

УДК 539.3

DOI: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-3-9

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

© 2017 г. Д.Н. Шейдаков¹, И.Б. Михайлова¹

Аннотация. Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. Вследствие развития современных технологий большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости при учете различных поверхностных явлений. Настоящая работа посвящена изучению бифуркации равновесия нелинейно-упругих труб с поверхностными напряжениями. В рамках модели Гертена – Мердока при осевом растяжении – сжатии исследовано выпучивание цилиндрической трубы, на внешней и внутренней поверхностях которой действуют поверхностные напряжения. При этом предполагалось, что упругие свойства трубы в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Модель Гертена – Мердока с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор усилий, действующий в данной мембране. Для произвольного изотропного сжимаемого материала получены точные уравнения нейтрального равновесия и сформулирована линеаризованная краевая задача, путем решения которой исследуется устойчивость однородных и неоднородных по толщине стенки цилиндрических труб с поверхностными напряжениями. При этом показано, что если материал трубы в объеме однороден, а упругие свойства внешней и внутренней поверхностей особым образом связаны, то для анализа ее устойчивости достаточно решить упрощенную линеаризованную краевую задачу.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел, поверхностные напряжения, модель Гертена – Мердока, цилиндрическая труба.

STABILITY OF NONLINEARLY ELASTIC CYLINDRICAL TUBE WITH SURFACE STRESSES

D.N. Sheydakov¹, I.B. Mikhailova¹

Abstract. The problem of equilibrium stability for deformable bodies is of major importance both from theoretical and practical points of view. Due to the development of modern technologies, the problem of stability analysis while taking into account various surface phenomena becomes relevant. This research is dedicated to the buckling analysis of nonlinearly elastic tubes with surface stresses. In the framework of Gurtin – Murdoch model, we have studied the stability of a cylindrical tube under axial tension-compression. It was assumed that the surface stresses are acting on the external and internal surfaces, and the bulk elastic properties of the tube are either constant or vary along the radius. From the mechanical point of view, the Gurtin – Murdoch model is equivalent to a deformable body with glued elastic membrane. In this case, the stress resultant tensor acting in the membrane can be interpreted as surface stresses. For an arbitrary isotropic compressible material the exact neutral equilibrium equations are derived and the linearized boundary value problem is formulated: by solving it, the stability of homogeneous and heterogeneous through the wall thickness cylindrical tubes with surface stresses is analyzed. It is also shown that if the bulk material of the tube is homogeneous and the elastic properties of the external and internal surfaces are connected in a special way, then to study its stability it is enough to consider the simplified linearized boundary value problem.

Keywords: nonlinear elasticity, stability of deformable bodies, surface stresses, Gurtin – Murdoch model, cylindrical tube.

¹ Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел очень важна с теоретической и практической точек зрения, так как истощение несущей способности и разрушение инженерных конструкций зачастую происходит именно в результате потери устойчивости под действием внешних нагрузок. При этом в связи с развитием современных технологий и появлением новых материалов все более актуальным становится анализ устойчивости тел с учетом различных поверхностных явлений [1]. В последнее время для моделирования таких явлений, особенно в наномеханике [2–4], получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект [5–7].

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно-упругих цилиндрических труб с поверхностными напряжениями. Для учета влияния последних используется модель Гертца – Мердока [8], которая с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор усилий, действующий в мембране.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках модели Гертца – Мердока система уравнений статики нелинейно-упругого тела с поверхностными напряжениями при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия в объеме

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

условий равновесия на части поверхности тела Ω_s , где действуют поверхностные напряжения

$$\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} - \overset{\circ}{\nabla}_s \cdot \mathbf{D}_s \right) \Big|_{\Omega_s} = \mathbf{t}, \quad (2)$$

уравнений состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{P} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}}, \\ \mathbf{D}_s &= \mathbf{P}_s \cdot \mathbf{C}_s, \quad \mathbf{P}_s = 2 \frac{\partial W_s(\mathbf{G}_s)}{\partial \mathbf{G}_s} \end{aligned} \quad (3)$$

и геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \\ \mathbf{G}_s &= \mathbf{C}_s \cdot \mathbf{C}_s^T, \quad \mathbf{C}_s = \overset{\circ}{\nabla}_s \mathbf{R} \Big|_{\Omega_s}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ – тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно, $\overset{\circ}{\nabla}$ – трехмерный набла-оператор в лагранжевых координатах, $\overset{\circ}{\nabla}_s$ – поверхностный набла-оператор, $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{P}_s$ – тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы и типа Кирхгофа, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела, $\mathbf{t}$ – вектор поверхностной нагрузки, W и W_s – плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации соответственно, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_s$ – меры деформации Коши – Грина в объеме и на поверхности, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_s$ – градиенты деформации, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, определяющий положение частиц тела в деформированном состоянии.

