

УДК 539.3
DOI: 10.23885/2500-0640-2017-13-2-3-12

СВОЙСТВА ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УЧЕТЕ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2017 г. Т.И. Белянкова¹, В.В. Калинин¹

Аннотация. В рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечную статическую в системе координат Лагранжа исследовано влияние учета упругих модулей II, III и IV порядка первоначально изотропного материала на изменение его свойств в зависимости от характера начальных воздействий. В качестве упругого потенциала первоначально изотропного тела использовано представление удельной потенциальной энергии через алгебраические инварианты тензора деформации Коши – Грина с учетом упругих модулей III и IV порядков. В работе приведены уравнения движения, граничные условия и соотношения, определяющие состояние предварительно напряженного тела, линеаризованные в материальной системе координат Лагранжа в окрестности некоторого равновесного начального напряженного состояния. Форма полученных соотношений позволяет в рамках линеаризованной теории достаточно эффективно учитывать нелинейные эффекты «второго» и «третьего» порядков влияния начальной деформации на упругие свойства первоначально изотропного тела. Для сравнения приведены выражения для компонент тензора Кирхгофа и упругих модулей предварительно напряженного материала в линейном приближении, то есть в случае действия малых деформаций. Численные результаты приведены для изотропного объемного металлического стекла на основе палладия.

Ключевые слова: начальное напряженно-деформированное состояние, начальные деформации, начальные механические напряжения, изотропный материал, упругие модули высших порядков, удельная потенциальная энергия.

PECULIARITIES OF PRE-STRESSED ISOTROPIC MATERIALS WITH REGARD TO ELASTIC MODULI OF THE HIGHEST ORDERS

T.I. Belyankova¹, V.V. Kalinchuk¹

Abstract. We have investigated the influence of elastic moduli of the second, third and fourth orders of an initially isotropic material on the change of properties depending on the character of initial actions in the framework of the linearized theory of the superposition of small deformations on the finite static deformation in Lagrangian coordinate system. As an elastic potential of the initially isotropic body, the expression of specific potential energy by algebraic invariants of Cauchy-Green deformation tensor with regard to elastic moduli of the third and fourth orders was used. In this paper we present the motion equations, the boundary conditions and the relations determining the state of the pre-stressed body, linearized in Lagrangian material coordinate system in the neighbourhood of some equilibrium initially stressed state. The obtained relations allow us to take effectively into account the non-linear effects of the “second” and “third” orders of the initial deformation influence on the elastic properties of the initially isotropic body in the framework of the linearized theory. For comparison purposes, expressions for Kirchhoff tensor components and for elastic moduli of a pre-stressed material in a linear approximation (in case of the action of small deformations) are presented. The numerical results are presented for the isotropic bulk metallic glass on the basis of palladium.

Keywords: initial stressed deformation state, initial deformations, initial mechanical stresses, isotropic material, elastic moduli of the highest orders, specific potential energy.

¹ Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: tbelen415@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование различного рода деталей и конструкций из новых искусственных материалов в строительстве, машиностроении и электронике приводит, с одной стороны, к необходимости исследования физических свойств этих материалов, с другой стороны, к контролю технологических и прочностных характеристик самих деталей в зависимости от режимов и условий эксплуатации. Проведение подобных исследований связано с решением сложных прикладных задач статической и динамической теории упругости, необходимость решения которых определила создание математических моделей, с той или иной степенью точности отражающих процессы, происходящие в исследуемых материалах. В свою очередь, моделирование процессов, протекающих в телах, с учетом различного рода начальных воздействий основано на использовании упругого потенциала [1; 2], описывающего энергию, накапливаемую в процессе деформирования (нагружения). Упругий потенциал в общем случае представляет собой скалярную функцию градиента места частицы в деформированном состоянии, тензора деформации или одной из мер деформации [3; 4]. Применение той или иной формы потенциала определяется спецификой рассматриваемой задачи и используемой системой координат. Для изотропных материалов упругий потенциал представляется в виде скалярной функции инвариантов одного из тензоров меры деформации или тензора деформации [2–4]. При моделировании мягких и резиноподобных материалов достаточно успешно использовались различные формы квадратичных зависимостей потенциала от инвариантов [3]. Для более жестких материалов (горные породы, металлы, сплавы, кристаллы и т.д.) широко используется предложенное Мурнаганом [5] представление упругого потенциала в виде кубической функции инвариантов тензора деформации Коши – Грина, в котором наряду с упругими константами II порядка участвуют константы III порядка. В настоящее время благодаря теоретическим и экспериментальным работам известны значения констант III порядка как для широкого круга металлов, сплавов и различных конструкционных материалов, кристаллов с различными классами симметрии, так и для некоторых горных пород [6–8]. Использование моделей гиперупругого материала с модулями упругости III порядка позволило более точно опи-

сывать свойства преднапряженной среды: исследовать эффекты второго порядка [9; 10], определять механические напряжения [11; 12], изучать особенности динамики, распространения и локализации волн [13–26].

Для более полного учета начальных воздействий на динамику преднапряженных сред в работе [4] в рамках наложения малых деформаций на конечную статическую в системах координат Лагранжа и Эйлера проведена последовательная линеаризация нелинейных уравнений механики твердого упругодеформируемого тела в окрестности некоторого начального напряженного состояния. Приведен вывод определяющих соотношений и уравнений движения линеаризованной теории динамики упругой преднапряженной среды в произвольной, в общем случае криволинейной системе координат, выражения представлены в компактной, удобной для исследований форме. В работах [4; 20–26] линеаризованные уравнения использованы при решении ряда конкретных краевых и смешанных задач динамической теории упругости. В частности, для модели первоначально изотропного гиперупругого материала с потенциалом в форме Мурнагана [23–25] исследовано влияние характера начальных механических воздействий на формирование, распространение и локализацию волновых полей как в однородных, так и неоднородных предварительно напряженных средах.

