МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.23885/2500-0640-2018-14-1-21-28

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

© 2018 г. Д.Н. Шейдаков[1], Т.И. Белянкова[1], Н.Е. Шейдаков[2], В.В. Калинчук[1]

Аннотация. В рамках теории наложения малых деформаций на конечную проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики термоупругой сплошной среды. В процессе преобразований была использована материальная система координат Лагранжа, связанная с естественной конфигурацией тела. Предполагалось, что начальное напряженное состояние термоупругого полуограниченного тела обусловлено как воздействием механических усилий, так и влиянием температуры (преднагрев). В линеаризованных тензорах напряжений Пиолы и Кирхгофа, участвующих в уравнениях движения и граничных условиях, удержаны все члены, которые содержат высшие степени начальной деформации и квадраты температуры. Выражения, определяющие линеаризованный закон состояния преднапряженной среды, а также линеаризованные уравнения, описывающие движение термоупругой среды при больших начальных деформациях, представлены в тензорном виде с последующим переходом к компонентному представлению всех соотношений в цилиндрической ортогональной системе координат. Для конкретной формы термоупругого потенциала при однородной начальной деформации приведены окончательные выражения, определяющие линеаризованный закон состояния преднапряженной среды, а также линеаризованные уравнения, описывающие движение термоупругой среды при больших начальных деформациях. Полученные представления позволяют эффективно исследовать влияние начальных напряжений и температуры на характеристики динамического процесса в термоупругом цилиндре.

Ключевые слова: преднапряженный термоупругий цилиндр, начальная деформация, начальные напряжения, предварительный нагрев, термодинамический потенциал, термоупругие волны.

EQUATIONS OF DYNAMICS FOR PRESTRESSED THERMOELASTIC CYLINDER

D.N. Sheydakov[1], T.I. Belyankova[1], N.E. Sheydakov[2], V.V. Kalinchuk[1]

Within the theory of small deformations superposed on a finite one, a step-by-step linearization of the constitutive relations for the nonlinear mechanics of a thermoelastic medium is carried out using a cylindrical coordinate system. In the transformations, the Lagrangian material coordinate system, connected with the natural configuration of the body, is used. It is assumed that the initial stress state of a thermoelastic semibounded body is both due to the action of mechanical forces and the effect of temperature (preheating). In the linearized Piola and Kirchhoff stress tensors involved in the equations of motion and boundary conditions, all terms that contain higher degrees of initial deformation and squares of temperature are retained. The expressions that determine the linearized constitutive law of a prestressed medium, as well as the linearized equations describing the motion of a thermoelastic medium with large initial deformations, are presented in the tensor form with the subsequent transition to the component representation of all relations in a cylindrical orthogonal coordinate system. For the specific form of the thermoelastic potential and for homogeneous initial deformation, the final expressions that determine the linearized constitutive law of the prestressed medium are given, as well as the linearized equations describing the motion of the thermoelastic medium with large initial deformations. The obtained results make it possible to effectively study the influence of initial stresses and temperature on the characteristics of dynamic process in a thermoelastic cylinder.

Keywords: prestressed thermoelastic cylinder, initial deformation, initial stresses, preheating, thermodynamic potential, thermoelastic waves.

[1] Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

[2] Ростовский государственный экономический университет (Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы распространения гармонических волн в цилиндрических термоупругих телах изучались многими авторами [1–10]. Распространение продольных термоупругих волн обсуждалось в работах [1; 2]. В статьях [3; 4] исследовались термодиффузионные процессы. В публикациях [5; 6] изучались особенности распространения осесимметричных термоупругих волн в цилиндрических панелях. В работах [7; 8] были рассмотрены внешние задачи распространения термоупругих волн в полупространстве с цилиндрической полостью. В статьях [9; 10] исследована проблема распространения термоупругих волн в цилиндрических телах, погруженных в жидкость. Начальные напряжения в указанных публикациях не учитывались. Определяющие соотношения динамики преднапряженной термоупругой среды с прямолинейными границами построены в работе [11]. Была проведена последовательная линеаризация соотношений нелинейной механики термоупругой среды в декартовой системе координат Лагранжа, связанной с естественной конфигурацией тела. На основе полученных определяющих соотношений в публикациях [12–15] исследованы особенности распространения термоупругих волн в предварительно напряженном слое [12–14] и полупространстве [15]. В статье [16] построена функция Грина для термоупругого предварительно напряженного полупространства с неоднородным покрытием. Приведенные в этой публикации соотношения позволяют исследовать широкий спектр проблем распространения волн в термоупругих неоднородных предварительно напряженных средах с прямолинейными границами.

