theta_{lksp}, \; f^{*}_{lkp} = \varsigma_{lkp}, \; \gamma^{*}_{lp} = \eta_{lp}. \tag{5.2}$$

В этих обозначениях краевая задача о колебаниях преднапряженной магнитоупругой среды в декартовой системе координат описывается уравнениями движения

$$c^{*}_{lksp} u_{s,pl} + f^{*}_{lkp}\, \psi_{,pl} = \rho \ddot{u}_k, \quad k = 1,2,3,$$

уравнением вынужденной магнитостатики

$$f^{*}_{lsp} u_{s,pl} - \gamma^{*}_{lp}\, \psi_{,pl} = 0,$$

механическими граничными условиями

$$u_k = u^{*}_k(a_1, a_2, a_3), \; (a_1, a_2, a_3) \in o_1,$$

$$c^{*}_{3ksp} u_{s,p} + f^{*}_{3kp} \psi_{,p} = t^{*}_k(a_1, a_2, a_3), \; (a_1, a_2, a_3) \in o_2,$$

и магнитными условиями

$$\psi = \psi^{*}(a_1, a_2, a_3), \; (a_1, a_2, a_3) \in o_3,$$

$$f^{*}_{3kp} u_{k,p} - \gamma^{*}_{3p} \psi_{,p} = 0, \; (a_1, a_2, a_3) \in o_4.$$

Перепишем представление констант (5.1) с учетом обозначений (5.2):

$$\begin{gathered} c^{*}_{lksp} = P_{lp}\delta_{ks} + \nu_k \nu_s\, c^{\times}_{lksp}, \\ f^{*}_{lsp} = \nu_s f_{lsp}, \\ \gamma^{*}_{lp} = \mu_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3\, \nu_l^{-2} \delta_{lp} + \gamma_{lp}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Матрица, определяющая связь между упругими $(\Theta_{km}, u_{k,m})$ и магнитными $(\beta_n, \psi_{,n})$ параметрами пьезомагнетика класса $6mm$, традиционно представляется в виде

$$\left(\begin{array}{c|ccccccccc}
 & u_{1,1} & u_{2,2} & u_{3,3} & u_{2,3} & u_{1,3} & u_{1,2} & \psi_{,1} & \psi_{,1} & \psi_{,3} \\
\Theta_{11} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{31} \\
\Theta_{22} & c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{32} \\
\Theta_{33} & c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{33} \\
\Theta_{23} & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & f_{24} & 0 \\
\Theta_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & f_{15} & 0 & 0 \\
\Theta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\
\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\
\beta_2 & 0 & 0 & 0 & f_{24} & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{22} & 0 \\
\beta_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{33}
\end{array}\right), \tag{5.4}$$

Использована индексация упругих и пьезомагнитных констант

$$c_{lksp} \Rightarrow c_{\alpha\beta}, \; f_{lkp} \Rightarrow f_{l\alpha}$$

и правило перехода к свернутой системе индексов:

$$lk \to \alpha, \; 11 \to 1, \; 22 \to 2, \; 33 \to 3,$$
$$23 \to 4, \; 13 \to 5, \; 12 \to 6.$$

В представлении (5.4) имеют место соотношения, характерные для материалов $6mm$:

$$c_{22} = c_{11}, \; c_{23} = c_{13}, \; c_{55} = c_{44},$$

$$c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2},$$

$$f_{32} = f_{31}, \; f_{24} = f_{15}, \; \gamma_{22} = \gamma_{11}.$$

Для анализа влияния преднапряжений на симметрию кристалла запишем матрицу связи (5.4) в расширенном виде

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & u_{1,1} & u_{2,2} & u_{3,3} & u_{2,3} & u_{3,2} & u_{1,3} & u_{3,1} & u_{1,2} & u_{2,1} & \psi_{,1} & \psi_{,2} & \psi_{,3} \\
\hline
\Theta_{11} & c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{311} \\
\Theta_{22} & c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{322} \\
\Theta_{33} & c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{333} \\
\Theta_{23} & 0 & 0 & 0 & c_{2323} & c_{2332} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{223} & 0 \\
\Theta_{32} & 0 & 0 & 0 & c_{3223} & c_{3232} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{232} & 0 \\
\Theta_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1331} & 0 & 0 & f_{113} & 0 & 0 \\
\Theta_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1331} & 0 & 0 & f_{131} & 0 & 0 \\
\Theta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1212} & c_{1221} & 0 & 0 & 0 \\
\Theta_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2112} & c_{2121} & 0 & 0 & 0 \\
\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{113} & f_{131} & 0 & 0 & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\
\beta_2 & 0 & 0 & 0 & f_{223} & f_{232} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{22} & 0 \\
\beta_3 & f_{311} & f_{322} & f_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{33}
\end{array}\right).$$

