НАУКА ЮГА РОССИИ (ВЕСТНИК ЮЖНОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА) 2016 Т. 12 № 4 С. 3–9
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2016 VOL. 12 No 4 P. 3–9

МЕХАНИКА

УДК 539.3

БИФУРКАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

© 2016 г. Д.Н. Шейдаков[1], И.Б. Михайлова[1]

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. В связи с развитием современных технологий большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости при учете различных поверхностных явлений. Настоящая работа посвящена изучению бифуркации равновесия нелинейно упругих плит с поверхностными напряжениями. В рамках модели Гертина – Мердока при двухосном растяжении-сжатии исследовано выпучивание толстой прямоугольной плиты, на лицевых поверхностях которой действуют поверхностные напряжения. При этом предполагалось, что упругие свойства плиты в объеме постоянны или изменяются по толщине. Модель Гертина – Мердока с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор усилий, действующий в данной мембране. Для произвольного изотропного сжимаемого материала получены точные уравнения нейтрального равновесия и сформулированы линеаризованные краевые задачи, путем решения которых исследуется устойчивость однородных и неоднородных по толщине упругих прямоугольных плит с поверхностными напряжениями. Показано, что если упругие свойства плиты симметричны относительно срединной поверхности, то для анализа устойчивости достаточно решить две упрощенные краевые задачи для половины плиты.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел, поверхностные напряжения, модель Гертина – Мердока, прямоугольная плита.

EQUILIBRIUM BIFURCATION OF NONLINEARLY ELASTIC RECTANGULAR PLATES WITH SURFACE STRESSES

D.N. Sheydakov[1], I.B. Mikhailova[1]

The problem of equilibrium stability for deformable bodies is of major importance both from theoretical and practical points of view. Due to the development of modern technologies, the problem of stability analysis while taking into account the various surface phenomena becomes relevant. The present research is dedicated to the buckling analysis of nonlinearly elastic plates with surface stresses. In the framework of Gurtin – Murdoch model, we have studied the stability of a thick rectangular plate under biaxial tension-compression. It was assumed that the surface stresses are acting on the plate faces, and the bulk elastic properties of the plate are either constant or vary through the thickness. From the mechanical point of view, the Gurtin – Murdoch model is equivalent to a deformable body with glued elastic membrane. In this case, the stress resultant tensor acting in the membrane can be interpreted as surface stresses. For an arbitrary isotropic compressible material the exact neutral equilibrium equations are derived and the linearized boundary value problems are formulated by solving which the stability of homogeneous and heterogeneous through the thickness elastic rectangular plates with surface stresses is analyzed. It is indicated that if the elastic properties of the plate are symmetric with respect to the middle surface then it is sufficient to solve two simplified boundary value problems for the half plate to analyze the stability.

Keywords: nonlinear elasticity, stability of deformable bodies, surface stresses, Gurtin – Murdoch model, rectangular plate.

[1] Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием современных технологий и появлением новых материалов большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости равновесия деформируемых тел с учетом различных поверхностных явлений [1]. Например, характер деформирования тел микро- и наноразмеров часто существенно отличается от поведения тел макроразмеров, что может быть объяснено поверхностными эффектами [2]. Кроме того, эти эффекты могут играть значительную роль в механике тел, на поверхности которых нанесено покрытие, например нанопленка, или произведена некоторая обработка поверхности, изменяющая ее свойства.

В последнее время для моделирования поверхностных явлений, особенно в наномеханике [3; 4], получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений в частности позволяет описать характерный для наноматериалов размерный эффект [5–7].

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно упругих прямоугольных плит с поверхностными напряжениями. Для учета влияния последних используется модель Гертина – Мердока [8], которая с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор усилий, действующий в мембране.

РАВНОВЕСИЕ ПЛИТЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках модели Гертина – Мердока система уравнений статики нелинейно упругого тела с поверхностными напряжениями при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0, \tag{1}$$