В настоящей работе построены определяющие соотношения динамики преднапряженного термоупругого цилиндра. Как и в работе [11], в ходе их вывода предполагалось, что начальное напряженное состояние цилиндра обусловлено как воздействием механических усилий, так и влиянием температуры (преднагрев). В линеаризованных уравнениях движения и граничных условиях удержаны все члены, которые содержат квадраты температуры. Окончательные выражения, определяющие линеаризованный закон состояния преднапряженной среды, а также линеаризованные уравнения, описывающие движение термоупругого цилиндра при больших начальных деформациях, построены в цилиндрической системе координат. В работе представлен их вид для конкретной формы термоупругого потенциала при однородной начальной деформации.

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Нелинейные свойства термоупругого материала определяются формулами:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{S}}, \quad \eta = -\frac{\partial \chi}{\partial \theta},$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{E}), \quad \mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}), \quad \mathbf{g} = \overset{\circ}{\nabla} \theta,$$

где $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{P}$ – тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа, $\mathbf{h}$ – вектор потока тепла, η – удельная энтропия (на единицу объема), $\chi = \chi(\mathbf{S},\theta)$ – удельная свободная энергия термоупругого тела, $\mathbf{S}$ – тензор деформации Коши – Грина, $\mathbf{G}$ – мера деформации Коши – Грина, $\mathbf{C}$ – градиент деформации, $\mathbf{g}$ – градиент температуры, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор частицы деформированного тела, θ – температура тела, $\overset{\circ}{\nabla}$ – набла-оператор в отсчетной конфигурации, $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Уравнения движения и теплопроводности нелинейного материала в общем случае имеют вид:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \qquad (1.2)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{h} - \rho_0 r + \theta \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \qquad (1.3)$$

Здесь ρ_0 – плотность недеформированного тела, $\mathbf{b}$ – вектор интенсивности массовых сил, $\mathbf{w} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ – вектор перемещений ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы тела в недеформированной конфигурации), $\rho_0 r$ – интенсивность объемных источников тепла.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Пусть существует некоторое начальное деформированное и предварительно нагретое состояние термоупругого тела. Полагаем, что величины, характеризующие это состояние, не зависят явно от времени:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}), \ \theta = \theta(\mathbf{r}). \qquad (2.1)$$

Согласно уравнениям (1.2) и (1.3), при отсутствии массовых сил и объемных источников тепла такое состояние описывается уравнениями

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi} = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{2.2}$$

Далее предположим, что под действием некоторых массовых и поверхностных сил телу придается малое возмущение начального состояния (2.1) (характеристики возмущенного состояния будем обозначать индексом $^{\times}$):

$$\mathbf{R}^{\times} = \mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{u},\ \mathbf{w}^{\times} = \mathbf{R}^{\times} - \mathbf{r} = \mathbf{w} + \varepsilon\mathbf{u},\ \theta^{\times} = \theta + \varepsilon T. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор добавочных перемещений, T – добавочная температура, ε – малый параметр. Для тензора напряжений Пиолы, удельной энтропии и вектора потока тепла справедливы следующие представления:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi}^{\times} = \mathbf{\Pi} + \varepsilon\mathbf{\Pi}^{\bullet} + o(\varepsilon^2),\\ \eta^{\times} = \eta + \varepsilon\eta^{\bullet} + o(\varepsilon^2),\\ \mathbf{h}^{\times} = \mathbf{h} + \varepsilon\mathbf{h}^{\bullet} + o(\varepsilon^2).\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{\Pi}^{\bullet}$ – линеаризованный тензор напряжений Пиолы, $\eta^{\bullet}$ – линеаризованная энтропия, $\mathbf{h}^{\bullet}$ – линеаризованный вектор потока тепла, которые вычисляются по формуле [17]:

$$\mathbf{\Pi}^{\bullet} = \frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{\Pi}(\mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{u}, \theta + \varepsilon T)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Согласно (1.2) и (1.3), возмущенное состояние описывается уравнениями:

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi}^{\times} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{w}^{\times}}{\partial t^2}, \tag{2.5}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{h}^{\times} + \theta^{\times}\frac{\partial\eta^{\times}}{\partial t} = 0. \tag{2.6}$$

Используя соотношения (2.3) и (2.4), линеаризуем уравнение движения (2.5) и уравнение теплопроводности (2.6) в окрестности начального состояния:

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{\Pi}^{\bullet} = \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{2.7}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{h}^{\bullet} + \theta\frac{\partial\eta^{\bullet}}{\partial t} = 0. \tag{2.8}$$

Линеаризованные тензор напряжений Пиолы, удельная энтропия и вектор потока тепла определяются соотношениями [11; 17]:

$$\mathbf{\Pi}^{\bullet} = \mathbf{P}^{\bullet}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{P}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}, \quad \mathbf{P}^{\bullet} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{S}}\circ\mathbf{S}^{\bullet} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\theta}T, \tag{2.9}$$

$$\eta^{\bullet} = \frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{C}}\circ\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}T = -\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial\theta}\circ\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}T, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{h}^{\bullet} = \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{C}}\circ\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\theta}T + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{g}}\cdot\overset{\circ}{\nabla}T, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{S}^{\bullet} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\bullet}, \quad \mathbf{G}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}.$$

Символом «○» обозначена операция полного умножения, которая для двух тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ранга p и q соответственно определяется формулой ($p \geq q$):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\circ\mathbf{B} &= A_{i..jk..l}\underbrace{\mathbf{e}_i..\mathbf{e}_j}_{p-q}\underbrace{\mathbf{e}_k..\mathbf{e}_l}_{q}\circ B_{m..n}\underbrace{\mathbf{e}_m..\mathbf{e}_n}_{q} =\\ &= A_{i..jk..l}B_{m..n}(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_m)..(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_n)\underbrace{\mathbf{e}_i..\mathbf{e}_j}_{p-q},\end{aligned}$$

где $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{3}$ – некоторый векторный базис в трехмерном евклидовом пространстве, $A_{i..jk..l}$ и $B_{m..n}$ – компоненты тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в этом базисе.

Линеаризованное уравнение теплопроводности (2.8) с учетом представления (2.10) примет вид:

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{h}^{\bullet} + \kappa\frac{\partial T}{\partial t} - \theta\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial\theta}\circ\overset{\circ}{\nabla}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right) = 0,\\ \kappa = \theta\frac{\partial\eta}{\partial\theta}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь κ – теплоемкость при постоянной деформации.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим представление удельной свободной энергии термоупругого тела:

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{2}({}^4\mathbf{C}\circ\mathbf{S})\circ\mathbf{S} + \frac{1}{6}\left(({}^6\mathbf{C}\circ\mathbf{S})\circ\mathbf{S}\right)\circ\mathbf{S} -\\ &- \frac{1}{2}c\rho_0\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\theta_0} - (\theta-\theta_0)\mathbf{Q}\circ\mathbf{S}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь ${}^4\mathbf{C}$ – тензор упругих коэффициентов II порядка (характеризует линейную деформацию при постоянной температуре), ${}^6\mathbf{C}$ – тензор упругих коэффициентов III порядка (характеризует нелинейную деформацию при постоянной температуре), $\mathbf{Q}$ – тензор коэффициентов термоупругости, $\boldsymbol{c}$ – удельная теплоемкость, θ_0 – температура тела в недеформированном состоянии.

