

УДК 519.633 : 532.53 : 532.72

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОГО ПРОТЯЖЕННОГО РУСЛОВОГО ПОТОКА

© 2013 г. И.В. Жиляев¹

Представлены результаты численного тестирования редуцированной трехмерной модели мелкого протяженного потока. Для верификации модели были проведены расчеты полных уравнений гидродинамики в конечноэлементном программном комплексе COMSOL. Сравнивались значения продольной скорости потока, полученные по формулам редуцированной модели после численного решения начально-краевой задачи для функции возвышения свободной поверхности, и данные прямого численного моделирования COMSOL для ламинарных и турбулентных течений вязкой жидкости. Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная редуцированная модель мелкого протяженного руслового потока адекватно описывает его гидродинамику.

Ключевые слова: численное моделирование, редуцированные модели, русловые потоки, свободная поверхность.

ВВЕДЕНИЕ

В гидрологии водных объектов суши важен количественный анализ и прогноз основных гидрологических характеристик русловых потоков (реки, ручьи, каналы и т.п.). При гидрологических исследованиях таких водных объектов активно используются методы математического моделирования и вычислительные эксперименты [1, 2].

Для расчетов гидрологических характеристик водотоков применяются математические модели разных типов. Наиболее простыми в использовании являются формульные (“нульмерные”) и балансовые (камерные) модели. Широко используются также одномерные модели, полученные, например, осреднением по живому сечению потока. Однако применение таких моделей весьма ограничено, поскольку они позволяют вычислять лишь интегральные и усредненные характеристики потоков (расход воды, средняя скорость течения и т.п.). Во многих случаях требуется более детальное описание течения, например, учет его поперечной структуры или учет возникновения в верхнем слое противотока, вызванного действием ветра. Строго говоря, такой анализ требует привлечения трехмерных моделей, точно описывающих исследуемые процессы и основанных на полных уравнениях гидродинамики турбулентных течений. Однако на практике получить высокую точность моделирования не удается, поскольку имеющиеся данные гидрологических измерений обычно не обладают точностью,

необходимой для задания гидрофизических параметров, а также начальных и граничных условий для трехмерных уравнений в частных производных. Кроме того, сложность и трудоемкость вычислительных экспериментов на основе трехмерных математических моделей усугубляется геометрией расчетной области, сильно вытянутой в продольном направлении: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0,1 до 0,005. Все сказанное выше объясняет интерес к двумерным и редуцированным трехмерным математическим моделям русловых потоков, сложность которых адекватна точности имеющихся гидрологических данных.

В работе [1] представлен подход, позволяющий конструировать математические модели русловых потоков пониженной размерности. Данная работа посвящена вычислительным экспериментам с одной из предложенных в [1] редуцированных математических моделей, а именно модели мелкого протяженного потока. Тестирование модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики и массопереноса в двумерном потоке вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Расчеты проводились с использованием конечноэлементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab), а также программных пакетов Matlab и Maple. Рассмотрены как ламинарные, так и турбулентные течения.

¹Южный научный центра РАН, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41; e-mail: Zhilyaev@mail.com

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Скорость течения жидкости в соответствии с редуцированной трехмерной математической моделью *мелкого протяженного потока* определяется в безразмерных переменных следующими формулами [1]:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} G I (J_2 - \xi J_1) + F_x (h - z), \\ v &= \operatorname{Re} G \frac{\partial \xi}{\partial y} (J_2 - \xi J_1) + F_y (h - z), \\ w &= \operatorname{Re} G \left(I \frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) + \frac{\partial}{\partial y} \left((J_4 - \xi J_3) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ (h - z) \left(F_x \frac{\partial h}{\partial x} + F_y \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ – компоненты вектора скорости, $\xi(x, y, t)$ – неизвестная функция, определяющая свободную поверхность потока; $h(x, y)$ – известная функция, задающая форму русла; параметры F_x и F_y характеризуют внешнее (например, ветровое) воздействие. Число Рейнольдса Re , гравитационный параметр G и уклон потока I определены согласно [1]. Функционалы J_1 , J_2 , J_3 и J_4 имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_z^h \frac{d\tau}{\eta}, \quad J_2 = \int_z^h \frac{\tau d\tau}{\eta}, \\ J_3 &= \int_z^h J_1 d\tau, \quad J_4 = \int_z^h J_2 d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где η – функциональный параметр турбулентной вязкости, возникающий в уравнениях Рейнольдса согласно гипотезе Буссинеска. Этот параметр зависит от координат и нормируется таким образом, чтобы на свободной поверхности он был равен единице [1].