С учетом (3) в случае изотропного тела для тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ справедливы следующие соотношения [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{k=1}^3 \chi_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k, \quad \chi_k = 2 \frac{\partial W(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_k}, \\ \mathbf{G} &= \sum_{k=1}^3 G_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k, \end{aligned} \quad (5)$$

где G_k , $\mathbf{d}_k$ ($k = 1, 2, 3$) – собственные значения и собственные векторы меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$. В то же время выражение тензора поверхностных напряжений типа Кирхгофа $\mathbf{P}_s$ имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s &= \kappa_1 \mathbf{E}_s + 2\kappa_2 \mathbf{G}_s, \quad \kappa_\alpha = 2 \frac{\partial W_s(j_1, j_2)}{\partial j_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \\ j_1 &= \text{tr} \mathbf{G}_s, \quad j_2 = \text{tr} \mathbf{G}_s^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь j_1 , j_2 – инварианты меры поверхностной деформации типа Коши – Грина $\mathbf{G}_s$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$ – трехмерный и поверхностный единичные тензоры соответственно.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ТРУБА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассмотрим цилиндрическую трубу с внешним радиусом r_+ , внутренним радиусом r_- и длиной l . Будем полагать, что на ее внешней $\Omega_+(r = r_+)$ и внутренней $\Omega_-(r = r_-)$ поверхностях действуют поверхностные напряжения, то есть $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$. В случае осевого растяжения – сжатия трубы радиус-вектор $\mathbf{R}$ определяется следующими соотношениями [9]:

$$\mathbf{R} = f(r)\mathbf{e}_r + \alpha z\mathbf{e}_z, \quad R = f(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z, \quad (7)$$

$$r_- \leq r \leq r_+, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l,$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z – эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат соответственно, α – заданный коэффициент растяжения – сжатия вдоль оси трубы, $f(r)$ – некоторая неизвестная функция, характеризующая радиальную деформацию трубы.

Согласно выражениям (4), (7) градиенты деформации в объеме и на поверхности равны:

$$\mathbf{C} = f'(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f(r)}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_\pm = \frac{R_\pm}{r_\pm}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \quad R_\pm = f(r_\pm).$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по r , индексами «+» и «-» отмечены поверхностные величины, относящиеся к внешней и внутренней поверхностям цилиндрической трубы соответственно.

Из соотношений (4), (8) получим выражения для соответствующих мер деформации Коши – Грина:

$$\mathbf{G} = f'^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f^2}{r^2}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \quad (9)$$

$$\mathbf{G}_\pm = \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Очевидно, что в случае рассмотренной начальной деформации собственные векторы $\mathbf{d}_k (k = 1, 2, 3)$ меры деформации Коши – Грина совпадают с векторным базисом лагранжевых цилиндрических координат, то есть $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_z$, а собственные значения G_k равны

$$G_1 = f'^2, \quad G_2 = \frac{f^2}{r^2}, \quad G_3 = \alpha^2.$$

Тогда, с учетом (5), (6), для тензоров напряжений Кирхгофа справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P} = \chi_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \chi_2\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \chi_3\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_\pm = \left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2\kappa_2^\pm\right)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Подставляя полученные выражения в (3), найдем представления тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ и тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ в случае деформации осевого растяжения – сжатия цилиндрической трубы:

$$\mathbf{D} = f'\chi_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f}{r}\chi_2\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\chi_3\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_\pm = \frac{R_\pm}{r_\pm}\left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2\kappa_2^\pm\right)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z.$$

Будем полагать, что упругие свойства трубы в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Тогда уравнения равновесия (1) с учетом (11) примут вид:

$$\chi_1\left(f'' + \frac{f'}{r}\right) + \chi_1'f' - \frac{\chi_2f}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Согласно (2), (11) условия равновесия на внешней Ω_+ и внутренней Ω_- поверхностях трубы при отсутствии поверхностных нагрузок запишутся следующим образом:

$$\chi_1(r_\pm)f'(r_\pm) + \frac{R_\pm}{r_\pm^2}\left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right) = 0. \quad (13)$$