Для потенциала (3.1) из соотношений (1.1) получим:

$$\begin{gathered}\mathbf{P} = {}^4\mathbf{C}\circ\mathbf{S} + \frac{1}{2}({}^6\mathbf{C}\circ\mathbf{S})\circ\mathbf{S} - (\theta-\theta_0)\mathbf{Q},\\ \mathbf{\Pi} = \left({}^4\mathbf{C}\circ\mathbf{S} + \frac{1}{2}({}^6\mathbf{C}\circ\mathbf{S})\circ\mathbf{S} - (\theta-\theta_0)\mathbf{Q}\right)\cdot\mathbf{C},\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{S}} = {}^4\mathbf{C} + {}^6\mathbf{C} \circ \mathbf{S}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} = -\mathbf{Q}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \theta} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C},$$
$$\eta = c\rho_0 \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} + \mathbf{Q} \circ \mathbf{S}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{c\rho_0}{\theta_0}.$$

Для определения вектора потока тепла **h** используется формула

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}. \tag{3.3}$$

В общем случае тензор коэффициентов удельной теплопроводности **K** может быть функцией градиента деформации **C**, температуры θ и градиента температуры **g**. В настоящей работе предполагается, что имеет место линейный закон теплопроводности Фурье, то есть тензор **K** является постоянной величиной.

Используя формулы (3.2), из представления (2.9) найдем линеаризованный тензор напряжений Пиолы $\mathbf{\Pi}^\bullet$ для потенциала (3.1):

$$\mathbf{P}^\bullet = \frac{1}{2}\left({}^4\mathbf{C} + {}^6\mathbf{C} \circ \mathbf{S}\right) \circ \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right) - T\mathbf{Q},$$

$$\mathbf{\Pi}^\bullet = \left({}^4\mathbf{C} \circ \mathbf{S} + \frac{1}{2}\left({}^6\mathbf{C} \circ \mathbf{S}\right) \circ \mathbf{S} - (\theta - \theta_0)\mathbf{Q}\right) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \tag{3.4}$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\left({}^4\mathbf{C} + {}^6\mathbf{C} \circ \mathbf{S}\right) \circ \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right) - T\mathbf{Q}\right] \cdot \mathbf{C}.$$

Линеаризованный вектор потока тепла (2.11) с учетом выражения (3.3) записывается следующим образом:

$$\mathbf{h}^\bullet = -\mathbf{K} \cdot \overset{\circ}{\nabla} T. \tag{3.5}$$

С учетом представлений (3.2) и (3.5) линеаризованное уравнение теплопроводности (2.12) примет вид:

$$\frac{1}{\theta} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \left(\mathbf{K} \cdot \overset{\circ}{\nabla} T\right) = \frac{c\rho_0}{\theta_0} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \circ \overset{\circ}{\nabla} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right). \tag{3.6}$$

ОДНОРОДНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим однородную деформацию и предварительный нагрев термоупругого тела в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r}, \ \theta = \theta_1 = \mathrm{const}, \tag{4.1}$$
$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \ \mathbf{\Lambda} = \lambda_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \lambda_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z,$$

где r, φ, z – лагранжевы цилиндрические координаты, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ – ортонормированный векторный базис цилиндрических координат, λ_r, λ_z – кратности удлинений вдоль соответствующих координатных осей, θ_1 – температура тела в начальном деформированном состоянии.

Для единообразия записи введем следующие обозначения:

$$\mathbf{e}_r \sim \mathrm{e}_1, \ \mathbf{e}_\varphi \sim \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_z \sim \mathbf{e}_3,$$
$$r \sim q_1, \ \varphi \sim q_2, \ z \sim q_3.$$

В этом случае выражения для градиента деформации **C** и тензора деформации **S** имеют вид:

$$\overset{\circ}{\nabla} = \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad H_1 = H_3 = 1, \quad H_2 = r,$$

$$\mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} = \lambda_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \lambda_r \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \lambda_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_r, \qquad \lambda_3 = \lambda_z \tag{4.2}$$
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\lambda_r^2 - 1\right)\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{2}\left(\lambda_r^2 - 1\right)\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\left(\lambda_z^2 - 1\right)\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = S_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k,$$
$$S_k = \frac{1}{2}\left({\lambda_k}^2 - 1\right).$$

