

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640180403

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО РАДИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЦИЛИНДРА

© 2018 г. В.А. Лыжов¹, О.В. Бочарова¹, Т.И. Белянкова¹

Аннотация. В работе рассмотрены колебания пьезоэлектрического радиально поляризованного цилиндра. Предложен гибридный численно-аналитический метод, позволяющий получить распределение механических и электрических полей для произвольной функциональной зависимости параметров материала стенки от радиуса в случае осесимметричных колебаний. Задача Коши в цилиндрических координатах после преобразования Фурье приводится к специальному виду, позволяющему построить линейнонезависимую систему функций, удовлетворяющих уравнению движения. Получено интегральное представление общего решения. Разработано программное обеспечение, позволяющее исследовать свойства функции Грина двухслойного электроупругого цилиндра. Приведены результаты численного эксперимента. В качестве материалов выбраны «мягкий» PZT-4 и «жесткий» $Ba_2NaNb_5O_{15}$, значения упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант которых имеют существенные различия. Исследовано влияние структуры стенки цилиндра на области существования и скорости распространения колебаний. Выявлено существенное изменение скорости распространяющейся волны в зависимости от соотношения параметров внешнего и внутреннего слоев. В случае цилиндра с жестким покрытием фазовая скорость выше для всего рассчитанного диапазона частот как для первой, так и для второй моды. Разница значений скорости второй моды для жесткого и мягкого покрытий является наибольшей и достигает 2 раз. Частота появления второй моды также выше в случае жесткого покрытия – 3,0 в безразмерном выражении против значения 1,6 для мягкого покрытия. Выраженность эффекта для ортотропного материала оказалась значительнее, чем в случае аналогичной конфигурации стенки для изотропного упругого цилиндра.

Ключевые слова: пьезоэлектрический цилиндр, функция Грина, осесимметричные колебания, фазовая скорость, дисперсионные характеристики.

DYNAMICS OF A PIEZOELECTRIC RADially POLARIZED CYLINDER

V.A. Lyzhov¹, O.V. Bocharova¹, T.I. Belyankova¹

Abstract. The paper considers oscillations of a piezoelectric radially polarized cylinder. A hybrid numerical-analytical method is proposed; it allows one to obtain the distribution of mechanical and electric fields for an arbitrary functional dependence of the parameters of the wall material on the radius in the case of axisymmetric oscillations. The Cauchy problem in cylindrical coordinates after the Fourier transform is reduced to a special form, allowing to construct a linearly independent system of functions that satisfy the motion equations. An integral representation of the general solution is obtained. Software has been developed that allows to investigate the properties of the Green function of a two-layer electroelastic cylinder. The results of the numerical experiment are presented. The following materials are considered – “soft” PZT-4 and “hard” $Ba_2NaNb_5O_{15}$, the values of elastic, piezoelectric and dielectric constants of which have significant differences. The influence of the wall structure on the regions of existence and the propagation velocity of oscillations is investigated. A significant change in the velocity of the propagating wave was revealed depending on the ratio of the outer and inner layers parameters. In the case of a cylinder with hard coating, the phase velocity is higher for the entire calculated frequency range both for the first and the second modes. The speed of the second mode

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: maggod-rnd@yandex.ru

for a hard coating is twice as high as for the soft one. The frequency of the second mode emergence is also higher in the case of a hard coating – 3.0 in dimensionless value versus 1.6 for a soft coating. The magnitude of this effect for the orthotropic material is greater than for the similar wall configuration for an isotropic elastic cylinder.

Keywords: piezoelectric cylinder, Green function, axisymmetric oscillations, phase velocity, dispersion characteristics.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики цилиндрических тел со сложными свойствами широко представлено в литературе. Учет влияния электрических, магнитных, температурных полей на решения возникающих краевых задач сопровождается известными затруднениями.

Авторы работы [1] исследовали круговой цилиндрический пьезопреобразователь в режиме симметричных и антисимметричных колебаний. Для анализа применены три разных метода – аналитический расчет, моделирование с помощью программного обеспечения COMSOL и эксперимент, – которые дали хорошо согласующиеся результаты для резонансных частот. В статье [2] изучены осесимметричные задачи для электрострикционного полого цилиндра при электрической нагрузке с помощью метода потенциальной функции. Для частных случаев плоской и внеплоскостной электрической нагрузки приведены решения в аналитической форме. В работе [3] осесимметричная плоская задача с помощью метода разделения переменных преобразуется в интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое в свою очередь решено с помощью метода интерполяции.