В результате неизвестная функция $f(r)$ находится путем решения краевой задачи (12), (13) при заданных плотностях W, W_+, W_- объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации. При этом необходимо выделить особый случай: если материал трубы в объеме однороден, а упругие свойства внешней и внутренней поверхностей связаны следующим соотношением

$$\frac{R_+}{r_+^2}\left(\kappa_1^+ + 2\frac{R_+^2}{r_+^2}\kappa_2^+\right) = \frac{R_-}{r_-^2}\left(\kappa_1^- + 2\frac{R_-^2}{r_-^2}\kappa_2^-\right), \quad (14)$$

то функция $f(r)$ будет линейна: $f(r) = ar, a \equiv \text{const}$.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим малое возмущение описанного выше начального деформированного состояния. Будем полагать, что возмущенное состояние равновесия цилиндрической трубы существует при тех

же самых внешних нагрузках и определяется радиус-вектором $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$. Здесь η – малый параметр, $\mathbf{v}$ – вектор добавочных перемещений.

Линеаризованные уравнения равновесия нелинейно-упругой среды имеют вид [9]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^* = 0, \quad \mathbf{D}^* = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}) \right]_{\eta=0}, \quad (15)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{C} + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{P}^*$ – линеаризованные тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно. Чтобы найти выражение последнего, проведем линеаризацию определяющих соотношений (5) [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \sum_{k=1}^3 (\chi_k^* \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k^* \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^*), \\ \mathbf{G}^* &= \sum_{k=1}^3 (G_k^* \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k^* \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^*). \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{d}_k$ и $\mathbf{d}_k^*$ ($k=1,2,3$) взаимно ортогональны, то есть $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_k^* = 0$, из (17) получим ($m=1,2,3; k \neq m$)

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{d}_k &= \chi_k^*, \\ \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{d}_m &= \frac{\chi_k - \chi_m}{G_k - G_m} \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{d}_m, \end{aligned} \quad (18)$$

где соотношения для χ_k^* имеют вид:

$$\begin{aligned} \chi_k^* &= \sum_{n=1}^3 \chi_{kn} G_n^*, \quad \chi_{kn} = \frac{\partial \chi_k(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_n}, \\ \mathbf{G}_n^* &= \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{d}_n. \end{aligned}$$

Формулы (18) дают представление всех компонент линеаризованного тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}^*$ в базисе $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ через компоненты линеаризованной меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}^*$, а сам тензор $\mathbf{G}^*$ равен

$$\mathbf{G}^* = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{v}^T. \quad (19)$$

Согласно (2) линеаризованные условия равновесия на внешней Ω_+ и внутренней Ω_- поверхностях трубы, где действуют поверхностные напряжения, имеют вид [1; 10]:

$$\left(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* - \nabla_{\pm} \cdot \mathbf{D}_{\pm}^* \right) \Big|_{r=r_{\pm}} = 0. \quad (20)$$

Здесь $\mathbf{D}_+^*$ и $\mathbf{D}_-^*$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы, для которых с учетом выражений (3), (6) справедливы следующие соотношения:

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\pm}^* &= \mathbf{P}_{\pm}^* \cdot \mathbf{C}_{\pm} + \mathbf{P}_{\pm} \cdot \nabla_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}, \\ \mathbf{P}_{\pm}^* &= \kappa_1^* \mathbf{E}_{\pm} + 2\kappa_2^* \mathbf{G}_{\pm} + 2\kappa_2 \mathbf{G}_{\pm}^*, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha}^* &= \sum_{\beta=1}^2 \kappa_{\alpha\beta}^* j_{\beta}^*, \quad \kappa_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial \kappa_{\alpha}^*(j_1^*, j_2^*)}{\partial j_{\beta}^*}, \quad \alpha=1,2, \\ j_1^* &= \text{tr} \mathbf{G}_{\pm}^*, \quad j_2^* = 2\text{tr}(\mathbf{G}_{\pm} \cdot \mathbf{G}_{\pm}^*), \\ \mathbf{G}_{\pm}^* &= \nabla_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} \cdot \mathbf{C}_{\pm}^T + \mathbf{C}_{\pm} \cdot \nabla_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}^T, \quad \mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{v}|_{r=r_{\pm}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\mathbf{P}_+^*$ и $\mathbf{P}_-^*$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{G}_+^*$ и $\mathbf{G}_-^*$ – линеаризованные меры поверхностной деформации типа Коши – Грина, а $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ – векторы добавочных перемещений внешней и внутренней поверхностей.