условий равновесия на части поверхности тела Ω_s, где действуют поверхностные напряжения

$$\left.\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}-\overset{\circ}{\nabla}_s\cdot\mathbf{D}_s\right)\right|_{\Omega_s}=\mathbf{t}, \tag{2}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{C},\quad \mathbf{P}=2\frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial\mathbf{G}},$$
$$\mathbf{D}_s=\mathbf{P}_s\cdot\mathbf{C}_s,\quad \mathbf{P}_s=2\frac{\partial W_s(\mathbf{G}_s)}{\partial\mathbf{G}_s} \tag{3}$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{G}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{C}=\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$$
$$\mathbf{G}_s=\mathbf{C}_s\cdot\mathbf{C}_s^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{C}_s=\left.\overset{\circ}{\nabla}_s\mathbf{R}\right|_{\Omega_s}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ – тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно, $\overset{\circ}{\nabla}$ – трехмерный набла-оператор в лагранжевых координатах, $\overset{\circ}{\nabla}_s$ – поверхностный набла-оператор, $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{P}_s$ – тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы и типа Кирхгофа, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела, $\mathbf{t}$ – вектор поверхностной нагрузки, W и W_s – плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации соответственно, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_s$ – меры деформации Коши – Грина в объеме и на поверхности, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_s$ – градиенты деформации, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, определяющий положение частиц тела в деформированном состоянии.

С учетом (3) в случае изотропного тела для тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ справедливы следующие соотношения [9]:

$$\mathbf{P}=\sum_{k=1}^{3}\chi_k\mathbf{d}_k\otimes\mathbf{d}_k,\quad \chi_k=2\frac{\partial W(G_1,G_2,G_3)}{\partial G_k},$$
$$\mathbf{G}=\sum_{k=1}^{3}G_k\mathbf{d}_k\otimes\mathbf{d}_k, \tag{5}$$

где $G_k,\mathbf{d}_k (k = 1,2,3)$ – собственные значения и собственные векторы меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$. В то же время выражение тензора поверхностных напряжений типа Кирхгофа $\mathbf{P}_s$ имеет вид [10]

$$\mathbf{P}_s=\kappa_1\mathbf{E}_s+2\kappa_2\mathbf{G}_s,\quad \kappa_\alpha=2\frac{\partial W_s(j_1,j_2)}{\partial j_\alpha},$$
$$\alpha=1{,}2,\quad j_1=\mathrm{tr}\mathbf{G}_s,\quad j_2=\mathrm{tr}\mathbf{G}_s^2. \tag{6}$$

Здесь j_1, j_2 – инварианты меры поверхностной деформации типа Коши – Грина $\mathbf{G}_s$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_s=\mathbf{E}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ – трехмерный и поверхностный единичные тензоры соответственно.

Рассмотрим прямоугольную плиту толщины $2h$ со сторонами b_1 и b_2. Будем полагать, что на ее верхней $\Omega_+(x_3 = h)$ и нижней $\Omega_-(x_3 = -h)$ лицевых поверхностях действуют поверхностные напряжения, т.е. $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$. В случае двухосного растяжения-сжатия плиты радиус-вектор $\mathbf{R}$ определяется следующими соотношениями [9]:

$$\mathbf{R} = \lambda_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f(x_3)\mathbf{e}_3\,, \tag{7}$$

$$0 \le x_\alpha \le b_\alpha, \quad \alpha = 1,2; \qquad |x_3| \le h\,,$$

где x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортонормированный векторный базис декартовых координат, λ_1 и λ_2 – коэффициенты растяжения-сжатия вдоль осей x_1 и x_2 соответственно, $f(x_3)$ – неизвестная функция, характеризующая толщинную деформацию плиты.

Согласно выражениям (4), (7), градиенты деформации в объеме и на поверхности равны:

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k, \quad \lambda_3 = f';$$

$$\mathbf{C}_\pm = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha. \tag{8}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по x_3, индексами «+» и «–» отмечены поверхностные величины, относящиеся к верхней и нижней лицевым поверхностям прямоугольной плиты соответственно.

Из соотношений (4), (8) получим выражения для соответствующих мер деформации Коши – Грина:

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2 \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{G}_\pm = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha^2 \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha. \tag{9}$$

Очевидно, что в случае рассмотренной начальной деформации собственные векторы $\mathbf{d}_k$ ($k = 1,2,3$) меры деформации Коши – Грина совпадают с векторным базисом декартовых координат, т.е. $\mathbf{d}_k = \mathbf{e}_k$, а собственные значения $G_k = \lambda_k^2$. Тогда, с учетом (5), (6), для тензоров напряжений Кирхгофа справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{3} \chi_k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{P}_\pm = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\kappa_1^\pm + 2\lambda_\alpha^2 \kappa_2^\pm\right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha\,. \tag{10}$$