Свободные колебания бесконечных магнитоупругих цилиндров из композитного материала изучены в статье [4] с помощью метода конечных элементов. В работе [5] разработаны модели для проектирования многослойных композитных цилиндрических преобразователей сэндвичного типа, обсуждается влияние направления поляризации, внутреннего радиуса преобразователей, расстояния между двумя соседними пьезоэлектрическими слоями, числа пьезоэлектрических слоев и параметров материалов на динамическим характеристикам преобразователей. В публикации [6] рассмотрен цилиндрический преобразователь в виде пьезоэлектрического радиально поляризованного цилиндра с металлической тонкостенной оболочкой, исследованы частоты резонансов и антирезонансов, коэффициент электромеханической

связи в случае радиальных колебаний, проведено сравнение с экспериментом.

Часто для построения решения принимают ограничения на вид зависимости материальных параметров от радиуса. В следующих работах предполагается, что материальные параметры изменяются по степенному закону. В статье [7] рассмотрены осесимметричные колебания полого пьезоэлектрического цилиндра, выполнен анализ влияния степени неоднородности на распределение амплитуды смещений бегущих волн для различных мод колебаний. Те же авторы [8] рассматривают задачу о распространении осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре из металлических и радиально поляризованных пьезокерамических слоев. Работа [9] посвящена исследованию поведения цилиндра и сферы во внешнем магнитном поле в рамках линеаризованной теории электромагнитоупругости. В исследовании [10] получено точное решение задачи о радиальных колебаниях функционально-градиентных пьезоэлектрических кольцевых преобразователей.

Анализ многослойных функционально-градиентных пьезоэлектрических цилиндров представлен в работе [11]. Здесь зависимость параметров от радиуса предполагается экспоненциальной. Каждый функционально-градиентный слой моделируется многослойным пакетом вложенных цилиндров малой толщины. Показана сильная зависимость сдвига и напряжений от степени градиентности свойств материала.

В статье [12] получено точное решение для термомагнитоупругого полого цилиндра в однородном магнитном поле в случае одинаковой экспоненциальной зависимости всех материальных констант от радиуса. В работе [13] сложная задача термомагнитоупругости сводится к эквивалентной плоской упругой задаче для некоторой собственной деформации. Исследовано влияние комплексной нагрузки на концентрацию напряжений в электромагнитоупругих композитах.

В данной работе предложен гибридный численно-аналитический метод, позволяющий получить

распределение механических и электрических полей в пьезоэлектрическом цилиндре для произвольной зависимости параметров материала от радиуса в случае осесимметричных колебаний. Подобный подход использовался авторами для исследования упругих цилиндров со сложной структурой стенки [14–18].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат r, φ, z , (рис. 1а). Будем рассматривать установившиеся колебания протяженного полого электроупругого цилиндра $R_0 \leq r \leq R_2$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $|z| < \infty$ с радиальной поляризацией. Уравнения движения электроупругой среды в цилиндрической системе координат имеют вид [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta_{zr}}{\partial z} + \frac{\Theta_{rr} - \Theta_{\varphi\varphi}}{r} + f_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \Theta_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\Theta_{r\varphi}}{r} + f_\varphi &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \Theta_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta_{zz}}{\partial z} + \frac{\Theta_{zr}}{r} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь Θ – тензор напряжений, \mathbf{D} – вектор электрической индукции, \mathbf{u} – смещения точек среды, ρ – плотность, \mathbf{f} – внешняя вынуждающая сила.

В сегнетоэлектрике выражения для компонент тензора Θ и вектора \mathbf{D} в главных осях имеют вид:

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= C_{ijkl} u_{kl} - e_{ijk} E_k, \\ D_i &= e_{ijk} u_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j, \end{aligned}$$

где C_{ijkl} , e_{ijk} и ε_{ij} – соответственно упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические параметрами среды, u_{ij} – механические деформации, \mathbf{E} – напряженность электрического поля.