Будем полагать, что на торцах трубы ($z=0, l$) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линеаризованным граничным условиям [12]:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_r \Big|_{z=0, l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_{\phi} \Big|_{z=0, l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} \Big|_{z=0, l} = 0. \quad (23)$$

Запишем представление вектора добавочных перемещений $\mathbf{v}$ в базисе эйлеровых цилиндрических координат:

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_{\phi} \mathbf{e}_{\phi} + v_Z \mathbf{e}_Z. \quad (24)$$

Принимая во внимание выражения (8), (10), (16), (18), (19), (24) и то, что в рассмотренном невозмущенном состоянии $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_{\phi}$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_z$, компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}^*$ в базисе цилиндрических координат примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_R &= \frac{2ff'\chi_{12}}{r^2} \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + v_R \right) + \\ &+ \left(\chi_1 + 2f'^2 \chi_{11} \right) \frac{\partial v_R}{\partial r} + 2\alpha f' \chi_{13} \frac{\partial v_Z}{\partial z}, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_{\phi} &= \left(\chi_1 + \frac{f^2}{r^2} B_3 \right) \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} + \frac{ff' B_3}{r^2} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \phi} - v_{\phi} \right), \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_Z &= \left(\chi_1 + \alpha^2 B_2 \right) \frac{\partial v_Z}{\partial r} + \alpha f' B_2 \frac{\partial v_R}{\partial z}, \\ \mathbf{e}_{\phi} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_R &= \frac{ff' B_3}{r} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial r} + \frac{\chi_2 + f'^2 B_3}{r} \left(\frac{\partial v_R}{\partial \phi} - v_{\phi} \right), \\ \mathbf{e}_{\phi} \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_{\phi} &= \frac{1}{r} \left(\chi_2 + 2 \frac{f^2}{r^2} \chi_{22} \right) \left(\frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} + v_R \right) + \\ &+ \frac{2ff'\chi_{12}}{r} \frac{\partial v_R}{\partial r} + \frac{2\alpha f' \chi_{23}}{r} \frac{\partial v_Z}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\chi_2 + \alpha^2 B_1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\alpha f B_1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \quad (25)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_R = \left(\chi_3 + f'^2 B_2 \right) \frac{\partial v_R}{\partial z} + \alpha f' B_2 \frac{\partial v_z}{\partial r},$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_\varphi = \left(\chi_3 + \frac{f^2}{r^2} B_1 \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{\alpha f B_1}{r^2} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi},$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^\bullet \cdot \mathbf{e}_z = \frac{2\alpha f \chi_{23}}{r^2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_R \right) +$$

$$+ 2\alpha f' \chi_{13} \frac{\partial v_R}{\partial r} + \left(\chi_3 + 2\alpha^2 \chi_{33} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$B_1 = \frac{(\chi_2 - \chi_3)r^2}{f^2 - \alpha^2 r^2}, \quad B_2 = \frac{\chi_1 - \chi_3}{f'^2 - \alpha^2}, \quad B_3 = \frac{(\chi_1 - \chi_2)r^2}{f'^2 r^2 - f^2}.$$

Аналогично, согласно соотношениям (8)–(10), (21), (22), (24), компоненты линейризованных тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+^\bullet$ и $\mathbf{D}_-^\bullet$ записываются следующим образом:

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_R = \frac{1}{r_\pm} \left(\kappa_1^\pm + 2 \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} \kappa_2^\pm \right) \left(\frac{\partial v_R^\pm}{\partial \varphi} - v_\Phi^\pm \right),$$

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{2\alpha R_\pm \xi_{12}^\pm}{r_\pm} \frac{\partial v_z^\pm}{\partial z} +$$

$$+ \frac{1}{r_\pm} \left(\kappa_1^\pm + 2 \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} (3\kappa_2^\pm + \xi_1^\pm) \right) \left(\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial \varphi} + v_R^\pm \right),$$