В последнее время появился ряд новых, перспективных в практическом применении материалов, обладающих уникальными физическими свойствами, в частности, до начала пластического течения они способны выдерживать чрезвычайно высокий уровень упругой деформации, при котором нелинейность упругих свойств становится весьма существенной. Для изотропных тел в работах [27–29] экспериментально определены упругие модули III и IV порядков для объемных металлических стекол на основе циркония и палладия. Учет модулей IV порядка приводит к необходимости усовершенствования определяющих соотношений, полученных в работе [4]. В настоящей работе в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечную в системе координат Лагранжа исследовано влияние учета упругих модулей II, III и IV порядка изотропного материала на изменение его свойств в зависимости от характера наведенного начально-деформированного состояния. В качестве упругого потенциала первоначаль-

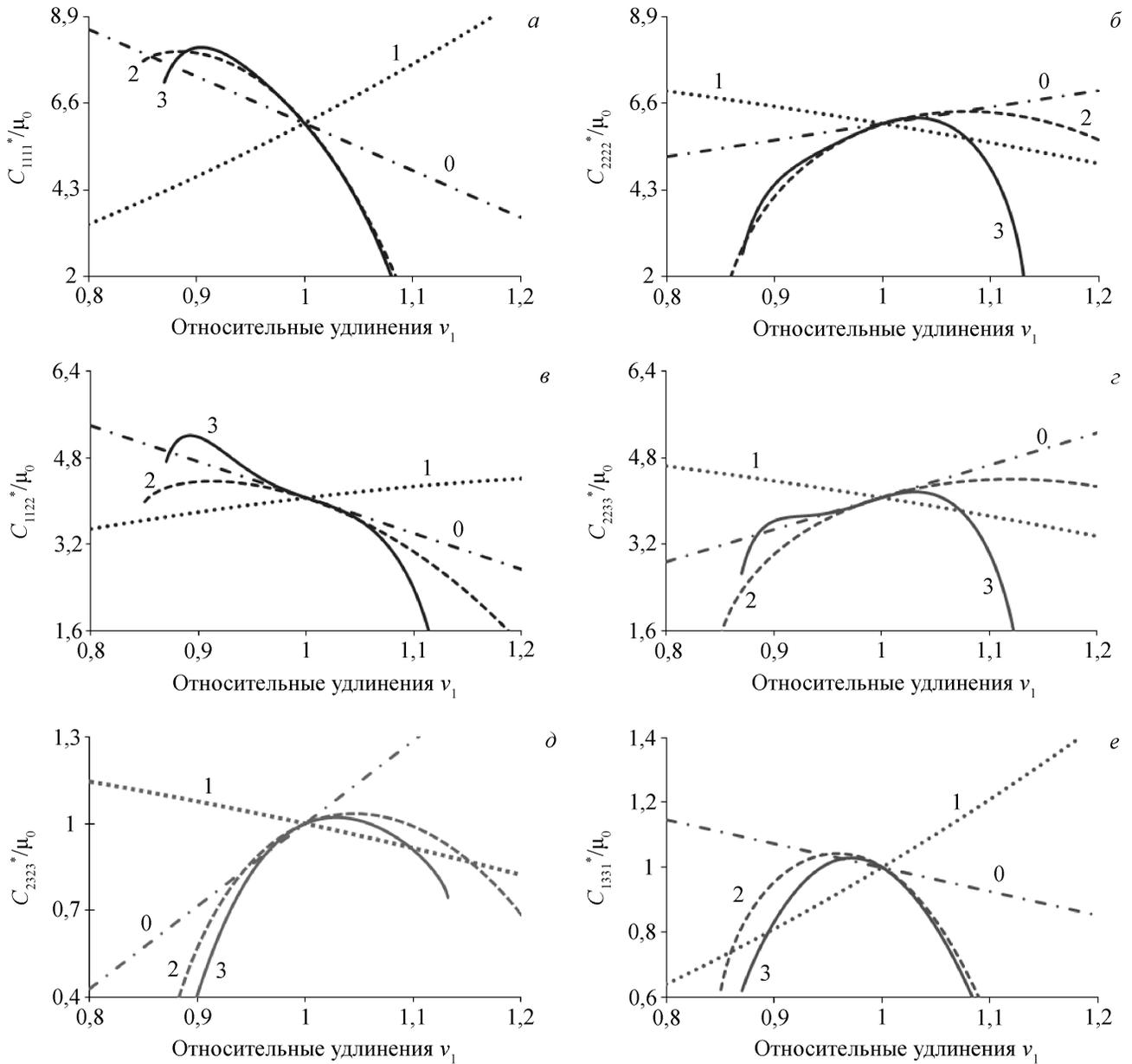


Рис. 1. Влияние учета модулей высших порядков исходного материала на C_{ijkl}^* при одноосном начальном воздействии $1x_1$
Fig. 1. Effect of accounting for the higher-order modules of the original material on the coefficients C_{ijkl}^* in the case of uniaxial initial loading $1x_1$

но изотропного тела использовано его представление через алгебраические инварианты тензора деформации Коши – Грина с учетом упругих модулей III и IV порядков. Приведенные в работе уравнения движения, граничные условия и определяющие соотношения позволяют в рамках линеаризованной теории достаточно эффективно исследовать влияние нелинейных эффектов действия начальной деформации на физические и динамические свойства предварительно напряженных первоначально изотропных материалов.

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
 ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО
 ПЕРВОНАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО
 УПРУГОГО ТЕЛА
 В ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В рассмотрение вводятся декартовый ортонормированный базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ и начально-деформированная V -конфигурация (далее НДК) с координатами $x_p, p = 1, 2, 3$, связанная с естественной v -конфигурацией (далее ЕК) с лагранжевыми координатами

$a_i, i = 1, 2, 3$ соотношениями

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_j, v_i = \text{const.} \quad (1)$$

$\mathbf{R} = x_k \mathbf{i}_k$ и $\mathbf{r} = a_k \mathbf{i}_k$ – радиус-векторы точки среды в НДК и ЕК соответственно, $v_i = 1 + \delta_i$, v_i и δ_i – главные относительные удлинения волокон, \mathbf{G} – мера деформации Коши – Грина, δ_{ij} – символ Кронекера. Использована модель изотропного упругого материала с упругим потенциалом (функция удельной потенциальной энергии) в виде [1–5; 27–29]:

$$\begin{aligned} \chi = & -pI_1 + \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{6}v_1 I_1^3 + v_2 I_1 I_2 + \frac{4}{3}v_3 I_3 + \\ & + \frac{1}{24}\gamma_1 I_1^4 + \frac{1}{2}\gamma_2 I_1^2 I_2 + \frac{4}{3}\gamma_3 I_1 I_3 + \frac{1}{2}\gamma_4 I_2^2, \quad (2) \end{aligned}$$

здесь $I_k = I_1(\mathbf{S}^k) = \text{tr}(\mathbf{S}^k)$ – алгебраические инварианты тензора деформации, $\lambda, \mu; v_k; \gamma_m$ – упругие модули II; III; IV порядков соответственно.