Для определения возвышения свободной поверхности $\xi(x, y, t)$ используется кинематическое краевое условие

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \operatorname{Re} G \left[I \left(\frac{\partial}{\partial x} (J_4 - \xi J_3) - (J_2 - \xi J_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ (J_4 - \xi J_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (J_4 - \xi J_3) - \\ &\left. - (J_2 - \xi J_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + (h - \xi) \left(F_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ &\left. + F_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции J_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и их производные вычислены на свободной границе при $z = \xi$.

Для уравнения (3) требуется задать условие Коши (начальную форму свободной поверхности), а также граничные условия во входном створе $x = 0$ и на берегах потока. Например, если предполагать, что в начальный момент времени свободная поверхность плоская, то условие Коши имеет вид

$$\eta(x, y, 0) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1), (2) определяют приближенные значения гидродинамических полей мелкого протяженного потока.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для вычисления функции $\eta(x, y, t)$ возвышения свободной поверхности уравнение (3) решалось при начальном условии (4) и граничных условиях

$$\xi(0, y, t) = 0, \quad \xi(x, \pm b, t) - h(x, \pm b) = 0, \quad (5)$$

где b – полуширина потока.

Численное решение начально-краевой задачи (3)–(5) осуществлялось средствами конечноэлементного программного комплекса COMSOL [3]. Использовались следующие значения параметров безразмерной задачи: $\operatorname{Re} = 125$, $G = 9800$, $I = 0,008$, $b = 0,5$, $F_x = F_y = 0$. Дно потока задавалось функцией вида $h(x, y) = (1 - a \sin \omega x) \left(1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)$ при $a = 0,01$ и $\omega = 10$.

Выбранные значения параметров соответствуют водотоку глубиной 1 м и соотношением глубина : ширина : длина 1 : 10 : 100, характерной скоростью течения 1 м/с, и уклоном 1° при отсутствии внешних ветровых воздействий.

Скорость течения, вычисленная в соответствии с редуцированной трехмерной математической моделью мелкого протяженного потока, сравнивалась с результатами прямого численного моделирования, проведенного на основе полных трехмерных уравнений гидродинамики программного комплекса COMSOL Multiphysics [3].

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

В случае потока постоянной вязкости выполняется условие $\eta \equiv 1$, и функционалы (2) могут быть вычислены явно:

$$\begin{aligned} J_1 &= h - z, \quad J_2 = \frac{1}{2}(h^2 - z^2), \quad J_3 = \frac{1}{2}(h - z)^2, \\ J_4 &= \frac{1}{6}(h - z)^2(2h + z). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом представления (6), формулы (1) для компонент скорости и свободной границы

принимают вид

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G I ((h - \xi)^2 - (z - \xi)^2) + F_x (h - z), \\
 v &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G \frac{\partial \xi}{\partial y} ((h - \xi)^2 - (z - \xi)^2) + F_y (h - z), \\
 w &= \operatorname{Re} G \left[I \left((h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} (h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} (h - z)^2 (2(h - \xi) + z - \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \right. \quad (7) \\
 &\quad \left. + \left((h - \xi)(h - z) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} (h - z)^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] + \\
 &\quad + (h - z) \left(F_x \frac{\partial h}{\partial x} + F_y \frac{\partial h}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} G (h - \xi)^2 \left[I \left(2 \frac{\partial h}{\partial x} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(2 \frac{\partial h}{\partial y} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} (h - \xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right] + \\
 &\quad + (h - \xi) \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} (h - \xi) + F_y \frac{\partial}{\partial y} (h - \xi) \right).
 \end{aligned}$$

Отметим, что формула для продольной скорости (7) имеет вид параболической функции по переменной z .

Предположение о постоянной вязкости жидкости фактически означает ламинарное течение, которое детально изучено в классической гидродинамике [4]. Например, известно, что ламинарное течение в открытом наклонном прямолинейном канале описывается квадратичной функцией глубины (парабола Пуазейля). Это позволяет согласовать редуцированную модель (7) с моделью ламинарного течения в COMSOL, где численно решаются трехмерные уравнения Навье–Стокса [3].

На рисунке 1 приведены графики изменения продольной скорости по глубине потока. Сплошной линией нанесена скорость, полученная по формулам (7), а штрихов – рассчитанная программным комплексом COMSOL.

Дно потока соответствует значению $z = 1$, а поверхность $z = 0$ преобразованной безразмерной координаты.