Учитывая связи между локальными координатами в главных осях x_1, x_2, x_3 и глобальными координатами r, φ, z (рис. 1б) $\vec{e}_r = \vec{e}_3$, $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_1$, $\vec{e}_z = \vec{e}_2$, а также представление тензора деформаций u_{ij} и напряженности \mathbf{E} в случае цилиндрических координат, для материала класса 2mm получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2 u_4}{\partial \varphi^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_4}{\partial r^2} + e_{24} \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + \frac{C_{13} + C_{55}}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \\ + \frac{C_{55}}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \\ + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{e_{33} - e_{31}}{r} \frac{\partial u_4}{\partial r} - \\ - \frac{C_{11} + C_{55}}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\ + \frac{C_{33}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{C_{23} - C_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{C_{11}}{r^2} u_r = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

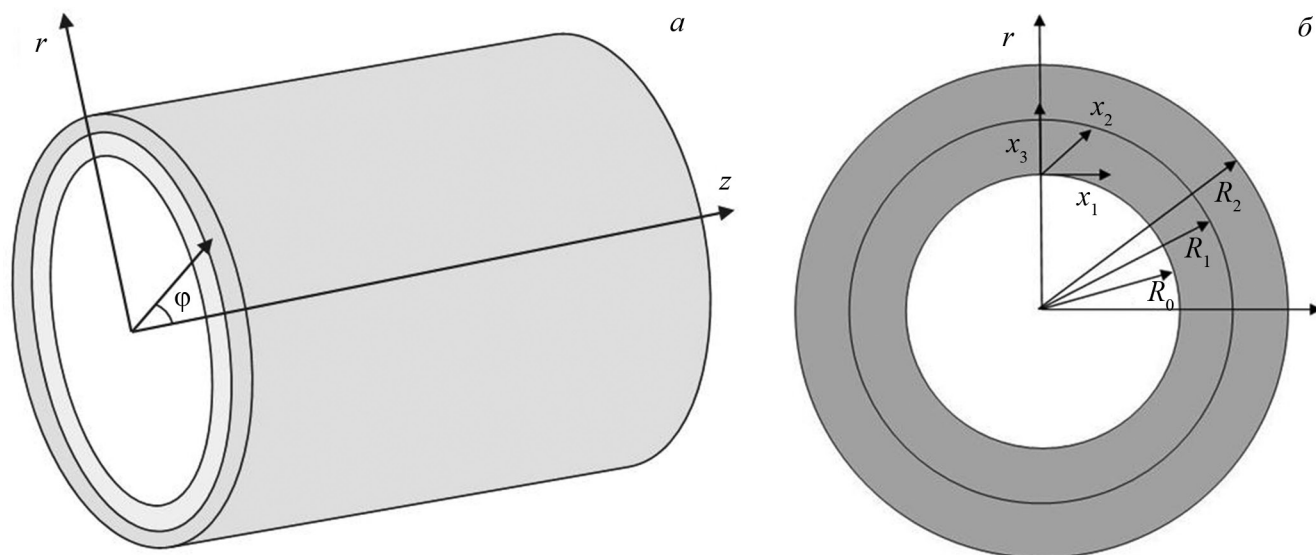


Рис. 1. Геометрия задачи.
Fig. 1. Geometry of the problem.

$$\begin{aligned}
& \frac{e_{15} + e_{31}}{r} \frac{\partial^2 u_4}{\partial r \partial \varphi} + \frac{C_{11}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} - \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + \\
& + C_{66} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{C_{13} + C_{55}}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{C_{12} + C_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + \\
& + \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial u_4}{\partial \varphi} + \frac{C_{55}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{C_{11} + C_{55}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{C_{55}}{r^2} u_\varphi = 0, \\
& (e_{24} + e_{32}) \frac{\partial^2 u_4}{\partial r \partial z} + \frac{C_{12} + C_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \\
& + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{C_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \\
& - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{e_{24}}{r} \frac{\partial u_4}{\partial z} + \\
& + \frac{C_{12} + C_{44}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{C_{44}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \\
& - \frac{\varepsilon_{11}}{r^2} \frac{\partial^2 u_4}{\partial \varphi^2} - \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 u_4}{\partial r^2} - \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} + \\
& + \frac{e_{15} + e_{31}}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \\
& + e_{24} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (e_{24} + e_{32}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{\varepsilon_{33}}{r} \frac{\partial u_4}{\partial r} - \\
& - \frac{e_{15}}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{e_{31} + e_{33}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{e_{32}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь u_4 обозначает электрический потенциал и выступает в качестве компоненты расширенного вектора смещений \mathbf{u} .