В рамках принятых предположений, в лагранжевой системе координат, линейризованные уравнения движения преднапряженного первоначально изотропного тела могут быть представлены в виде [1–4; 20]:

$$C_{ijkl}^* u_{k,li} = \rho_0 \ddot{u}_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

ρ_0 – плотность материала в отсчетной конфигурации, $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор перемещений, C_{ijkl}^* – принимают участие в записи компонент линейризованного тензора напряжений Пиола (дифференцирование по координатам отмечено индексами после запятой) [2–4; 20]:

$$\Theta_{ij} = \Pi_{ij}^* = C_{ijkl}^* u_{k,l}, \quad (4)$$

С учетом (1), (2)

$$\begin{aligned} C_{iiii}^* = & v_i v_i \xi_{ii} + 2v_i v_i (\psi_1 + 3\psi_2 S_i) + P_i, \quad C_{ijij}^* = v_i v_j \xi_{ij}, \\ C_{ijij}^* = & v_j v_i \left(\psi_1 + \frac{3}{2}\psi_2 (S_i + S_j) \right), \quad (5) \\ C_{ijji}^* = & v_j^2 \left(\psi_1 + \frac{3}{2}\psi_2 (S_i + S_j) \right) + P_i. \end{aligned}$$

использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_{kn} = & \psi_{01} + 2\psi_{02} S_n + 3\psi_{03} S_n^2 + \\ & + 2(\psi_{11} + 2\psi_{12} S_n) S_k + 4\psi_{21} S_k^2, \\ \psi_0 = & \chi_{I_1} = \lambda I_1 + \frac{1}{2}v_1 I_1^2 + v_2 I_2 + \frac{1}{6}\gamma_1 I_1^3 + \gamma_2 I_1 I_2 + \frac{4}{3}\gamma_3 I_3, \\ \psi_1 = & \chi_{I_2} = \mu + v_2 I_1 + \gamma_2 I_1^2 / 2 + \gamma_4 I_2, \quad (6) \\ \psi_2 = & \chi_{I_3} = 4(v_3 + \gamma_3 I_1) / 3, \quad \chi_{I_m} = \partial \chi / \partial I_m. \end{aligned}$$

$$\psi_{01} = \chi_{I_1, I_1} = \lambda + v_1 I_1 + \gamma_1 I_1^2 / 2 + \gamma_2 I_2,$$

$$\psi_{02} = \chi_{I_1, I_2} = v_2 + \gamma_2 I_1, \quad \psi_{03} = \chi_{I_1, I_3} = 4\gamma_3 / 3,$$

$$\psi_{11} = \chi_{I_2, I_1} = v_2 + \gamma_2 I_1, \quad \psi_{12} = \chi_{I_2, I_2} = \gamma_4,$$

$$\psi_{21} = \chi_{I_3, I_1} = 4\gamma_3 / 3,$$

$$\psi_{13} = \chi_{I_2, I_3} = 0, \quad \psi_{22} = \chi_{I_3, I_2} = \psi_{23} = \chi_{I_3, I_3} = 0,$$

$$\chi_{I_m, I_n} = \partial^2 \chi / (\partial I_m \partial I_n).$$

Участвующие в представлениях (5) компоненты линейризованного тензора Кирхгофа имеют вид:

$$\begin{aligned} P_{km} = & \left[\delta_{km} v_n \xi_{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \right. \\ & \left. + \left[\psi_1 + \frac{3}{2}\psi_2 (S_k + S_m) \right] \left(v_k \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Представления (5)–(7) показывают влияние начальных деформаций на исходные свойства изотропного материала, то есть C_{ijkl}^* определяет свойства предварительно напряженного материала. Следует отметить, что в отсутствии начальных напряжений (полагая в (1) $\delta_k = 0, v_k = 1$), с учетом (6), (7) получаем:

$$C_{iii}^* = \lambda + 2\mu, \quad C_{ijj}^* = \lambda, \quad C_{ijj}^* = \mu, \quad C_{ijj}^* = \mu.$$

При решении краевых задач для полуограниченных сред в зависимости от типа среды линейризованные уравнения движения (3) дополняются граничными условиями:

на поверхности ($o = o_1 + o_2$):

$$\begin{aligned} o_1 : & \quad \mathbf{n} \cdot \Theta = \mathbf{f}^*, \\ o_2 : & \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad (8) \end{aligned}$$

на границе раздела n -го и $n + 1$ -го элементов структуры с плоскопараллельными границами (при полном сцеплении):

$$x_3 = x_0 : \quad \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n+1)}, \quad \Theta_{3k}^{(n)} = \Theta_{3k}^{(n+1)}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

для слоя $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_0 \leq x_3 \leq x_{30}$, нижняя грань которого жестко закреплена:

$$x_3 = x_0 : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (10)$$

для полупространства $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$ условиями на бесконечности:

$$x_3 \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (11)$$

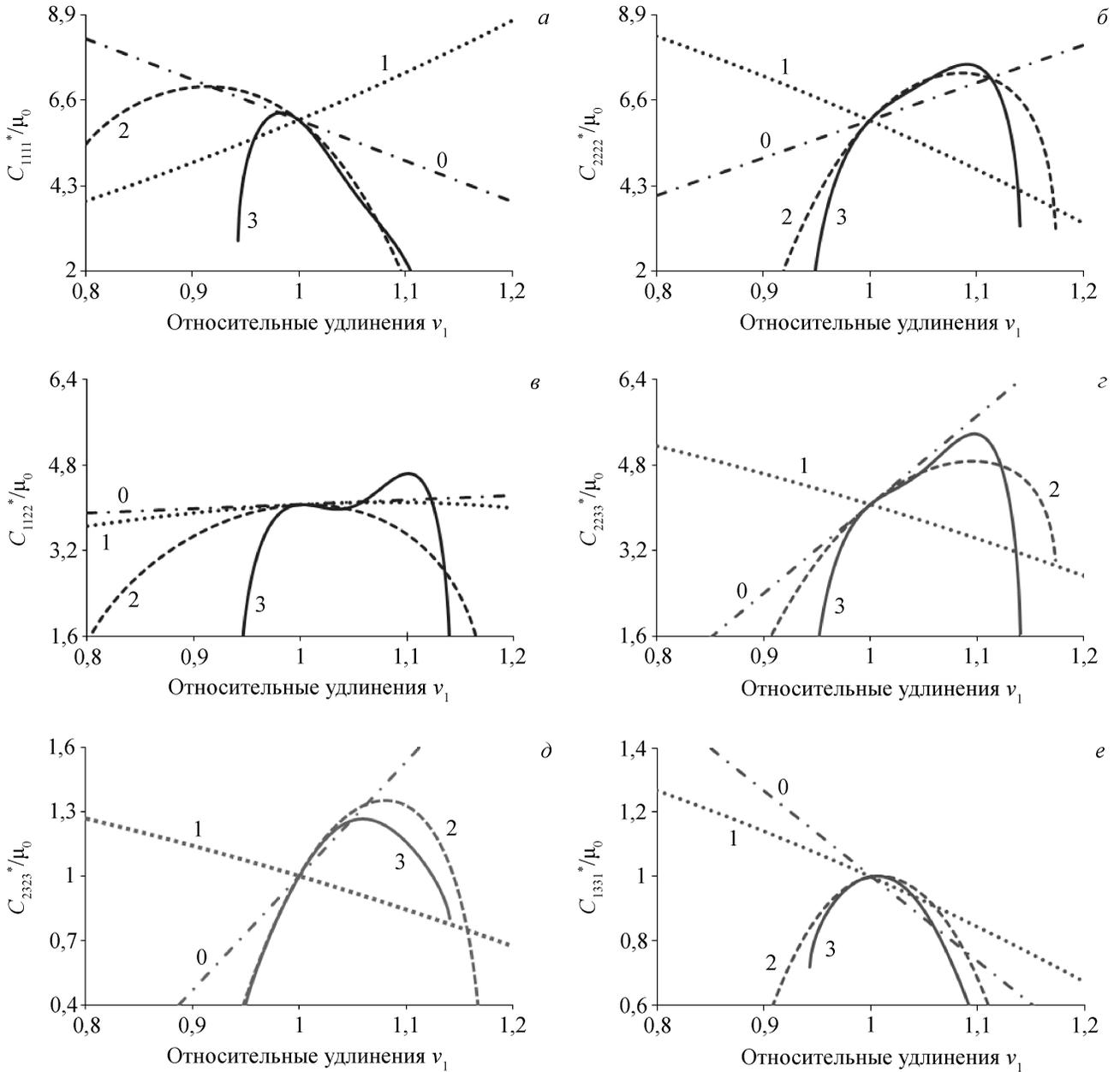


Рис. 2. Влияние учета модулей высших порядков исходного материала на C_{ijkl}^* при двухосном начальном воздействии $2x_1$
Fig. 2. Effect of accounting for the higher-order modules of the original material on the coefficients C_{ijkl}^* in the case of biaxial initial loading $2x_1$

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ
 ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА СВОЙСТВА
 ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ
 ПЕРВОНАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Роль тензора напряжений в предварительно напряженном упругом теле выполняет тензор Θ (4) — линеаризованный тензор Пиола, участвующий в уравнениях движения (3) с граничными условиями (8)–(11) в зависимости от задачи и типа сре-

ды. Влияние начальных деформаций на свойства первоначально изотропного материала определено в C_{ijkl}^* (5)–(7). Запишем C_{ijkl}^* в виде [4; 20]:

$$C_{ijkl}^* = P_i \delta_{jk} + \nu_j \nu_k C_{ijkl}^x. \quad (12)$$

Участвующие в (12) коэффициенты C_{ijkl}^x зависят от свойств материала и характера начальных воздействий, компоненты тензора Кирхгофа P_i в условиях (1) определены формулами (7). Учитывая (5), (6) и группируя слагаемые по степеням тензора де-

формации S , C_{ijkl}^{\times} могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} C_{iiii}^{\times} &= \lambda + 2\mu + 4a_2 S_i + 2a_1 I_1 + 4\left(\frac{7}{3}\gamma_3 + \gamma_4\right) S_i^2 + \\ &\quad + 4b_3 I_1 S_i + b_1 I_1^2 + b_2 I_2, \\ C_{ijij}^{\times} &= \lambda + 2v_2 (S_i + S_j) + v_1 I_1 + \frac{4}{3}\gamma_3 (4S_i^2 + 3S_j^2) + \\ &\quad + 2\gamma_2 (S_i + S_j) I_1 + 4\gamma_4 S_i S_j + \gamma_2 I_2 + \frac{1}{2}\gamma_1 I_1^2, \\ C_{ijji}^{\times} &= C_{ijij}^{\times} = \mu + 2v_3 (S_i + S_j) + v_2 I_1 + \\ &\quad + 2\gamma_3 I_1 (S_i + S_j) + \gamma_4 I_2 + \frac{1}{2}\gamma_2 I_1^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_1 = v_1 / 2 + v_2$, $a_2 = v_2 + 2v_3$, $b_1 = 1 / 2\gamma_1 + \gamma_2$,
 $b_2 = \gamma_2 + 2\gamma_4$, $b_3 = \gamma_2 + 2\gamma_3$, $b_4 = \gamma_2 + \gamma_4 + 4\gamma_3$.

Линейное по деформациям приближение.