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОТОК

Для расчета турбулентного течения в COMSOL была выбрана $k - \varepsilon$ модель турбулентности. Скорость турбулентного потока в редуцированной модели определялась формулами (1), (2) при вы-

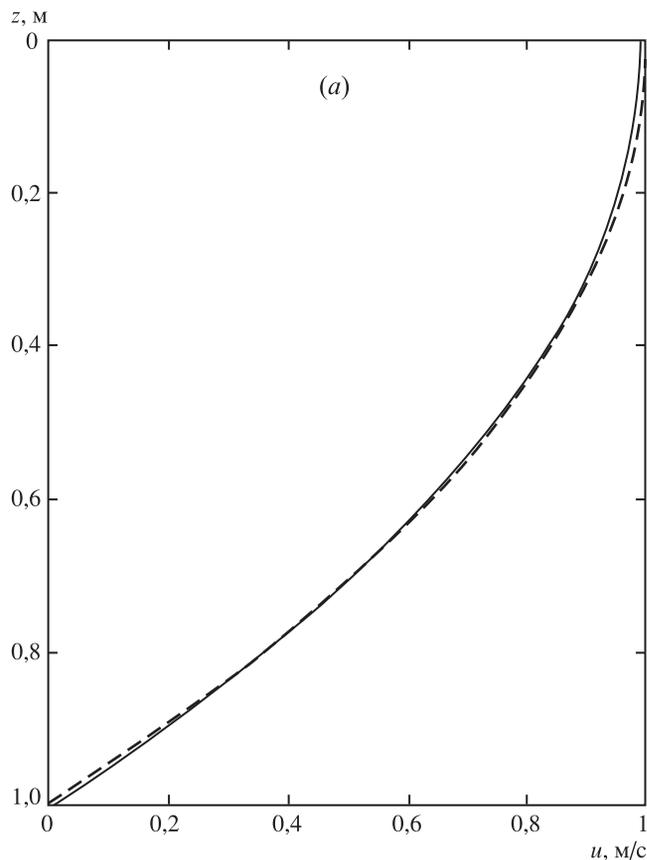


Рис. 1. Изменение продольной скорости по глубине ламинарного потока

боре функционального параметра турбулентной вязкости вида $\eta(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2$. Коэффициенты $c_i (i = 1, 2, 3)$ находятся из условия корреляции скорости модельного и эталонного потока и имеют значения $c_1 = 1,45$; $c_2 = -10^{-3}$; $c_3 = 0,83$.

Графики изменения продольной скорости по глубине потока приведены на рисунке 2. Сплошной линией нанесена скорость, полученная по формулам (1)–(3), а штрихов – рассчитанная программным комплексом COMSOL.

На рисунке 2 приведены данные турбулентного потока, по которому была проведена калибровка модели. Рисунок 2а соответствует расчету, при котором использовалось сгущение конечноэлементной сетки в придонном пограничном слое, что приводит к более точному результату, но заметно увеличивает время расчета.

На рисунке 3 приведены данные вычислительных экспериментов для турбулентных потоков, значение максимальной продольной скорости которых отличается от аналогичного значения для эталонного потока в меньшую (рис. 3а) или большую (рис. 3б) сторону на 20% (сгущение конечноэлементной сетки в придонном пограничном слое не используется).