Подставляя полученные выражения в (3), найдем представления тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ и тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ в случае деформации двухосного растяжения-сжатия прямоугольной плиты:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \chi_k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{D}_\pm = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \left(\kappa_1^\pm + 2\lambda_\alpha^2 \kappa_2^\pm\right) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha\,. \tag{11}$$

Будем полагать, что упругие свойства плиты в объеме постоянны или изменяются по толщине. Тогда уравнения равновесия (1) с учетом (11) примут вид

$$\chi_3 f'' + \chi_3' f' = 0\,. \tag{12}$$

Согласно (2), (11) условия равновесия на лицевых поверхностях Ω_+ и Ω_- при отсутствии поверхностных нагрузок запишутся следующим образом:

$$\chi_3 f'\big|_{x_3 = \pm h} = 0\,. \tag{13}$$

Таким образом, при заданной плотности потенциальной энергии деформации W неизвестная функция $f(x_3)$ находится путем решения краевой задачи (12), (13) с дополнительным условием $f(0) = 0$, выражающим отсутствие вертикальных смещений на серединной поверхности плиты. Следует отметить, что в случае однородной упругой плиты функция f будет линейна: $f(x_3) = \lambda_3 x_3$, $\lambda_3 \equiv \mathrm{const}$.

ВОЗМУЩЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия плиты с поверхностными напряжениями при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиус-вектором $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$. Здесь η – малый параметр, $\mathbf{v}$ – вектор добавочных перемещений.

Возмущенное состояние равновесия нелинейно упругого тела описывается уравнениями [9]:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^\bullet = 0, \qquad \mathbf{D}^\bullet = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v})\right]_{\eta=0}, \tag{14}$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \mathbf{P}^\bullet \cdot \mathbf{C} + \mathbf{P} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}\,. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{P}^\bullet$ – линеаризованные тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно.

Чтобы найти выражение последнего, проведем линеаризацию определяющих соотношений (5) [11]:

$$\mathbf{P}^{\bullet} = \sum_{k=1}^{3}\left(\chi_k^{\bullet}\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k^{\bullet} \otimes \mathbf{d}_k + \chi_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^{\bullet}\right)$$

$$\mathbf{G}^{\bullet} = \sum_{k=1}^{3}\left(G_k^{\bullet}\mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k^{\bullet} \otimes \mathbf{d}_k + G_k \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^{\bullet}\right). \quad (16)$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{d}_k$ и $\mathbf{d}_k^{\bullet} (k = 1,2,3)$ взаимно ортогональны, т.е. $\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_k^{\bullet} = 0$, из (16) получим $(m = 1,2,3;\ k \neq m)$:

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^{\bullet} \cdot \mathbf{d}_k = \chi_k^{\bullet}$$

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^{\bullet} \cdot \mathbf{d}_m = \frac{\chi_k - \chi_m}{G_k - G_m}\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \cdot \mathbf{d}_m, \quad (17)$$

где соотношения для $\chi_k^{\bullet}$ имеют вид

$$\chi_k^{\bullet} = \sum_{n=1}^{3}\chi_{kn}G_n^{\bullet}, \qquad \chi_{kn} = \frac{\partial \chi_k(G_1, G_2, G_3)}{\partial G_n},$$

$$G_n^{\bullet} = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \cdot \mathbf{d}_n. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) дают представление всех компонент линеаризованного тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}^{\bullet}$ в базисе $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ через компоненты линеаризованной меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}^{\bullet}$, а сам тензор $\mathbf{G}^{\bullet}$ равен

$$\mathbf{G}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}. \quad (19)$$

Согласно (2), линеаризованные условия равновесия на лицевых поверхностях плиты Ω_+ и Ω_-, где действуют поверхностные напряжения, имеют вид [1; 10]

$$\left.\left(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}^{\bullet} - \overset{\circ}{\nabla}_{\pm} \cdot \mathbf{D}_{\pm}^{\bullet}\right)\right|_{x_3 = \pm h} = 0. \quad (20)$$

Здесь $\mathbf{D}_+^{\bullet}$ и $\mathbf{D}_-^{\bullet}$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы, для которых с учетом выражений (3), (6) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\bullet} = \mathbf{P}_{\pm}^{\bullet} \cdot \mathbf{C}_{\pm} + \mathbf{P}_{\pm} \cdot \overset{\circ}{\nabla}_{\pm}\mathbf{v}_{\pm},$$

$$\mathbf{P}_{\pm}^{\bullet} = \kappa_1^{\pm\bullet}\mathbf{E}_{\pm} + 2\kappa_2^{\pm\bullet}\mathbf{G}_{\pm} + 2\kappa_2^{\pm}\mathbf{G}_{\pm}^{\bullet}, \quad (21)$$