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_z = \frac{2\alpha R_\pm \kappa_2^\pm}{r_\pm} \frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial z} +$$

$$+ \frac{1}{r_\pm} \left(\kappa_1^\pm + 2 \left(\alpha^2 + \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} \right) \kappa_2^\pm \right) \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \varphi},$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_R = \left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2 \kappa_2^\pm \right) \frac{\partial v_R^\pm}{\partial z},$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{2\alpha R_\pm \kappa_2^\pm}{r_\pm^2} \frac{\partial v_z^\pm}{\partial \varphi} +$$

$$+ \left(\kappa_1^\pm + 2 \left(\alpha^2 + \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} \right) \kappa_2^\pm \right) \frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial z}, \quad (26)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet \cdot \mathbf{e}_z = \frac{2\alpha R_\pm \xi_{12}^\pm}{r_\pm^2} \left(\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial \varphi} + v_R^\pm \right) +$$

$$+ \left(\kappa_1^\pm + 2\alpha^2 (3\kappa_2^\pm + \xi_2^\pm) \right) \frac{\partial v_z^\pm}{\partial z},$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_\pm^\bullet = 0$$

$$\xi_1^\pm = \kappa_{11}^\pm + 4 \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} \kappa_{12}^\pm + 4 \frac{R_\pm^4}{r_\pm^4} \kappa_{22}^\pm,$$

$$\xi_2^\pm = \kappa_{11}^\pm + 4\alpha^2 \kappa_{12}^\pm + 4\alpha^4 \kappa_{22}^\pm,$$

$$\xi_{12}^\pm = \kappa_{11}^\pm + 2 \left(\alpha^2 + \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2} \right) \kappa_{12}^\pm + 4 \frac{\alpha^2 R_\pm^2}{r_\pm^2} \kappa_{22}^\pm,$$

$$v_R^\pm = v_R \Big|_{r=r_\pm}, \quad v_\Phi^\pm = v_\Phi \Big|_{r=r_\pm}, \quad v_z^\pm = v_z \Big|_{r=r_\pm}.$$

Выражения (15), описывающие возмущенное состояние равновесия цилиндрической трубы, представляют собой систему трех уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций v_R, v_Φ, v_z . Подстановка [12]

$$v_R = V_R(r) \cos n\varphi \cos \beta z,$$

$$v_\Phi = V_\Phi(r) \sin n\varphi \cos \beta z, \quad (27)$$

$$v_z = V_z(r) \cos n\varphi \sin \beta z,$$

$$\beta = \pi m / l, \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots$$

приводит к отделению переменных φ и z в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линейризованным краевым условиям (23).

Учитывая соотношения (25), (27), выпишем уравнения нейтрального равновесия (15) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} & \left(\chi_1 + 2f'^2 \chi_{11} \right) V_R'' - \frac{2n}{r^2} \left(\chi_2 + \frac{f^2}{r^2} \chi_{22} + \frac{f'^2 B_3}{2} - \zeta_1 \right) V_\Phi + \\ & + \left(\frac{\chi_1 + 2f'^2 \chi_{11}}{r} + \chi_1' + 2f'^2 \chi_{11}' + 4ff'' \chi_{11} \right) V_R' - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\tau + f'^2 [n^2 B_3 + r^2 \beta^2 B_2] + 2 \frac{f^2}{r^2} \chi_{22} - 2\zeta_1 \right) V_R + \\ & + (B_3 + 2\chi_{12}) \frac{nff'}{r^2} V_\Phi' + \alpha \beta f' (B_2 + 2\chi_{13}) V_z' + \\ & + 2\alpha \beta \left(\chi_{13} \left[f'' + \frac{f'}{r} \right] + f' \chi_{13}' - \frac{f}{r^2} \chi_{23} \right) V_z = 0, \\ & \left(\chi_1 + \frac{f^2}{r^2} B_3 \right) V_\Phi'' - \frac{2n}{r^2} \left(\chi_2 + \frac{f^2}{r^2} \chi_{22} + \frac{f'^2 B_3 + \zeta_2}{2} \right) V_R + \\ & + \left(\frac{\chi_1}{r} + \chi_1' + \frac{f^2}{r^2} B_3' + \frac{fB_3}{r^2} \left[2f' - \frac{f}{r} \right] \right) V_\Phi' - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\tau + \beta^2 f^2 B_1 + 2 \frac{n^2 f^2}{r^2} \chi_{22} + f'^2 B_3 + \zeta_2 \right) V_\Phi - \\ & - (B_3 + 2\chi_{12}) \frac{nff'}{r^2} V_R' - (B_1 + 2\chi_{23}) \frac{\alpha \beta n f}{r^2} V_z = 0, \\ & \left(\chi_1 + \alpha^2 B_2 \right) V_z'' + \left(\frac{\chi_1 + \alpha^2 B_2}{r} + \chi_1' + \alpha^2 B_2' \right) V_z' - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\tau - \chi_2 + \alpha^2 [n^2 B_1 + 2\beta^2 r^2 \chi_{33}] \right) V_z - \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha\beta f'(B_2 + 2\chi_{13})V'_R - (B_1 + 2\chi_{23})\frac{\alpha\beta n f}{r^2}V_\Phi - \\
& -\alpha\beta\left(\left[f'' + \frac{f'}{r}\right]B_2 + fB'_2 + 2\frac{f}{r^2}\chi_{23}\right)V_R = 0.
\end{aligned}$$