Граничные условия: считаем известными механические напряжения и нормальную составляющую электрической индукции на внешней ($r = R_2$) и внутренней ($r = R_0$) поверхностях цилиндра, на границе раздела между слоями 1 и 2 потребуем непрерывности механических полей, потенциала и нормальной компоненты электрической индукции. Величины в слое 1 и 2 различаем с помощью верхнего индекса:

$$\begin{aligned}
\Theta_{rr}^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_2} &= p_1(z) e^{i\omega t}, \\
\Theta_{zr}^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_2} &= p_2(z) e^{i\omega t}, \\
D_r^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_2} &= p_3(z) e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{rr}^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1} &= \Theta_{rr}^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1} \\
\Theta_{zr}^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1} &= \Theta_{zr}^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1} \\
D_r^{(2)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1} &= D_r^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_1}, \quad (2) \\
\Theta_{rr}^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_0} &= p_4(z) e^{i\omega t}, \\
\Theta_{zr}^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_0} &= p_5(z) e^{i\omega t}, \\
D_r^{(1)}(r, z, t) \Big|_{r=R_0} &= p_6(z) e^{i\omega t}.
\end{aligned}$$

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В данном случае компоненты расширенного вектора смещений удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}
u_r &= u_r(r, z, t), \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = u_z(r, z, t), \\
u_4 &= u_4(r, z, t), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = 0.
\end{aligned}$$

Применим преобразование Фурье по координате z . Уравнения движения (1) можно записать в матричной форме:

$$\Lambda \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{U} = \{U_r, U_z, U_4\}$ – Фурье-образ расширенного вектора смещений, Λ – матричный оператор, α – параметр преобразования:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= C_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{C_{33}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{C_{11}}{r^2} - \alpha^2 C_{44} + \rho \omega^2, \\
\Lambda_{12} &= -i\alpha \left[(C_{23} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{C_{23} - C_{12}}{r} \right], \\
\Lambda_{13} &= e_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{e_{33} - e_{31}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \alpha^2 e_{24}, \\
\Lambda_{21} &= -i\alpha \left[(C_{23} + C_{44}) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{C_{12} + C_{44}}{r} \right], \quad (4) \\
\Lambda_{22} &= C_{44} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{C_{44}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \alpha^2 C_{22} + \rho \omega^2, \\
\Lambda_{23} &= -i\alpha \left[(e_{24} + e_{32}) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_{24}}{r} \right], \\
\Lambda_{31} &= e_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{e_{31} + e_{33}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \alpha^2 e_{24}, \\
\Lambda_{32} &= -i\alpha \left[(e_{24} + e_{32}) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_{32}}{r} \right],
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{33} = -\epsilon_{33} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\epsilon_{33}}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2 \epsilon_{22}.$$

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Введем новые неизвестные Y :

$$Y_1 = U_r', \quad Y_2 = i\alpha U_z', \quad Y_3 = U_4', \\ Y_4 = U_r, \quad Y_5 = i\alpha U_z, \quad Y_6 = U_4.$$

Здесь штрих обозначает производную по r . Уравнения движения (3) в новых неизвестных вместе со связями между отдельными неизвестными Y образуют систему:

$$Y' = M(\alpha, r)Y, \tag{5}$$

где элементы матрицы M с учетом обозначений

$$G_1 = \frac{C_{33} + e_{33}}{e_{33}}, \quad G_2 = \frac{e_{33} + \epsilon_{33}}{C_{33} e_{33}}$$

имеют вид:

$$M_{11} = -\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{G_1} \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \right), \\ M_{12} = \frac{1}{G_1} \left(\frac{C_{23} + C_{44}}{e_{33}} + \frac{e_{24} + e_{32}}{\epsilon_{33}} \right), \\ M_{13} = \frac{1}{r} \frac{1}{G_1} \frac{e_{31}}{e_{33}}, \\ M_{14} = \frac{1}{G_1} \left[\frac{1}{r^2} \frac{C_{11}}{e_{33}} + \alpha^2 \left(\frac{C_{44}}{e_{33}} + \frac{e_{24}}{\epsilon_{33}} \right) - \frac{\rho\omega^2}{e_{33}} \right], \\ M_{15} = \frac{1}{r} \frac{1}{G_1} \left(\frac{C_{23} - C_{12}}{e_{33}} + \frac{e_{32}}{\epsilon_{33}} \right), \\ M_{16} = \frac{\alpha^2}{G_1} \left(\frac{e_{24}}{e_{33}} - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} \right), \\ M_{21} = -\alpha^2 \left(\frac{C_{23}}{C_{44}} + 1 \right), \\ M_{22} = -\frac{1}{r}, \\ M_{23} = -\alpha^2 \frac{(e_{24} + e_{32})}{C_{44}}, \\ M_{24} = -\frac{\alpha^2}{r} \left(\frac{C_{12}}{C_{44}} + 1 \right), \\ M_{25} = \frac{\alpha^2 C_{22} - \rho\omega^2}{C_{44}},$$