Здесь H_k $(k = 1,2,3)$ – коэффициенты Ламэ для цилиндрической системы координат. Используя (4.2), выпишем соотношения (3.2), (3.3) в координатной форме:

$$\mathbf{P} = P_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad P_{ij} = C_{ijkk} S_k + \frac{1}{2} C_{ijkkmm} S_k S_m - (\theta_1 - \theta_0) Q_{ij},$$
$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{S}} = \left(C_{ijkl} + C_{ijklmm} S_m\right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l,$$
$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} = -Q_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \tag{4.3}$$
$$\mathbf{\Pi} = \Pi_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \Pi_{ij} = \lambda_j P_{ij},$$
$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial \theta} = -\lambda_j Q_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{h} = 0,$$
$${}^4\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{Q} = Q_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$
$${}^6\mathbf{C} = C_{ijklmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{K} = K_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

При этом следует помнить, что материальные параметры в цилиндрической системе координат C_{ijkl}, C_{ijklmn}, Q_{ij}, K_{ij} в общем случае анизотропии зависят от координаты φ.

Полученное выражение вектора потока тепла **h** удовлетворяет тождественно второму уравнению равновесия (2.2), а из первого уравнения следуют ограничения на симметрию термоупругих свойств цилиндра, необходимые для существования однородной начальной деформации и предварительного нагрева (4.1):

$$\Pi_{21,2} + \Pi_{11} - \Pi_{22} = 0$$
$$\Pi_{22,2} + \Pi_{12} + \Pi_{21} = 0$$
$$\Pi_{23,2} + \Pi_{13} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$P_{12,2} + P_{11} - P_{22} = 0$$
$$P_{22,2} + 2P_{12} = 0$$
$$P_{23,2} + P_{13} = 0$$
$$(...)_{,i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(...).$$

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ ПИОЛЫ И КИРХГОФА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Выражения для градиента вектора добавочных перемещений $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$ и линеаризованной меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}^{\bullet}$ в случае однородной начальной деформации и предварительного нагрева (4.1) имеют вид:

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_z\mathbf{e}_z = u_k\mathbf{e}_k,$$

$$\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi +$$
$$+ \frac{\partial u_z}{\partial z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - u_\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r +$$
$$+ \frac{\partial u_z}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z + \frac{\partial u_r}{\partial z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\varphi =$$
$$= \left(\frac{1}{H_i}u_{j,i} + \frac{1}{H_2}\left(\delta_{i2}\delta_{ij}u_1 - \delta_{i2}\delta_{j1}u_2\right)\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

$$\mathbf{G}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = 2\lambda_r\frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r +$$
$$+ \lambda_r\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - u_\varphi\right)\right)\cdot\left(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r\right) +$$
$$+ 2\frac{\lambda_r}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_r\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi +$$
$$+ \left(\lambda_z\frac{\partial u_z}{\partial r} + \lambda_r\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\left(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_r\right) + 2\lambda_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z +$$
$$+ \left(\frac{\lambda_z}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + \lambda_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)\left(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_\varphi\right) = G^*_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

$$G^*_{ij} = \frac{\lambda_j}{H_i}u_{j,i} + \frac{\lambda_i}{H_j}u_{i,j} +$$
$$+ \frac{\lambda_1}{H_2}\left(2\delta_{i2}\delta_{ij}u_1 - \left(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}\right)u_2\right).$$

Представления линеаризованных тензоров напряжений Пиолы и Кирхгофа (3.4) в цилиндрической системе координат записываются следующим образом:

$$\mathbf{P}^{\bullet} = P^*_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad P^*_{ij} = \left(C_{ijkl} + C_{ijklmm}S_m\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\lambda_k}{H_l}u_{k,l} + \frac{\lambda_1}{H_2}\left(\delta_{k2}\delta_{kl}u_1 - \delta_{k1}\delta_{l2}u_2\right)\right) - TQ_{ij},$$
$$\mathbf{\Pi}^{\bullet} = \Pi^*_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$
$$\Pi^*_{ij} = \lambda_j P^*_{ij} +$$
$$+ P_{il}\left(\frac{1}{H_l}u_{j,l} + \frac{1}{H_2}\left(\delta_{l2}\delta_{lj}u_1 - \delta_{l2}\delta_{j1}u_2\right)\right) = \tag{5.1}$$
$$= C^*_{ijkl}u_{k,l} + B^*_{ijk}u_k - Q^*_{ij}T.$$