В случае малых начальных деформаций используется линейное приближение для инвариантов меры деформации:

$$\begin{aligned} v_k &= 1 + \delta_k, v_k^2 = 1 + 2\delta_k, v_k v_i = 1 + \delta_k + \delta_i, \\ k &= 1, 2, 3, i \neq k, \\ S_k &= \delta_k, I_1 = \theta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты ψ_k и ψ_{km} (6) в линейном приближении принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \lambda\theta, \psi_1 = \mu + v_2\theta, \psi_2 = 4(v_3 + \gamma_3\theta) / 3, \\ \psi_{01} &= \lambda + v_1\theta, \psi_{02} = v_2 + \gamma_2\theta, \psi_{03} = 4\gamma_3 / 3, \psi_{11} = v_2 + \gamma_2\theta, \\ \psi_{12} &= \gamma_4, \psi_{21} = 4\gamma_3 / 3. \end{aligned}$$

Компоненты тензора Кирхгофа (7) в линейном приближении выражаются формулой:

$$P_k = \lambda\theta + 2\mu\delta_k.$$

Коэффициенты C_{ijkl}^* (5) в данном случае могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} C_{iiii}^* &= P_i + (\lambda + 2\mu) + v_1\theta + 2(\lambda + 2\mu + 2v_2)\delta_i, \\ C_{ijij}^* &= \lambda + v_1\theta + (\lambda + 2v_2)(\delta_i + \delta_j), \\ C_{ijji}^* &= \mu + (\mu + 2v_3)(\delta_i + \delta_j), \\ C_{ijji}^* &= P_i + \mu + 2\mu\delta_j + 2v_3(\delta_i + \delta_j). \end{aligned} \quad (14)$$

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Численные расчеты проводились для изотропного материала $\text{Pd}_{40}\text{Cu}_{30}\text{Ni}_{10}\text{P}_{20}$ – металлическое стекло с параметрами [29]:

$$\begin{aligned} \rho &= 9300 \text{ кг/м}^3, \\ \lambda &= 1,453 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ \mu &= 0,358 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ v_1 &= -2,27 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -2,34 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ v_3 &= -0,818 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ \gamma_1 &= -105,828 \cdot 10^{12} \text{ н/м}^2, \\ \gamma_2 &= 15,556 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ \gamma_3 &= 1,81 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ \gamma_4 &= -2,98 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \\ V_p &= 4829 \text{ м/с}, \\ V_s &= 1962 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Результаты приведены в безразмерных параметрах: плотность и упругие модули материала отнесены к плотности и модулю сдвига изотропного материала в естественном состоянии (далее штрихи опущены)

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho / \rho_0, \lambda' = \lambda / \mu_0, v_k' = v_k / \mu_0, \gamma_k' = \gamma / \mu_0, \\ P_k' &= P_k / \mu_0, C_{ijkl}^{*'} = C_{ijkl}^* / \mu_0. \end{aligned}$$

Исследовано влияние $(k, j, i = 1, 2, 3)$

одноосных $1x_i \Rightarrow P_i = P, P_{j \neq i} = P_{k \neq j \neq i} = 0,$
двухосных $2x_i \Rightarrow P_i = 0, P_{j \neq i} = P_{k \neq j \neq i} = P,$
трехосных $3x_i \Rightarrow P_i = P, P_{j \neq i} = P_{k \neq j \neq i} = G,$
и гидростатического $3x \Rightarrow P_1 = P_2 = P_3 = P$ начальных воздействий.

На рисунках 1–4 представлено влияние деформации на четыре типа упругих модулей (12), (13) в предварительно напряженном теле: C_{iiii}^* , C_{ijij}^* , C_{ijji}^* и C_{ijji}^* при одноосном ($1x_1$, рис. 1а–е), двухосном ($2x_1$, рис. 2а–е), трехосном ($3x_1$, $G = -0, 1$, рис. 3а–е) и гидростатическом ($3x$, рис. 4а–г) начальных воздействиях. Цифрами 1, 2, 3 на рисунках отмечены приближения C_{ijkl}^* с учетом упругих модулей II, II и III, а также II, III и IV порядков соответственно пунктирными (кривые 1), штриховыми (кривые 2) и сплошными (кривые 3) линиями. Штрихпунктирные линии с цифрой 0 отвечают линейным по деформации приближениям коэффициентов (14).

Из рисунков следует, что чувствительность коэффициентов C_{ijkl}^* к нелинейности деформации значительно различается, поведение приближений, учитывающих модули III и IV порядков (кривые 2 и 3) при одноосных воздействиях качественно отличается от приближения, учитывающего только модули II порядка (кривые 1). Следует отметить, что для большинства коэффициентов существует область малых деформаций, в которой линейные по деформации приближения (кривые 0) и нелинейные приближения, учитывающие модули высших порядков (кривые 2 и 3), малоразличимы.

В отличие от одноосных, при наведении в материале двухосных начально-деформированных состояний область линейности, то есть область малых