Здесь в силу свойств материала выполняются соотношения

$$c_{ijij} = c_{ijji} = c_{jiij} = c_{jiji},\ i = 1, 2, j = 2, 3,$$

$$c_{2323} = c_{1313} = c_{44}, c_{1212} = c_{66},$$

$$f_{311} = f_{322} = f_{31},\ f_{223} = f_{232} = f_{24},\ f_{113} = f_{131} = f_{15},$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22}.$$

Выпишем коэффициенты матрицы с учетом (5.3) и свойств материала (в отсутствие упругих коэффициентов III порядка):

$$c^*_{1111} = P_{11} + \nu_1^2 c_{11},\ c^*_{1122} = \nu_1\, \nu_2\, c_{12},\ c^*_{1133} = \nu_1\, \nu_3\, c_{13},$$

$$c^*_{2211} = c^*_{1122},\ c^*_{2222} = P_{22} + \nu_2^2 c_{11}, c^*_{2233} = \nu_2\, \nu_3\, c_{13},$$

$$c^*_{3311} = c^*_{1133}, c^*_{3322} = c^*_{2233}, c^*_{3333} = P_{23} + \nu_3^2 c_{33},$$

$$c^*_{ijij} = \nu_i\, \nu_j\, c_{44}, c^*_{ijji} = P_{ii} + \nu_j^2 c_{44},$$

$$c^*_{jiij} = P_{jj} + \nu_i^2 c_{44},\ c^*_{jiji} = \nu_i\, \nu_j\, c_{44},\ i = 2, 1;\ j = 3,$$

$$c^*_{ijij} = \nu_i\, \nu_j\, c_{66},\ c^*_{ijji} = P_{ii} + \nu_j^2 c_{66}, c^*_{jiij} =$$

$$= P_{jj} + \nu_i^2 c_{66},\ c^*_{jiji} = \nu_i\, \nu_j\, c_{66},\ i = 1,\ j = 2.$$

Для пьезомагнитных коэффициентов в первых девяти строках матрицы (использовано $f_{pls} = f_{lsp}$):

$$f^{\theta^*}_{ii3} = \nu_i f_{3ii} = \nu_i f_{3i},\ i = 1, 2, 3,$$

$$f^{\theta^*}_{232} = \nu_3 f_{223} = \nu_3 f_{24},\ f^{\theta^*}_{322} = \nu_2 f_{232} = \nu_2 f_{24},$$

$$f^{\theta^*}_{131} = \nu_3 f_{113} = \nu_3 f_{15},\ f^{\theta^*}_{311} = \nu_1 f_{131} = \nu_1 f_{15}.$$

Для пьезомагнитных коэффициентов последних трех строк матрицы:

$$f^{\beta^*}_{3ii} = \nu_i f_{3i},\ i = 1,2,3,$$

$$f^{\beta^*}_{223} = \nu_2 f_{24},\ f^{\beta^*}_{232} = \nu_3 f_{24},$$

$$f^{\beta^*}_{113} = \nu_1 f_{15},\ f^{\beta^*}_{131} = \nu_3 f_{15}.$$

С учетом выписанных соотношений матрица связи в НДС принимает вид

$$\left(\begin{array}{c|cccccccccccc}
* & u_{1,1} & u_{2,2} & u_{3,3} & u_{2,3} & u_{3,2} & u_{1,3} & u_{3,1} & u_{1,2} & u_{2,1} & \psi_{,1} & \psi_{,2} & \psi_{,3} \\
\hline
\Theta^*_{11} & c^*_{1111} & c^*_{1122} & c^*_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{311} \\
\Theta^*_{22} & c^*_{1122} & c^*_{2222} & c^*_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{322} \\
\Theta^*_{33} & c^*_{1133} & c^*_{2233} & c^*_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{333} \\
\Theta^*_{23} & 0 & 0 & 0 & c^*_{2323} & c^*_{2332} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{232} & 0 \\
\Theta^*_{32} & 0 & 0 & 0 & c^*_{3223} & c^*_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{223} & 0 \\
\Theta^*_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^*_{1313} & c^*_{1331} & 0 & 0 & f^*_{131} & 0 & 0 \\
\Theta^*_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^*_{3113} & c^*_{1313} & 0 & 0 & f^*_{113} & 0 & 0 \\
\Theta^*_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^*_{1212} & c^*_{1221} & 0 & 0 & 0 \\
\Theta^*_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^*_{2112} & c^*_{1212} & 0 & 0 & 0 \\
\beta^*_{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^*_{113} & f^*_{131} & 0 & 0 & -\gamma^*_{11} & 0 & 0 \\
\beta^*_{2} & 0 & 0 & 0 & f^*_{223} & f^*_{232} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^*_{22} & 0 \\
\beta^*_{3} & f^*_{311} & f^*_{322} & f^*_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^*_{33}
\end{array}\right).$$

Использованы обозначения

$$f^*_{ksp} = f^{\beta^*}_{ksp}, \; k, s, p = 1,2,3.$$

Из сравнения матриц связи видно, что любое начальное механическое воздействие выводит рассматриваемый материал из исходного класса симметрии. Кроме того, представляется нецелесообразным использование сокращенной формы представления матриц связи в преднапряженном состоянии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-08-00884-а, 12-01-00811-а, 12-08-01040-а), Программы Президиума РАН № 25П.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
2. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И., Евдокимова О.В.* Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей // Вестник Южного научного центра РАН. 2006. Т. 2. № 1. С. 16–23.
3. *Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинчук В.В.* Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля // Вестник Южного научного центра РАН. 2007. Т. 3. № 4. С. 19–25.
4. *Acharya D.P., Roy I., Sengupta S.* Effect of magnetic field and initial stress on the propagation of interface waves in transversely isotropic perfectly conducting media // Acta mechanica. 2009. Vol. 202. P. 35–45.
5. *Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н.* Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд-во ЕГУ, 2006. 492 с.
6. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

DYNAMICS EQUATIONS FOR PRESTRESSED MAGNETOELASTIC MEDIUM

V.V. Kalinchuk, T.I. Belyankova, D.N. Sheydakov

Within the framework of the material (Lagrangian) coordinate system, the sequential linearization of constitutive relations is carried out for nonlinear mechanics of electromagnetoelastic medium subject to the initial stresses. The final expressions, describing the motion of a prestressed magnetoelastic medium, are constructed without regard to the choice of the curvilinear coordinate system, and represented in a compact form, suitable for the theoretical and applied studies. In the case of a rectangular Cartesian coordinate system, the constitutive equations are derived for motion of magnetoelastic prestressed medium. The effect of the initial stresses on piezomagnetics of 6mm Class is studied.

Key words: electromagnetic medium, magnetoelasticity, linearization, prestresses, initial strain.

REFERENCES

1. Maugin G.A. 1988. *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. Amsterdam, North Holland: 598 p.

2. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Evdokimova O.V. 2006. [Constitutive relations for dynamics of prestressed piezoactive medium in the absence of external electric fields]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 2(1): 16–23. (In Russian).

3. Evdokimova O.V., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2007. [Dynamics equations for prestressed piezoactive medium in the presence of an external electrostatic field]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 3(4): 19–25. (In Russian).

4. Acharya D.P., Roy I., Sengupta S. 2009. Effect of magnetic field and initial stress on the propagation of interface waves in transversely isotropic perfectly conducting media. *Acta mechanica*. 202: 35–45.

5. Bagdasaryan G.E., Danoyan Z.N. 2006. *Elektromagnitouprugie volny*. [*Electromagnetoelastic waves*]. Erevan, Yerevan State University Publishers: 492 p. (In Russian).

6. Nowacki W. 1986. *Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh.* [*Electromagnetic effects in solid bodies*]. M., “Mir”: 160 p. (In Russian).

7. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.