Участвующие в соотношении (5.1) коэффициенты имеют вид:

$$C^*_{ijkl} = \left(C_{ijkl} + C_{ijklmm}S_m\right)\frac{\lambda_j\lambda_k}{H_l} +$$
$$+ \left(C_{ilmm}S_m + \frac{1}{2}C_{ilmmnn}S_mS_n - (\theta_1 - \theta_0)Q_{il}\right)\frac{\delta_{jk}}{H_l},$$
$$B^*_{ij1} = \frac{1}{H_2}\left(\lambda_1\lambda_j\left(C_{ij22} + C_{ij22mm}S_m\right) +\right.$$
$$\left. + \left(C_{i2mm}S_m + \frac{1}{2}C_{i2mmnn}S_mS_n - (\theta_1 - \theta_0)Q_{i2}\right)\delta_{j2}\right),$$
$$B^*_{ij2} = -\frac{1}{H_2}\left(\lambda_1\lambda_j\left(C_{ij12} + C_{ij12mm}S_m\right) +\right.$$
$$\left. + \left(C_{i2mm}S_m + \frac{1}{2}C_{i2mmnn}S_mS_n - (\theta_1 - \theta_0)Q_{i2}\right)\delta_{j1}\right),$$
$$B^*_{ij3} = 0, \quad Q^*_{ij} = \lambda_j Q_{ij}.$$

Линеаризованный вектор теплопроводности (3.5) представляется выражением:

$$\mathbf{h}^{\bullet} = -\frac{K_{ij}}{H_j}T_{,j}\mathbf{e}_i.$$

Используя формулы (3.2) и (4.1), выпишем линеаризованные уравнения движения (2.7) и теплопроводности (3.6) в скалярной форме ($j = 1,2,3$):

$$\frac{\Pi^*{}_{ij,i}}{H_i} + \frac{1}{H_2}\left(\Pi^*{}_{1j} + \delta_{j2}\Pi^*{}_{21} - \delta_{j1}\Pi^*{}_{22}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{H_i H_k}\left(K_{ik}T_{,ik}+\left[K_{ik,i}-\frac{\delta_{i1}\delta_{k2}K_{ik}}{H_k}\right]T_{,k}\right)=$$
$$=\frac{\theta_1}{H_i}Q^*_{ik}\left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}+\delta_{i2}\delta_{ik}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\delta_{i2}\delta_{k1}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{c\rho_0\theta_1}{\theta_0}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

После замены

$$C^{**}_{jkl}=\frac{1}{H_l}B^*_{ljk}+\frac{1}{H_1}C^*_{1jkl,1}+$$
$$+\frac{1}{H_2}\left(C^*_{2jkl,2}+C^*_{1jkl}+\delta_{j2}C^*_{21kl}-\delta_{j1}C^*_{22kl}\right)=$$
$$=\frac{1}{H_l}\left(B^*_{ljk}-\delta_{l2}C^*_{1jkl}\right)+$$
$$+\frac{1}{H_2}\left(C^*_{2jkl,2}+C^*_{1jkl}+\delta_{j2}C^*_{21kl}-\delta_{j1}C^*_{22kl}\right),$$
$$B^{**}_{jk}=\frac{1}{H_2}\left(B^*_{2jk,2}+B^*_{1jk}+\delta_{j2}B^*_{21k}-\delta_{j1}B^*_{22k}\right)+$$
$$+\frac{1}{H_1}B^*_{1jk,1}=\frac{1}{H_2}\left(B^*_{2jk,2}+\delta_{j2}B^*_{21k}-\delta_{j1}B^*_{22k}\right),$$
$$Q^{**}_j=\frac{1}{H_2}\left(Q^*_{2j,2}+Q^*_{1j}+\delta_{j2}Q^*_{21}+\delta_{j1}Q^*_{22}\right),$$
$$K^*_{ik}=K_{ik,i}-\frac{\delta_{i1}\delta_{k2}K_{ik}}{H_k}$$