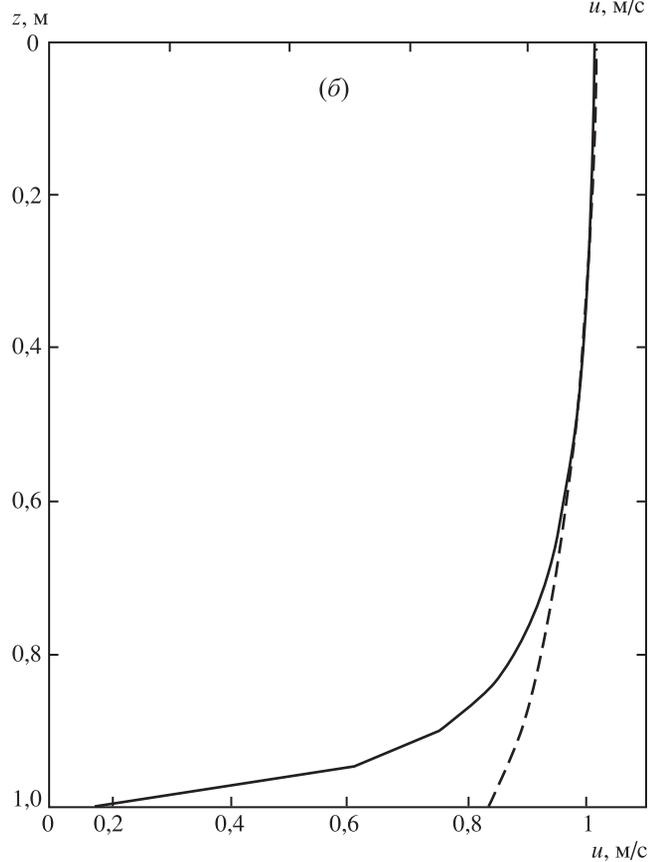
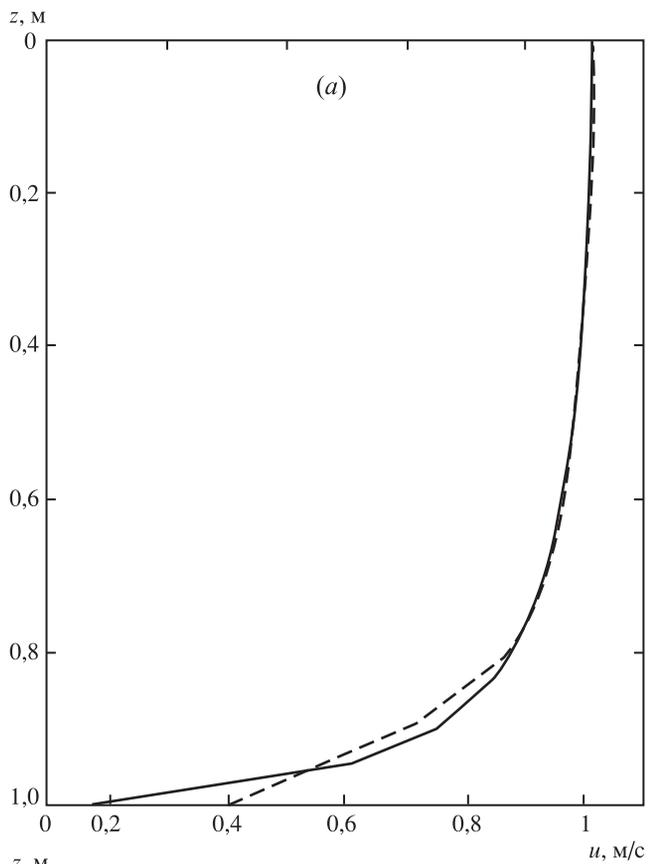


Рис. 2. Изменение продольной скорости по глубине эталонного турбулентного потока: при расчете с мелкой сеткой в пограничном слое (а); при расчете без сгущения сетки в пограничном слое (б)

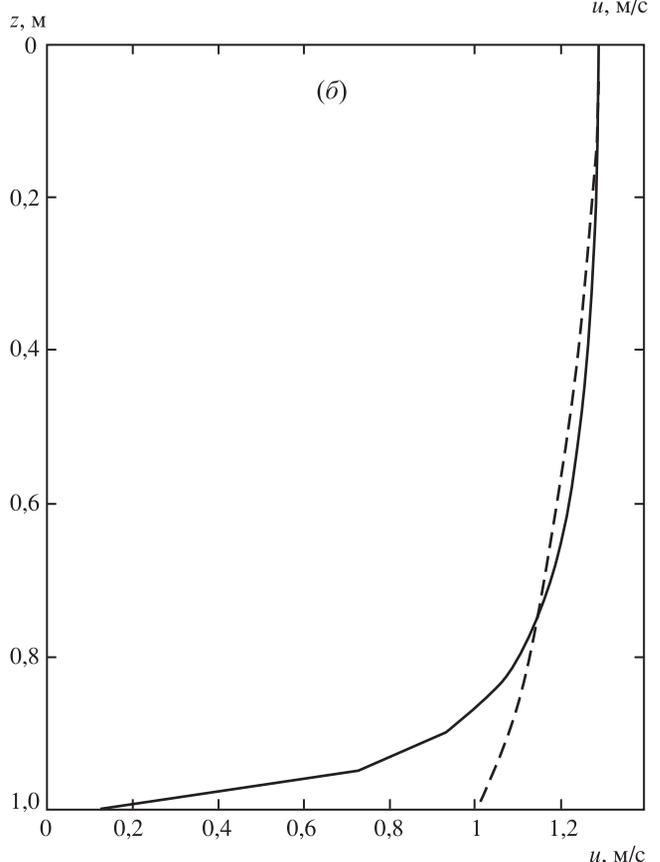
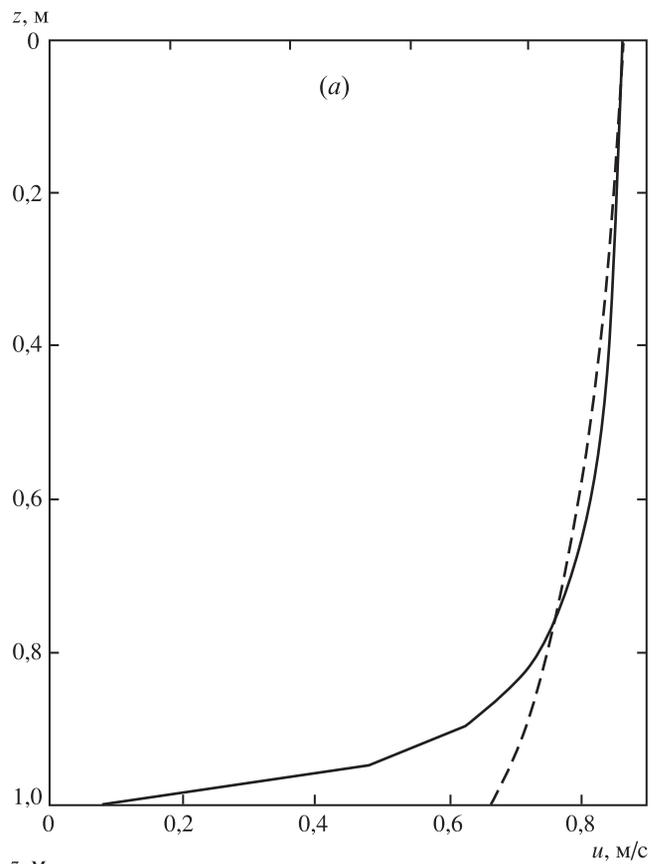