$$M_{26} = -\frac{\alpha^2}{r} \frac{e_{24}}{C_{44}},$$

$$M_{31} = \frac{1}{r} \frac{1}{G_2} \frac{e_{31}}{e_{33}},$$

$$M_{32} = \frac{1}{G_2} \left(\frac{C_{23} + C_{44}}{C_{33}} - \frac{e_{24} + e_{32}}{e_{33}} \right),$$

$$M_{33} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{G_2} \frac{e_{31}}{C_{33}} - 1 \right),$$

$$M_{34} = \frac{1}{G_2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{C_{11}}{C_{33}} + \alpha^2 \left(\frac{C_{44}}{C_{33}} - \frac{e_{24}}{e_{33}} \right) - \frac{\rho\omega^2}{C_{33}} \right],$$

$$M_{35} = \frac{1}{r} \frac{1}{G_2} \left(\frac{C_{23} - C_{12}}{C_{33}} - \frac{e_{32}}{e_{33}} \right),$$

$$M_{36} = \frac{\alpha^2}{G_2} \left(\frac{\epsilon_{22}}{e_{33}} + \frac{e_{24}}{C_{33}} \right),$$

$$M_{41} = 1,$$

$$M_{4m} = 0, \quad m = 2 \dots 6,$$

$$M_{52} = 1,$$

$$M_{5m} = 0, \quad m = 1, 3 \dots 6,$$

$$M_{63} = 1,$$

$$M_{6m} = 0, \quad m = 1, 2, 4 \dots 6.$$

Представим общее решение системы уравнений (5) в виде разложения по линейно независимой системе функций $y_j(\alpha, r)$:

$$Y_j(\alpha, r) = \sum_{i=1}^6 c_i(\alpha) y_{ij}(\alpha, r), \quad j = 1, 2 \dots 6, \tag{6}$$

где для каждого i функции $y_{ij}(\alpha, r), j = 1 \dots 6$ являются решениями системы (5) с начальными условиями

$$y_{ij}(\alpha, R_0) = Y_j(\alpha, R_0) = \delta_{ij}, \quad j = 1 \dots 6.$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера.

Используя представление общего решения (6) и граничные условия (2), получаем систему для нахождения коэффициентов при функциях $y_j(\alpha, r)$:

$$LC = P, \tag{7}$$

где

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}, \\ P = \{P_1(\alpha), i\alpha P_2(\alpha), P_3(\alpha), P_4(\alpha), i\alpha P_5(\alpha), P_6(\alpha)\}, \\ L_{1n} = C_{33} y_{n1}(\alpha, R_1) + e_{33} y_{n3}(\alpha, R_1) + \\ + \frac{C_{13}}{R_1} y_{n4}(\alpha, R_1) - C_{23} y_{n5}(\alpha, R_1),$$

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

$$\begin{aligned}
 L_{2n} &= C_{44}y_{n2}(\alpha, R_1) + \alpha^2 C_{44}y_{n4}(\alpha, R_1) + \\
 &\quad + \alpha^2 e_{24}y_{n6}(\alpha, R_1), \\
 L_{3n} &= e_{33}y_{n1}(\alpha, R_1) - \varepsilon_{33}y_{n3}(\alpha, R_1) + \\
 &\quad + \frac{e_{31}}{R_1}y_{n4}(\alpha, R_1) - e_{32}y_{n5}(\alpha, R_1), \\
 L_{41} &= C_{33}, \quad L_{43} = e_{33}, \quad L_{44} = \frac{C_{13}}{R_0}, \\
 L_{45} &= -C_{23}, \quad L_{42} = L_{46} = 0, \\
 L_{52} &= C_{44}, \quad L_{54} = \alpha^2 C_{44}, \quad L_{56} = \alpha^2 e_{24}, \\
 L_{51} &= L_{53} = L_{55} = 0, \\
 L_{61} &= e_{33}, \quad L_{63} = -\varepsilon_{33}, \quad L_{64} = \frac{e_{31}}{R_0}, \\
 L_{65} &= -e_{32}, \quad L_{62} = L_{66} = 0.
 \end{aligned}$$

Разрешив систему (7) относительно коэффициентов C , мы получаем интегральное представление (6) для искомого решения краевой задачи (3)–(4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}(z - \xi, r) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \\
 \mathbf{k}(s, r) &= \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, r) e^{-ias} d\alpha,
 \end{aligned}$$

где элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha, r)$ имеют вид

$$K_{mn}(\alpha, r) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^6 \Delta_{nk} y_{km}(\alpha, r),$$

здесь $\Delta_0 = \det \mathbf{L}$, Δ_{nk} – алгебраическое дополнение элемента L_{nk} матрицы \mathbf{L} .