где

$$\kappa_{\alpha}^{\pm\bullet} = \sum_{\beta=1}^{2}\kappa_{\alpha\beta}^{\pm}j_{\beta}^{\pm\bullet}, \quad \kappa_{\alpha\beta}^{\pm} = \frac{\partial \kappa_{\alpha}^{\pm}(j_1^{\pm}, j_2^{\pm})}{\partial j_{\beta}^{\pm}}, \quad \alpha = 1,2$$

$$j_1^{\pm\bullet} = \mathrm{tr}\mathbf{G}_{\pm}^{\bullet}, \quad j_2^{\pm\bullet} = 2\mathrm{tr}\left(\mathbf{G}_{\pm} \cdot \mathbf{G}_{\pm}^{\bullet}\right)$$

$$\mathbf{G}_{\pm}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla}_{\pm}\mathbf{v}_{\pm} \cdot \mathbf{C}_{\pm}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}_{\pm} \cdot \overset{\circ}{\nabla}_{\pm}\mathbf{v}_{\pm}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{v}\big|_{x_3 = \pm h}. \quad (22)$$

Здесь $\mathbf{P}_+^{\bullet}$ и $\mathbf{P}_-^{\bullet}$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{G}_+^{\bullet}$ и $\mathbf{G}_-^{\bullet}$ – линеаризованные меры поверхностной деформации типа Коши – Грина, а $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ – векторы добавочных перемещений верхней и нижней лицевых поверхностей.

Будем полагать, что на краях плиты ($x_1 = 0, b_1$; $x_2 = 0, b_2$) выполняются условия «скользящей заделки», т.е. задано постоянное нормальное перемещение и отсутствуют силы трения. Это приводит к следующим линеаризованным граничным условиям [11]:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_2\big|_{x_1 = 0, b_1} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_3\big|_{x_1 = 0, b_1} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1\big|_{x_1 = 0, b_1} = 0;$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_1\big|_{x_2 = 0, b_2} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_3\big|_{x_2 = 0, b_2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2\big|_{x_2 = 0, b_2} = 0. \quad (23)$$

Запишем представление вектора добавочных перемещений $\mathbf{v}$ в базисе декартовых координат:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3. \quad (24)$$

С учетом соотношений (8), (19), (22), (24) выражения линеаризованной меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}^{\bullet}$ и линеаризованных мер поверхностной деформации типа Коши – Грина $\mathbf{G}_+^{\bullet}$ и $\mathbf{G}_-^{\bullet}$ записываются следующим образом:

$$\mathbf{G}^{\bullet} = \sum_{k,m=1}^{3}\left(\lambda_k\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \lambda_m\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \quad (25)$$

$$\mathbf{G}_{\pm}^{\bullet} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\lambda_{\alpha}\frac{\partial v_{\alpha}^{\pm}}{\partial x_{\beta}} + \lambda_{\beta}\frac{\partial v_{\beta}^{\pm}}{\partial x_{\alpha}}\right)\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}, \quad (26)$$

$$v_k^{\pm} = v_k\big|_{x_3 = \pm h}, \qquad k = 1,2,3.$$

Принимая во внимание выражения (8), (10), (15), (17), (18), (24), (25) и тот факт, что в рассмотренном невозмущенном состоянии векторы $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{d}_k$ ($k = 1,2,3$) совпадают, компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}^{\bullet}$ в базисе декартовых координат примут вид $(m = 1,2,3;\ k \neq m)$:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{n=1}^{3}\left(\chi_k\delta_{kn} + 2\lambda_k\lambda_n\chi_{kn}\right)\frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_k\lambda_m B_{km}\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \left(\chi_k + \lambda_m^2 B_{km}\right)\frac{\partial v_m}{\partial x_k}, \quad (27)$$

$$B_{km} = B_{mk} = \frac{\chi_k - \chi_m}{\lambda_k^2 - \lambda_m^2}.$$

Аналогично, согласно соотношениям (8)–(10), (21), (22), (24), (26), компоненты линеаризованных тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}^{\bullet}_{+}$ и $\mathbf{D}^{\bullet}_{-}$ записываются следующим образом $(\alpha, \beta = 1,2;\ \alpha \neq \beta)$:

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{D}^{\bullet}_{\pm} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \sum_{\tau=1}^{2} \left[\left(\kappa_1^{\pm} + 6\lambda_\alpha^2 \kappa_2^{\pm} \right) \delta_{\alpha\tau} + 2\lambda_\alpha \lambda_\tau \xi_{\alpha\tau}^{\pm} \right] \frac{\partial v_\tau^{\pm}}{\partial x_\tau},$$

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{D}^{\bullet}_{\pm} \cdot \mathbf{e}_\beta = 2\lambda_\alpha \lambda_\beta \kappa_2^{\pm} \frac{\partial v_\alpha^{\pm}}{\partial x_\beta} + \left(\kappa_1^{\pm} + 2\left(\lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 \right) \kappa_2^{\pm} \right) \frac{\partial v_\beta^{\pm}}{\partial x_\alpha},$$

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{D}^{\bullet}_{\pm} \cdot \mathbf{e}_3 = \left(\kappa_1^{\pm} + 2\lambda_\alpha^2 \kappa_2^{\pm} \right) \frac{\partial v_3^{\pm}}{\partial x_\alpha},$$

$$\xi_{\alpha\tau}^{\pm} = \kappa_{11}^{\pm} + 2\left(\lambda_\alpha^2 + \lambda_\tau^2 \right) \kappa_{12}^{\pm} + 4\lambda_\alpha^2 \lambda_\tau^2 \kappa_{22}^{\pm}. \quad (28)$$

Выражения (14), описывающие возмущенное состояние равновесия прямоугольной плиты, представляют собой систему трех уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций v_1, v_2, v_3. Подстановка [11]

$$v_1 = V_1(x_3) \sin \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2,$$
$$v_2 = V_2(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \sin \gamma_2 x_2,$$
$$v_3 = V_3(x_3) \cos \gamma_1 x_1 \cos \gamma_2 x_2,$$

$$\gamma_1 = \pi m_1 / b_1, \quad \gamma_2 = \pi m_2 / b_2, \quad m_1, m_2 = 0,1,2,... \quad (29)$$

приводит к отделению переменных x_1, x_2 в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линеаризованным краевым условиям (23).

Учитывая соотношения (27), (29), выпишем уравнения нейтрального равновесия (14) в случае плиты, упругие свойства которой изменяются по толщине:

$$\left(\chi_3 + \lambda_1^2 B_{13} \right) V_1'' + \left(\chi_3' + \lambda_1^2 B_{13}' \right) V_1' -$$
$$- \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + 2\lambda_1^2 \chi_{11} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + \lambda_1^2 B_{12} \right] \right) V_1 -$$
$$- \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(B_{12} + 2\chi_{12} \right) V_2 - \lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 \left(B_{13} + 2\chi_{13} \right) V_3' -$$
$$- \lambda_1 \gamma_1 \left(\lambda_3' B_{13} + \lambda_3 B_{13}' \right) V_3 = 0,$$

$$\left(\chi_3 + \lambda_2^2 B_{23} \right) V_2'' + \left(\chi_3' + \lambda_2^2 B_{23}' \right) V_2' -$$
$$- \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + \lambda_2^2 B_{12} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + 2\lambda_2^2 \chi_{22} \right] \right) V_2 -$$
$$- \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(B_{12} + 2\chi_{12} \right) V_1 - \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \left(B_{23} + 2\chi_{23} \right) V_3' -$$
$$- \lambda_2 \gamma_2 \left(\lambda_3' B_{23} + \lambda_3 B_{23}' \right) V_3 = 0,$$

$$\left(\chi_3 + 2\lambda_3^2 \chi_{33} \right) V_3'' + \left(\chi_3' + 4\lambda_3 \lambda_3' \chi_{33} + 2\lambda_3^2 \chi_{33}' \right) V_3' -$$
$$- \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + \lambda_3^2 B_{13} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + \lambda_3^2 B_{23} \right] \right) V_3 +$$
$$+ \lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 \left(B_{13} + 2\chi_{13} \right) V_1' + 2\lambda_1 \gamma_1 \left(\lambda_3' \chi_{13} + \lambda_3 \chi_{13}' \right) V_1 +$$
$$+ \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \left(B_{23} + 2\chi_{23} \right) V_2' + 2\lambda_2 \gamma_2 \left(\lambda_3' \chi_{23} + \lambda_3 \chi_{23}' \right) V_2 = 0. \quad (30)$$