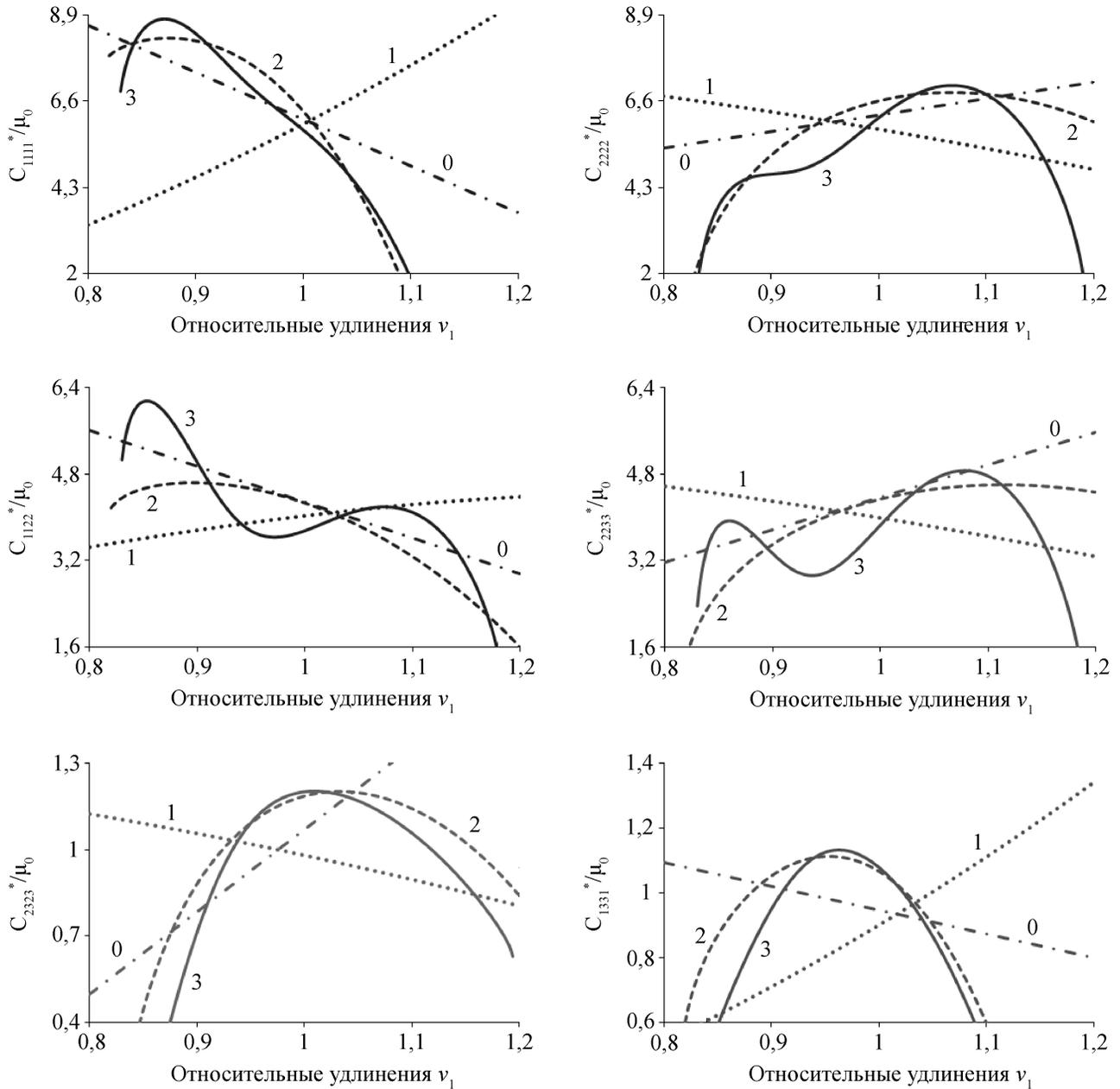


Рис. 3. Влияние учета модулей высших порядков исходного материала на C_{ijkl}^* при трехосном начальном воздействии $3x_1$, $G = -0,1$

Fig. 3. Effect of accounting for the higher-order modules of the original material on the coefficients C_{ijkl}^* in the case of triaxial initial loading $3x_1$, $G = -0,1$

деформаций, в которой влияние действия нелинейности деформаций на свойства исходного материала незначительно, становится меньше.

В случае более сложных трехосных воздействий области линейности практически не существует, более того, возрастают различия в поведении нелинейных приближений (кривые 2, 3, рис. 3б–г) даже при малых деформациях.

Из рисунков видно, что при гидростатическом воздействии наблюдается существенное расхождение в поведении нелинейных приближений (кри-

вые 2, 3, рис. 4а, б) коэффициентов C_{iii}^* и C_{ijj}^* , для нелинейных приближений коэффициентов C_{ijj}^* и C_{iji}^* существует незначительная область малых деформаций, в которой различия незначительны (рис. 4в, г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечную в системе координат Лагранжа исследовано влияние учета

упругих модулей II, III и IV порядка изотропного материала на изменение свойств в зависимости от характера наведенного начально-деформированного состояния. В качестве упругого потенциала первоначально изотропного тела использовано его представление через алгебраические инварианты тензора деформации Коши – Грина с учетом модулей III и IV порядков. Линеаризованные уравнения движения и соотношения, определяющие состояние предварительно напряженного первоначально изотропного материала, представлены в удобной форме, позволяющей в рамках линеаризованной теории исследовать нелинейные эффекты «второго» и «третьего» порядка влияния начальной деформации на физические и динамические свойства материалов.

Наглядно показано значительное расхождение в поведении модулей упругости C_{ijkl}^* для двух, пяти и девяти константных моделей предварительно напряженных первоначально изотропных материалов как для простых одноосных, так и для более сложных двух- и трехосных начальных воздействий (кривые 1, 2, 3 на рис. 1, 2, 3). При одноосных воздействиях для большинства коэффициентов

существует область малых деформаций, в которой линейные по деформации приближения (кривые 0) и нелинейные приближения, учитывающие модули высших порядков (кривые 2 и 3), малоразличимы (рис. 1б–е); при двухосных $2x_i$ -воздействиях эта область становится меньше (рис. 2б–г), при сложных трехосных воздействиях такой области нет (рис. 3, 4).

Следует отметить, что целесообразность учета нелинейности в представлении коэффициентов C_{ijkl}^* (5), (6) зависит не только от характера напряженного состояния, величины начальных напряжений и используемого материала, но в значительной степени определяется поставленной задачей и исследуемыми характеристиками. Кроме того, при исследовании физических свойств предварительно напряженных материалов и особенно его динамических характеристик принципиально важную роль играет изучение вопросов устойчивости материала и определения диапазона допустимых деформаций.

Работа выполнена в рамках реализации Государственного задания, проект № 0256-2014-0003, № государственной регистрации 01201354542.