Рис. 3. Изменение продольной скорости по глубине потока: медленное течение (а); быстрое течение (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Представленные результаты численного моделирования позволяют утверждать, что предложенная в [1] редуцированная трехмерная модель мелкого протяженного руслового потока адекватно описывает его гидродинамику и может эффективно использоваться при моделировании основных гидрологических характеристик русловых потоков.

Автор выражает благодарность научному руководителю канд. физ.-мат. наук, доц. Надолину Константину Аркадьевичу за помощь в составлении статьи.

1. *Надолин К.А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 2. С. 14–28.
2. *Чикин А.Л., Чикина Л.Г.* Моделирование процесса переноса и оседания ила в подходных судоходных каналах (на примере Таганрогского залива) // Вестник Южного научного центра. 2011. Т. 7. № 2. С. 45–48.
3. *Жильев И.В., Надолин К.А.* Численное моделирование гидродинамики мелкого протяженного руслового потока // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 6 (131). С. 10–14.
4. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1978. 634 с.

NUMERICAL RESEARCH OF THE HYDRODYNAMICS IN SHALLOW AND LONG BED-STREAM FLOW

I.V. Zhilyaev

The reduced 3D model of the shallow and lengthy stream is tested numerically. For its verification, a number of calculations with finite-element package COMSOL was made. The values of longitudinal velocity were calculated in the framework of reduced model formulas through numerical solution of the initial-boundary value problem for the free surface displacement function. These values were compared with data of laminar and turbulent CFD COMSOL calculations. The obtained results demonstrate that the hydrodynamics of the shallow and lengthy bed-stream flow is described adequately by the proposed reduced model.

Key words: numerical modeling, shallow streams, reduced models, free surface.

REFERENCES

1. Nadolin K.A. An approach to modeling the passive mass transfer in river-bed stream. *Matematicheskoe modelirovanie. (Mathematical Models and Computer Simulations)*. 2009. 21(2): 14–28. (In Russian).
2. Chikin A.L., Chikina L.G. 2011. [Modelling of siltage and sedimentation process in navigation canals (for example, the Taganrog Bay)]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 7(2): 45–48. (In Russian).
3. Zhilyaev I.V., Nadolin K.A. 2012. Chislennoe modelirovanie gidrodinamiki melkogo protyazhennogo ruslovogo potoka. [Numerical simulation of the hydrodynamics of small extended streamflow]. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki. [Proceedings of SFU. Technical sciences]*. 6(131): 10–14. (In Russian).
4. Monin A.S. and Yaglom A.M. 1978. *Statisticheskaya gidromekhanika. [Statistical Hydromechanics]*. M., “Nauka”: 634 p. (In Russian).