окончательно получим (j = 1,2,3):

$$\frac{1}{H_i}\left(C^*_{ijkl}u_{k,il}-Q^*_{ij}T_{,i}\right)+C^{**}_{jkl}u_{k,l}+$$
$$+B^{**}_{jk}u_k-Q^{**}_jT=\rho_0\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$
$$\frac{1}{H_iH_k}\left(K_{ik}T_{,ik}+K^*_{ik}T_{,k}\right)=\frac{c\rho_0\theta_1}{\theta_0}\frac{\partial T}{\partial t}+$$
$$+\frac{\theta_1}{H_i}Q^*_{ik}\left(\frac{\partial u_{k,i}}{\partial t}+\delta_{i2}\delta_{ik}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\delta_{i2}\delta_{k1}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right).$$

МАТЕРИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – ортонормированный базис декартовой системы координат. Тогда:

$$\mathbf{i}_k=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_k=A_{ik}\mathbf{e}_i,\quad A_{ik}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{Q}=\widetilde{Q}_{kl}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l=\widetilde{Q}_{kl}\left(A_{ik}\mathbf{e}_i\right)\left(A_{jl}\mathbf{e}_j\right)=$$
$$=A_{ik}A_{jl}\widetilde{Q}_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=Q_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$
$$\mathbf{K}=\widetilde{K}_{kl}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l=A_{ik}A_{jl}\widetilde{K}_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=K_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$
$${}^4\mathbf{C}=\widetilde{C}_{mnpq}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q=$$
$$=A_{im}A_{jn}A_{kp}A_{lq}\widetilde{C}_{mnpq}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l=$$
$$=C_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l,$$
$${}^6\mathbf{C}=\widetilde{C}_{pqrstv}\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s\mathbf{i}_t\mathbf{i}_v=$$
$$=A_{ip}A_{jq}A_{kr}A_{ls}A_{mt}A_{nv}\widetilde{C}_{pqrstv}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n=$$
$$=C_{ijklmn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$$
$$\Downarrow$$
$$Q_{ij}=A_{ik}A_{jl}\widetilde{Q}_{kl},\quad K_{ij}=A_{ik}A_{jl}\widetilde{K}_{kl},$$
$$C_{ijkl}=A_{im}A_{jn}A_{kp}A_{lq}\widetilde{C}_{mnpq},$$
$$C_{ijklmn}=A_{ip}A_{jq}A_{kr}A_{ls}A_{mt}A_{nv}\widetilde{C}_{pqrstv}.$$

Здесь $\widetilde{Q}_{kl}$, $\widetilde{K}_{kl}$, $\widetilde{C}_{mnpq}$ и $\widetilde{C}_{pqrstv}$ – материальные параметры в декартовой системе координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики термоупругой среды. Предполагалось, что начальное напряженное состояние термоупругого полуограниченного тела обусловлено как воздействием механических усилий, так и влиянием температуры (преднагрев). Определяющие соотношения, а также линеаризованные уравнения, описывающие движение термоупругой преднапряженной среды при больших начальных деформациях, представлены в тензорном виде, а также в компонентной форме в цилиндрической системе координат.

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания ЮНЦ РАН, № госрегистрации 01201354242.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Suhubi E.S. 1964. Longitudinal vibrations of a circular cylinder coupled with a thermal field. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 12(2): 69–75. doi: 10.1016/0022-5096(64)90010-9
2. Erbay E.S., Suhubi E.S. 1986. Longitudinal wave propagation in a generalized thermoelastic cylinder.