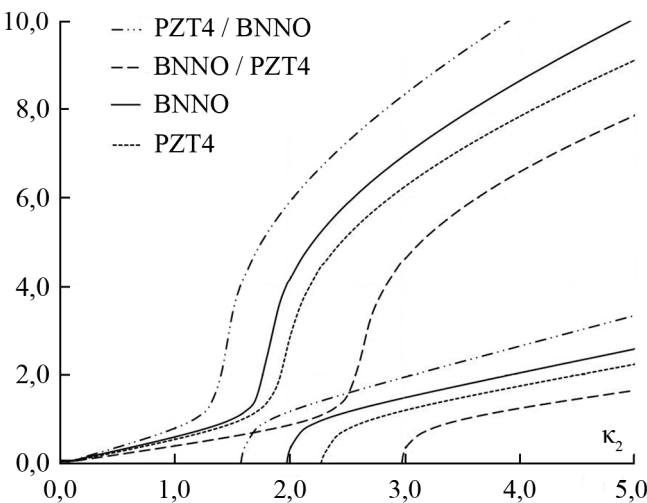


Рис. 2. Дисперсионные диаграммы для электроупругого цилиндра с различной конфигурацией стенки.
Fig. 2. Dispersion diagrams for a piezoelectric cylinder with varied wall configurations.

Исследовано влияние параметров внешнего слоя (покрытия) на дисперсионные свойства цилиндра. В качестве материалов рассмотрены PZT-4 и $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$. Выбор обусловлен существенной разницей значений упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов для указанных материалов. Значения материальных параметров взяты из работы [20]. Расчеты проведены для следующих случаев:

1. PZT4 / BNNO – внутренний слой $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$, внешний слой PZT-4 (мягкое покрытие).
2. BNNO / PZT4 – внутренний слой PZT-4, внешний слой $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ (жесткое покрытие).
3. BNNO – однородный цилиндр $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$.
4. PZT4 – однородный цилиндр PZT-4.

Во всех случаях обезразмеривание произведено с использованием эталонных параметров $C_{44}^* = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho_0^* = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Таким образом, безразмерная плотность $\rho' = \rho / \rho_0^*$. Линейные параметры отнесены к величине внешнего радиуса $l' = l / R_2$. При обезразмеривании пьезоэлектрических и диэлектрических параметров используется вспомогательное значение $\xi = 10^{10} \text{ В/м}$:

$$e'_{ij} = e_{ij} \xi / C_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} \xi^2 / C_{ij}.$$

На рисунке 2 приведены дисперсионные диаграммы для первой и второй мод в указанных случаях. Видна зависимость области существования второй моды от конфигурации стенки цилиндра. Для однородных цилиндров $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ и PZT-4 точка выхода второй моды составляет 2,0 и 2,3 соответственно. В случае жесткого покрытия точка выхода смещается в область высоких частот до значения 3,0, для мягкого покрытия – в область низких частот до 1,6.

На рисунке 3 приведены зависимости фазовых скоростей от безразмерной частоты k_2 . Для разных мод и частотных диапазонов соотношение скоростей имеет одинаковый характер – цилиндру с мягким покрытием соответствует наименьшее значение скорости, далее следуют скорости для однородных $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ и PZT-4, наибольшее значение скорости – у цилиндра с жестким покрытием. В частности, к концу рассчитанного диапазона скорость для однородного $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ выходит на значение 1,93. Для однородного PZT-4 значение скорости 2,23. При этом если взять PZT-4 / $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ (жесткий снаружи), то скорость возрастает до 3,03, а если взять $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ / PZT-4 (мягкий снаружи), то скорость падает до 1,5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численного моделирования показывают, что структура и материальные параметры стенки двухслойного пьезоэлектрического цилиндра оказывают существенно большее влияние на скорости распространения колебаний, чем в случае изотропного упругого цилиндра. Подбирая необходимую конфигурацию стенки цилиндра для одних и тех же материалов, можно добиться двукратного изменения скорости волны и расширения области одномодового режима.

Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН, проект 0256-2018-0003, № государственной регистрации 01201354242, и при частичной поддержке РФФИ (18-38-00871_мол_а, 16-01-00647).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Sun D., Wang S., Hata S., Shimokohbe A. 2010. Axial vibration characteristics of a cylindrical, radially polarized piezoelectric transducer with different electrode patterns. *Ultrasonics*. 50(3): 403–410. doi: 10.1016/j.ultras.2009.09.008
- Jiang Q., Gao C.-F. 2010. Axisymmetric stress in an electrostrictive hollow cylinder under electric loading. *Acta Mechanica*. 211(3–4): 309–321. doi: 10.1007/s00707-009-0228-6
- Hou P.F., Wang H.M., Ding H.J. 2003. Analytical solution for the axisymmetric plane strain electroelastic dynamics of a special non-homogeneous piezoelectric hollow cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 41(16): 1849–1868. doi: 10.1016/S0020-7225(03)00115-0
- Buchanan G.R. 2003. Free vibration of an infinite magneto-electro-elastic cylinder. *Journal of Sound and Vibration*. 268(2): 413–426. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00357-2
- Wang J., Shi Zh. 2016. Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 27(4): 500–511. doi: 10.1177/1045389X15573341
- Liu Sh., Lin Sh. 2009. The analysis of the electro-mechanical model of the cylindrical radial composite piezoelectric ceramic transducer. *Sensors and Actuators A: Physical*. 155(1): 175–180. doi: 10.1016/j.sna.2009.08.019
- Grigorenko A.Ya., Loza I.A. 2017. Axisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder made of a continuously inhomogeneous piezoelectric material. *International Applied Mechanics*. 53(4): 374–380. doi: 10.1007/s10778-017-0821-7
- Grigorenko A.Ya., Loza I.A. 2017. Propagation of axisymmetric electroelastic waves in a hollow layered cylinder under mechanical excitation. *International Applied Mechanics*. 53(5): 562–567. doi: 10.1007/s10778-017-0837-z
- Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. 2007. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder

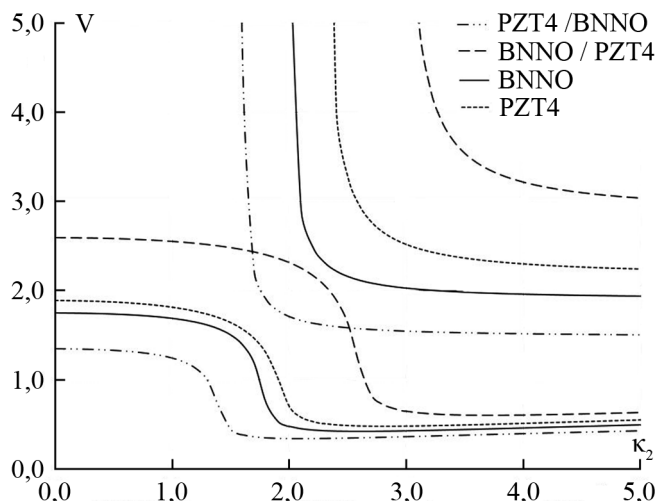


Рис. 2. Дисперсионные диаграммы для электроупругого цилиндра с различной конфигурацией стенки.

Fig. 2. Dispersion diagrams for a piezoelectric cylinder with varied wall configurations.

and sphere. *Acta Mechanica Sinica*. 23(1): 55–63. doi: 10.1007/s10409-006-0047-0

- Wang H.M., Luo D.S. 2016. Exact analysis of radial vibration of functionally graded piezoelectric ring transducers resting on elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*. 40(4): 2549–2559. doi: 10.1016/j.apm.2015.09.108
- Wu C.-P., Tsai T.-C. 2012. Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method. *Applied Mathematical Modelling*. 36(5): 1910–1930. doi: 10.1016/j.apm.2011.07.077
- Dai H.-L., Hong L., Fu Y.-M., Xiao X. 2010. Analytical solution for electromagneto-thermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 34(2): 343–357. doi: 10.1016/j.apm.2009.04.008
- Tong Z.H., Lo S.H., Jiang C.P., Cheung Y.K. 2008. An exact solution for the three-phase thermo-electro-magneto-elastic cylinder model and its application to piezoelectric-magnetic fiber composites. *International Journal of Solids and Structures*. 45(20): 5205–5219. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.04.003
- Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности динамики трехслойного полого цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 4: 19–32.
- Белянкова Т.И., Богомолов А.С., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности волнового поля на поверхности полой цилиндрической трубы с покрытием. *Вестник Южного научного центра*. 11(1): 16–23.
- Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2009. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы. *Прикладная математика и механика*. 73(2): 289–302.
- Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинин В.В. 2009. Торсионные колебания преднапряженного цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 3: 11–17.

18. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинин В.В. 2008. Динамическая контактная задача о крутильных колебаниях жесткого бандажа на поверхности полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. *Вестник Южного научного центра*. 4(4): 9–14.
19. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. 1989. *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость*. Киев, Наукова думка: 280 с.
20. Chen W.Q., Bian Z.G., Lv C.F., Ding H.J. 2004. 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *International Journal of Solids and Structures*. 41(3–4): 947–964. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.036
- and sphere. *Acta Mechanica Sinica*. 23(1): 55–63. doi: 10.1007/s10409-006-0047-0
10. Wang H.M., Luo D.S. 2016. Exact analysis of radial vibration of functionally graded piezoelectric ring transducers resting on elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*. 40(4): 2549–2559. doi: 10.1016/j.apm.2015.09.108
11. Wu C.-P., Tsai T.-C. 2012. Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method. *Applied Mathematical Modelling*. 36(5): 1910–1930. doi: 10.1016/j.apm.2011.07.077
12. Dai H.-L., Hong L., Fu Y.-M., Xiao X. 2010. Analytical solution for electromagnetoelastothermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 34(2): 343–357. doi: 10.1016/j.apm.2009.04.008
13. Tong Z.H., Lo S.H., Jiang C.P., Cheung Y.K. 2008. An exact solution for the three-phase thermo-electro-magneto-elastic cylinder model and its application to piezoelectric–magnetic fiber composites. *International Journal of Solids and Structures*. 45(20): 5205–5219. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.04.003
14. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Features of dynamics of three-layer hollow cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 4: 19–32. (In Russian).
15. Belyankova T.I., Bogomolov A.S., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Specific features of wave field on the surface of a hollow cylindrical tube with a coating]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 11(1): 16–23. (In Russian).
16. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2009. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(2): 209–219. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.04.011
17. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2009. [Torsion oscillations of a stressed cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 3: 11–17. (In Russian).
18. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamic contact problem for torsion oscillations of rigid bandage on surface of hollow cylinder made of functionally graded material]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(4): 9–14. (In Russian).
19. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. 1989. *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktiv. T. 5. Elektrouprugost'*. [Mechanics of coupled fields in the elements of the constructions. V. 5. Electroelasticity]. Kiev, Naukova dumka: 280 p. (In Russian).
20. Chen W.Q., Bian Z.G., Lv C.F., Ding H.J. 2004. 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid. *International Journal of Solids and Structures*. 41(3–4): 947–964. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.036

REFERENCES

1. Sun D., Wang S., Hata S., Shimokohbe A. 2010. Axial vibration characteristics of a cylindrical, radially polarized piezoelectric transducer with different electrode patterns. *Ultrasonics*. 50(3): 403–410. doi: 10.1016/j.ultras.2009.09.008
2. Jiang Q., Gao C.-F. 2010. Axisymmetric stress in an electrostrictive hollow cylinder under electric loading. *Acta Mechanica*. 211(3–4): 309–321. doi: 10.1007/s00707-009-0228-6
3. Hou P.F., Wang H.M., Ding H.J. 2003. Analytical solution for the axisymmetric plane strain electroelastic dynamics of a special non-homogeneous piezoelectric hollow cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 41(16): 1849–1868. doi: 10.1016/S0020-7225(03)00115-0
4. Buchanan G.R. 2003. Free vibration of an infinite magneto-electro-elastic cylinder. *Journal of Sound and Vibration*. 268(2): 413–426. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00357-2
5. Wang J., Shi Zh. 2016. Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 27(4): 500–511. doi: 10.1177/1045389X15573341
6. Liu Sh., Lin Sh. 2009. The analysis of the electro-mechanical model of the cylindrical radial composite piezoelectric ceramic transducer. *Sensors and Actuators A: Physical*. 155(1): 175–180. doi: 10.1016/j.sna.2009.08.019
7. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. 2017. Axisymmetric acoustoelectric waves in a hollow cylinder made of a continuously inhomogeneous piezoelectric material. *International Applied Mechanics*. 53(4): 374–380. doi: 10.1007/s10778-017-0821-7
8. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. 2017. Propagation of axisymmetric electroelastic waves in a hollow layered cylinder under mechanical excitation. *International Applied Mechanics*. 53(5): 562–567. doi: 10.1007/s10778-017-0837-z
9. Dai H.L., Fu Y.M., Yang J.H. 2007. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder

Поступила 16.05.2018