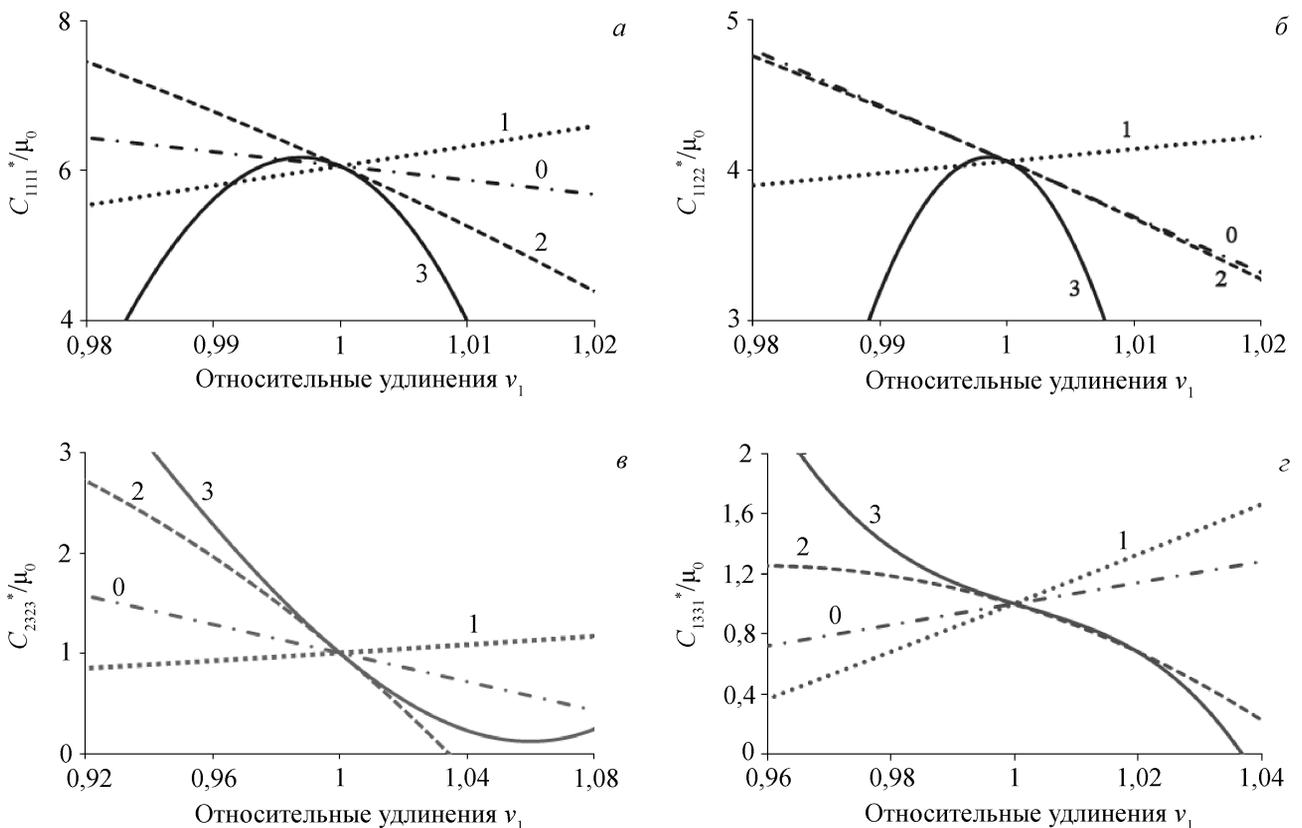


Рис. 4. Влияние учета модулей высших порядков исходного материала на C_{ijkl}^* при гидростатическом начальном воздействии $3x$
Fig. 4. Effect of accounting for the higher-order modules of the original material on the coefficients C_{ijkl}^* in the case of hydrostatic initial loading $3x$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трусделл К. 1975. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. М., Мир: 592 с.
2. Maugin G.A. 1968. *Continuum Mechanics of Electromagnetic solids*. Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo, Elsevier Science Publishers: 598 p.
3. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
4. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2002. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. М., Физматлит: 240 с.
5. Murnaghan F.D. 1937. Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics*. 59(2): 235–260. doi: 10.2307/2371405
6. Thurston R.N., Brugger K. 1964. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Physical Review*. 133(6A): A1604–A1610. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1604>
7. Smith R.T., Stern R., Stephens R.W.B. 1966. Third-order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements. *Journal of the Acoustical Society of America*. 40(5): 1002–1008. doi: <http://dx.doi.org/10.1121/1.1910179>
8. Секоян С.С. 1970. О вычислении констант упругости третьего порядка по результатам ультразвуковых измерений. *Акустический журнал*. 16(3): 453–457.
9. Hughes D.S., Kelly J.L. 1953. Second-Order Elastic Deformation of Solids. *Physical review*. 92(5): 1145–1149. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.1145>
10. Бакулин В.Н., Протосеня А.Г. 1982. О наличии нелинейных эффектов при распространении упругих волн в горных породах. *Доклады Академии наук СССР*. 263(2): 314–316.
11. Ерофеев В.И., Зазнобин В.А., Самохвалов Р.В. 2007. К определению механических напряжений в твердых телах акустическим методом. *Акустический журнал*. 53(5): 625–631.
12. Никитина Н.Е., Камышев А.В., Казачек С.В. 2015. Применение метода акустоупругости для определения напряжений в анизотропных трубных сталях. *Дефектоскопия*. 3: 51–60.
13. Hayes M., Rivlin R.S. 1961. Propagation of plane wave in an isotropic elastic material subjected to pure homogeneous deformation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 8(1): 15–22. doi: 10.1007/BF00277427
14. Hayes M. 1963. Wave propagation and uniqueness in prestressed elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London, A*. 274(1359): 500–506. doi: 10.1098/rspa.1963.0146
15. Dey S. 1971. Wave propagation in two layer medium under initial stresses. *Pure and Applied Geophysics*. 90(1): 38–52. doi: 10.1007/BF00875507
16. Willson A.J. 1972. Wave propagation in uniaxially-stressed elastic media. *Pure and Applied Geophysics*. 93(1): 5–18. doi: 10.1007/BF00875217
17. Калинин В.В., Полякова И.Б. 1982. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства. *Прикладная механика*. 18(6): 22–27.
18. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 1993. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством. *Прикладная математика и механика*. 57(4): 123–134.
19. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 1994. Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 6: 83–94.
20. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2009. *Динамика поверхности неоднородных сред*. М., Физматлит: 312 с.
21. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2017. Особенности локализации волнового поля в предварительно напряженном функционально-градиентном слое. *Акустический журнал*. 63(3): 219–234. doi: 10.7868/S0320791917030042
22. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2015. Peculiarities of the wave field localization in the functionally graded layer. *Materials Physics and Mechanics*. 23(1): 25–30.
23. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2015. Влияние начальных напряжений на волновое поле функционально градиентного слоя. В кн.: *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.)*. Казань, изд-во КФУ: 443–445.
24. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. Peculiarities of wave field localization in functionally graded coating with regard to initial stresses. In: *Proceedings of the 2016 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (Surabaya, Indonesia, 19–22 July 2016)*. Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung, Muaffaq A. Jani (Eds.). New York, Nova Science Publishers: 393–400.
25. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Тукодова О.М. 2016. К вопросу устойчивости предварительно напряженных функционально-градиентных сред. *Наука Юга России*. 12(2): 113–117.
26. Белянкова Т.И., Богомолов А.С., Ворович Е.И., Калинин В.В., Тукодова О.М. 2015. О возможности управления свойствами функционально-ориентированных сегнетоэлектрических гетероструктур. *Вестник Южного научного центра*. 11(3): 18–29.
27. Кобелев Н.П., Колыванов Е.Л., Хоник В.А. 2007. Упругие модули высших порядков объемного металлического стекла $Zr_{52.5}Ti_5Cu_{17.9}Ni_{14.6}Al_{10}$. *Физика твердого тела*. 49(7): 1153–1158.
28. Kobelev N.P., Khonik V.A., Makarov A.S., Afonin G.V., Mitrofanov Yu.P. 2014. On the nature of heat effects and shear modulus softening in metallic glasses: A generalized approach. *Journal of Applied Physics*. 115: 033513. doi: 10.1063/1.4862399
29. Кобелев Н.П., Колыванов Е.Л., Хоник В.А. 2015. Упругие модули высших порядков металлического стекла $Pd_{40}Cu_{30}Ni_{10}P_{20}$. *Физика твердого тела*. 57(8): 1457–1461.