Для сокращения записи здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= ff'\chi'_{12} + \left(f'^2 + ff'' - \frac{ff'}{r}\right)\chi_{12}, \\
\zeta_2 &= ff'B'_3 + \left(f'^2 + ff'' - \frac{ff'}{r}\right)B_3, \\
\tau &= (n^2 + 1)\chi_2 + r^2\beta^2\chi_3.
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что в упомянутом выше особом случае (труба однородна, упругие свойства внешней и внутренней поверхностей связаны соотношением (14)) линейаризованные уравнения равновесия (28) имеют более простой вид:

$$\begin{aligned}
& (\chi_1 + 2a^2\chi_{11})\left(V''_R + \frac{V'_R}{r}\right) - \frac{2n}{r^2}\left(\chi_2 + a^2\chi_{22} + \frac{a^2B_3}{2}\right)V_\Phi - \\
& - \frac{1}{r^2}\left(\tau + a^2[n^2B_3 + r^2\beta^2B_2] + 2a^2\chi_{22}\right)V_R + \\
& + (B_3 + 2\chi_{12})\frac{na^2}{r}V'_\Phi + \alpha\beta a(B_2 + 2\chi_{13})V'_Z = 0, \\
& (\chi_1 + a^2B_3)\left(V''_\Phi + \frac{V'_\Phi}{r}\right) - \frac{2n}{r^2}\left(\chi_2 + a^2\chi_{22} + \frac{a^2B_3}{2}\right)V_R - \\
& - \frac{1}{r^2}\left(\tau + a^2r^2\beta^2B_1 + 2n^2a^2\chi_{22} + a^2B_3\right)V_\Phi - \quad (29) \\
& - (B_3 + 2\chi_{12})\frac{na^2}{r}V'_R - (B_1 + 2\chi_{23})\frac{\alpha\beta na}{r}V_Z = 0, \\
& (\chi_1 + \alpha^2B_2)\left(V''_Z + \frac{V'_Z}{r}\right) - \frac{\tau - \chi_2 + \alpha^2(n^2B_1 + 2\beta^2r^2\chi_{33})}{r^2}V_Z - \\
& - \alpha\beta a(B_2 + 2\chi_{13})\left(V'_R + \frac{nV_\Phi + V_R}{r}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Согласно выражениям (20), (25)–(27) линейаризованные условия равновесия на внешней и внутренней поверхностях трубы записываются следующим образом ($r = r_\pm$):