Journal of Thermal Stresses. 9(3): 279–295. doi: 10.1080/01495738608961904

3. Olesiak Z.S., Pyryev Y.A. 1995. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 33(6): 773–780. doi: 10.1016/0020-7225(94)00099-6
4. Aouadi M. 2006. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* 2006: 1–15. doi: 10.1155/IJMMS/2006/25976
5. Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R. 2009. Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 86(5): 296–306. doi: 10.1016/j.ijpvp.2008.12.002
6. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350
7. Nagaya K., Watanabe T. 1984. Wave propagation in an infinite long bar of arbitrary cross section and with a circular cylindrical cavity. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 75(3): 834–841. doi: 10.1121/1.390593
8. Nagaya K., Watanabe T. 1985. Wave propagation in a rod with an arbitrarily shaped outer boundary and a cylindrical cavity of arbitrary shape. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 77(5). 1824–1833. doi: 10.1121/1.391931
9. Venkatesan M., Ponnusamy P. 2002. Wave propagation in a solid cylinder of arbitrary cross-section immersed in fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 112(3): 936–942. doi: 10.1121/1.1499130
10. Venkatesan M., Ponnusamy P. 2003. Wave propagation in a solid cylinder of polygonal cross section immersed in a fluid. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 34(9): 1381–1391.
11. Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинчук В.В. 2008. Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра.* 4(3): 9–15.
12. Калинчук В.В., Суворова Г.Ю., Белянкова Т.И. 2012. Функция Грина термоупругого предварительно напряженного слоя. *Вестник Южного научного центра.* 8(3): 14–20.
13. Суворова Г.Ю., Анджикович И.Е., Калинчук В.В. 2010. Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра.* 6(4): 3–10.
14. Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Суворова Г.Ю. 2012. Об одной динамической контактной задаче для термоупругого предварительно напряженного слоя. *Прикладная математика и механика.* 76(5): 811–822.
15. Калинчук В.В., Леви Г.Ю. 2014. Одна динамическая контактная задача для преднапряженного термоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра*. 10(2): 3–8.
16. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. 2016. Функция Грина для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием. *Прикладная механика и техническая физика.* 57(5): 76–89. doi: 10.15372/PMTF20160509
17. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.

REFERENCES

1. Suhubi E.S. 1964. Longitudinal vibrations of a circular cylinder coupled with a thermal field. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 12(2): 69–75. doi: 10.1016/0022-5096(64)90010-9
2. Erbay E.S., Suhubi E.S. 1986. Longitudinal wave propagation in a generalized thermoelastic cylinder. *Journal of Thermal Stresses*. 9(3): 279–295. doi: 10.1080/01495738608961904
3. Olesiak Z.S., Pyryev Y.A. 1995. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 33(6): 773–780. doi: 10.1016/0020-7225(94)00099-6
4. Aouadi M. 2006. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Mathematics* and *Mathematical Sciences.* 2006: 1–15. doi: 10.1155/IJMMS/2006/25976
5. Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R. 2009. Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 86(5): 296–306. doi: 10.1016/j.ijpvp.2008.12.002
6. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350
7. Nagaya K., Watanabe T. 1984. Wave propagation in an infinite long bar of arbitrary cross section and with a circular cylindrical cavity. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 75(3): 834–841. doi: 10.1121/1.390593
8. Nagaya K., Watanabe T. 1985. Wave propagation in a rod with an arbitrarily shaped outer boundary and a cylindrical cavity of arbitrary shape. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 77(5). 1824–1833. doi: 10.1121/1.391931
9. Venkatesan M., Ponnusamy P. 2002. Wave propagation in a solid cylinder of arbitrary cross-section immersed in fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 112(3): 936–942. doi: 10.1121/1.1499130
10. Venkatesan M., Ponnusamy P. 2003. Wave propagation in a solid cylinder of polygonal cross section immersed in a fluid. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 34(9): 1381–1391.
11. Sheidakov D.N., Belyankova T.I., Sheidakov N.E., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(3): 9–15. (In Russian).
12. Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu., Belyankova T.I. 2012. [The Green function of prestressed thermoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 8(3): 14–20. (In Russian).
13. Suvorova G.Yu., Andjikovich I.E., Kalinchuk V.V. 2010. [Temperature effects in the dynamics of prestressed thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra.* 6(4): 3–10. (In Russian).
14. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 76(5): 537–546. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013

15. Kalinchuk V.V., Levi G.Yu. 2014. [The dynamic contact problem for prestressed thermoelastic half-space]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra.* 10(2): 3–8. (In Russian).
16. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Green's function for a prestressed thermoelastic half-space with an inhomogeneous coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5): 828–840. doi: 10.1134/S0021894416050096
17. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.

Поступила 22.11.2017