REFERENCES

1. Truesdell C. 1972. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Baltimore, Maryland, The Johns Hopkins University: 592 p.
2. Maugin G.A. 1968. *Continuum Mechanics of Electromagnetic solids*. Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo, Elsevier Science Publishers: 598 p.
3. Lurie A.I. 1980. *Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]*. Moscow, Nauka: 512 p. (In Russian).

4. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2002. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh tel.* [Dynamic Contact Problems for Preliminary Stressed Solids]. Moscow, Fizmatlit: 240 p. (In Russian).
5. Murnaghan F.D. 1937. Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics.* 59(2): 235–260. doi: 10.2307/2371405
6. Thurston R.N., Brugger K. 1964. Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. *Physical Review.* 133(6A): A1604–A1610. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.133.A1604>
7. Smith R.T., Stern R., Stephens R.W.B. 1966. Third-order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements. *Journal of the Acoustical Society of America.* 40(5): 1002–1008. doi: <http://doi.org/10.1121/1.1910179>
8. Sekoyan S.S. 1970. [Calculation of the elastic constants of the third order from results of ultrasonic measurements]. *Akusticheskii zhurnal.* 16(3): 453–457. (In Russian).
9. Hughes D.S., Kelly J.L. 1953. Second-Order Elastic Deformation of Solids. *Physical review.* 92(5): 1145–1149. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.1145>
10. Bakulin V.N., Protosenya A.G. 1982. Nonlinear effects in travel of elastic waves through rocks. *Transactions (Doklady) of the USSR Academy of Sciences. Earth Science Sections.* 263(2): 314–316.
11. Erofeev V.I., Zaznobin V.A., Samokhvalov R.V. 2007. Determination of mechanical stresses in solids by an acoustic method. *Acoustical Physics.* 53(5): 546–552. doi: 10.1134/S1063771007050028
12. Nikitina N.E., Kamyshev A.V., Kazachek S.V. 2015. The application of the acoustoelasticity method for the determination of stresses in anisotropic pipe steels. *Russian Journal of Nondestructive Testing.* 51(3): 171–178. doi: 10.1134/S1061830915030079
13. Hayes M., Rivlin R.S. 1961. Propagation of plane wave in an isotropic elastic material subjected to pure homogeneous deformation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 8(1): 15–22. doi:10.1007/BF00277427
14. Hayes M. 1963. Wave propagation and uniqueness in prestressed elastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London, A.* 274(1359): 500–506. doi: 10.1098/rspa.1963.0146
15. Dey S. 1971. Wave propagation in two layer medium under initial stresses. *Pure and Applied Geophysics.* 90(1): 38–52. doi: 10.1007/BF00875507
16. Willson A.J. 1972. Wave propagation in uniaxially-stressed elastic media. *Pure and Applied Geophysics.* 93(1): 5–18. doi: 10.1007/BF00875217
17. Kalinchuk V.V., Polyakova I.B. 1982. Vibration of a die on the surface of a prestressed half-space. *Soviet Applied Mechanics.* 18(6): 504–509. doi: 10.1007/BF00883339
18. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1993. The interaction of a vibrating punch with a prestressed half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 57(4): 713–724. doi: 10.1016/0021-8928(93)90041-J
19. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1994. [Dynamics of a massive body interacting with a prestressed half-space]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.* 6: 83–94. (In Russian).
20. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2009. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred.* [Dynamics of Heterogeneous Media Surface]. Moscow, Fizmatlit: 312 p. (In Russian).
21. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. Wave field localization in a prestressed functionally graded layer. *Acoustical Physics.* 63(3): 245–259. doi:10.1134/S1063771017030046
22. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2015. Peculiarities of the wave field localization in the functionally graded layer. *Materials Physics and Mechanics.* 23(1): 25–30.
23. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2015. [Effect of initial stresses on the wave field of a functionally graded layer]. In: *XI Vserossiyskiy s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik dokladov. [XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics: a collection of reports (Kazan, Russia, 20–24 August 2015)].* Kazan, Kazan Federal University Publishers: 443–445. (In Russian).
24. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. Peculiarities of wave field localization in functionally graded coating with regard to initial stresses. In: *Proceedings of the 2016 International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications" (Surabaya, Indonesia, 19–22 July 2016).* Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung, Muaffaq A. Jani (Eds.). New York, Nova Science Publishers: 393–400.
25. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. 2016. [On stability of prestressed functionally graded media]. *Nauka Yuga Rossii.* 12(2): 113–117. (In Russian).
26. Belyankova T.I., Bogomolov A.S., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. 2015. [On the possibility of controlling the properties of functionally oriented ferroelectric heterostructures]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra.* 11(3): 18–29. (In Russian).
27. Kobelev N.P., Kolyvanov E.L., Khonik V.A. 2007. Higher order elastic moduli of the bulk metallic glass $Zr_{52.5}Ti_5Cu_{17.9}Ni_{14.6}Al_{10}$. *Physics of the Solid State.* 49(7): 1209–1215. doi: 10.1134/S1063783407070013
28. Kobelev N.P., Khonik V.A., Makarov A.S., Afonin G.V., Mitrofanov Yu.P. 2014. On the nature of heat effects and shear modulus softening in metallic glasses: A generalized approach. *Journal of Applied Physics.* 115: 033513. doi: 10.1063/1.4862399
29. Kobelev N.P., Kolyvanov E.L., Khonik V.A. 2015. Higher-order elastic moduli of the metallic glass $Pd_{40}Cu_{30}Ni_{10}P_{20}$. *Physics of the Solid State.* 57(8): 1483–1487. doi: 10.1134/S1063783415080119

Поступила 10.03.2017