$$\begin{aligned}
& (\chi_1 + 2f'^2\chi_{11})V'_R + \frac{1}{r_\pm^2}\left(2ff'\chi_{12} + \kappa_1^\pm(n^2 + \beta^2r_\pm^2 + 1) + \right. \\
& + 2\left(\alpha^2\beta^2r_\pm^2 + \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}[n^2 + 3]\right)\kappa_2^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\xi_1^\pm\bigg)V_R + \\
& + \frac{n}{r_\pm^2}\left(2ff'\chi_{12} + 2\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}[4\kappa_2^\pm + \xi_1^\pm]\right)V_\Phi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha\beta\left(f'\chi_{13} + \frac{R_\pm\xi_{12}^\pm}{r_\pm^2}\right)V_Z = 0, \quad (30) \\
& \left(\chi_1 + \frac{f^2}{r_\pm^2}B_3\right)V'_\Phi + \frac{1}{r_\pm^2}\left(\kappa_1^\pm(n^2 + \beta^2r_\pm^2 + 1) - ff'B_3 + \right. \\
& + 2\left(\alpha^2\beta^2r_\pm^2 + \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}[3n^2 + \beta^2r_\pm^2 + 1]\right)\kappa_2^\pm + 2n^2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\xi_1^\pm\bigg)V_\Phi + \\
& + \frac{n}{r_\pm^2}\left(2\kappa_1^\pm - ff'B_3 + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}[4\kappa_2^\pm + \xi_1^\pm]\right)V_R + \\
& + \frac{2\alpha\beta n R_\pm}{r_\pm^2}(\kappa_2^\pm + \xi_{12}^\pm)V_Z = 0, \\
& (\chi_1 + \alpha^2B_2)V'_Z + \frac{1}{r_\pm^2}\left(\kappa_1^\pm(n^2 + \beta^2r_\pm^2) + \right. \\
& + 2\left(\frac{n^2R_\pm^2}{r_\pm^2} + \alpha^2[n^2 + 3\beta^2r_\pm^2]\right)\kappa_2^\pm + 2\alpha^2\beta^2r_\pm^2\xi_2^\pm\bigg)V_Z + \\
& + \alpha\beta\left(\frac{2R_\pm\xi_{12}^\pm}{r_\pm^2} - f'B_2\right)V_R + \frac{2\alpha\beta n R_\pm}{r_\pm^2}(\kappa_2^\pm + \xi_{12}^\pm)V_\Phi = 0.
\end{aligned}$$

В результате исследование устойчивости цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае это задача (28), (30), а в случае специальной однородной трубы – задача (29), (30).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода рассмотрена проблема устойчивости нелинейно-упругой цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями. Полагалось, что упругие свойства трубы в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Для произвольного изотропного материала получена система линейаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение однородных и неоднородных по толщине стенки труб в возмущенном состоянии. Используя специальную подстановку, исследование устойчивости в общем случае сведено к решению линейной однородной краевой задачи (28), (30) для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом показано, что если труба однородна, а упругие свойства внешней и внутренней поверхностей особым образом связаны (14), то для анализа ее устойчивости достаточно рассмотреть упрощенную линейаризованную краевую задачу (29), (30).

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-08-00802-а) и в рамках реализации Государственного задания на 2017 г., номер проекта 0256-2014-0003 (№ государственной регистрации 01201354242).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145. doi: 10.1023/A:1007448209058
2. Altenbach H., Morozov N.F. (eds). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p. doi: 10.1007/978-3-642-35783-1
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics*. Vol. 42. San Diego, Elsevier: 1–68. doi: 10.1016/S0065-2156(08)00001-X
4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24: 52–82. doi: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301
6. Cuenot S., Frétiigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410–5. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nanostructured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363. doi: 10.1098/rspa.2005.1637
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
9. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
10. Еремеев В.А., Zubov Л.М. 2008. *Механика упругих оболочек*. М., Наука: 280 с.
11. Шейдаков Д.Н. 2007. Устойчивость прямоугольной плиты при двухосном растяжении. *Прикладная механика и техническая физика*. 48(4): 94–103.
12. Шейдаков Д.Н., Лыжов В.А., Михайлова И.Б. 2011. Потеря устойчивости сжатого пористого стержня с однородным покрытием. *Вестник Южного научного центра*. 7(1): 5–12.
1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of elasticity*. 47(2): 121–145. doi: 10.1023/A:1007448209058
2. Altenbach H., Morozov N.F. (eds). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p. doi: 10.1007/978-3-642-35783-1
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics*. Vol. 42. San Diego, Elsevier: 1–68. doi: 10.1016/S0065-2156(08)00001-X
4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24: 52–82. doi: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301
6. Cuenot S., Frétiigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410–5. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nanostructured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363. doi: 10.1098/rspa.2005.1637
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
9. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p. doi: 10.1016/B978-0-444-87439-9.50019-X
10. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2008. *Mekhanika uprugikh obolochek*. [Mechanics of elastic shells]. Moscow, Nauka: 280 p. (In Russian).
11. Sheidakov D.N. 2007. Stability of a rectangular plate under biaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(4): 547–555. doi: 10.1007/s10808-007-0069-9
12. Sheidakov D.N., Lyzhov V.A., Mihailova I.B. 2011. [Buckling of compressed porous rod with solid coating]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 7(1): 5–12. (In Russian).

Поступила 30.06.2017