Аналогичные уравнения для однородной упругой плиты имеют более простой вид:

$$\left(\chi_3 + \lambda_1^2 B_{13} \right) V_1'' - \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + 2\lambda_1^2 \chi_{11} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + \lambda_1^2 B_{12} \right] \right) V_1 -$$
$$- \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(B_{12} + 2\chi_{12} \right) V_2 - \lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 \left(B_{13} + 2\chi_{13} \right) V_3' = 0,$$

$$\left(\chi_3 + \lambda_2^2 B_{23} \right) V_2'' - \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + \lambda_2^2 B_{12} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + 2\lambda_2^2 \chi_{22} \right] \right) V_2 -$$
$$- \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(B_{12} + 2\chi_{12} \right) V_1 - \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \left(B_{23} + 2\chi_{23} \right) V_3' = 0,$$

$$\left(\chi_3 + 2\lambda_3^2 \chi_{33} \right) V_3'' - \left(\gamma_1^2 \left[\chi_1 + \lambda_3^2 B_{13} \right] + \gamma_2^2 \left[\chi_2 + \lambda_3^2 B_{23} \right] \right) V_3 +$$
$$+ \lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 \left(B_{13} + 2\chi_{13} \right) V_1' + \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \left(B_{23} + 2\chi_{23} \right) V_2' = 0. \quad (31)$$

Согласно выражениям (20), (27)–(29), линеаризованные условия равновесия на лицевых поверхностях плиты записываются следующим образом ($x_3 = \pm h$):

$$\left(\chi_3 + \lambda_1^2 B_{13} \right) V_1' + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(\kappa_2^{\pm} + \xi_{12}^{\pm} \right) V_2 - \lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 B_{13} V_3 +$$
$$+ \left(\gamma_1^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 6\lambda_1^2 \kappa_2^{\pm} + 2\lambda_1^2 \xi_{11}^{\pm} \right] + \gamma_2^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right) \kappa_2^{\pm} \right] \right) V_1 = 0,$$

$$\left(\chi_3 + \lambda_2^2 B_{23} \right) V_2' + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_2 \left(\kappa_2^{\pm} + \xi_{12}^{\pm} \right) V_1 - \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 B_{23} V_3 +$$
$$+ \left(\gamma_1^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \right) \kappa_2^{\pm} \right] + \gamma_2^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 6\lambda_2^2 \kappa_2^{\pm} + 2\lambda_2^2 \xi_{22}^{\pm} \right] \right) V_2 = 0,$$

$$\left(\chi_3 + 2\lambda_3^2 \chi_{33} \right) V_3' + 2\lambda_1 \lambda_3 \gamma_1 \chi_{13} V_1 + 2\lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \chi_{23} V_2 +$$
$$+ \left(\gamma_1^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 2\lambda_1^2 \kappa_2^{\pm} \right] + \gamma_2^2 \left[\kappa_1^{\pm} + 2\lambda_2^2 \kappa_2^{\pm} \right] \right) V_3 = 0. \quad (32)$$

Таким образом, исследование устойчивости прямоугольной плиты с поверхностными напряжениями сводится к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае плиты с изменяющимися по толщине упругими свойствами это задача (30), (32), а для однородной в объеме упругой плиты – задача (31), (32).

Легко показать, что если упругие свойства плиты симметричны относительно серединной поверхности $x_3 = 0$, т.е. $\chi_k(x_3) = \chi_k(-x_3)$, $\chi_{kn}(x_3) = \chi_{kn}(-x_3)$, k, $n = 1,2,3$ и $\kappa_{\alpha\beta}^{+} = \kappa_{\alpha\beta}^{-}$, α, $\beta = 1,2$, то сформулированные выше краевые задачи имеют два независимых класса решений [11]. **Первый класс** образован решениями, для которых прогиб плиты является нечетной функцией координаты x_3:

$$V_1(x_3) = V_1(-x_3)$$
$$V_2(x_3) = V_2(-x_3)$$
$$V_3(x_3) = -V_3(-x_3).$$

Для решений **второго класса**, наоборот, прогиб – четная функциия x_3:

$$V_1(x_3) = -V_1(-x_3)$$
$$V_2(x_3) = -V_2(-x_3)$$
$$V_3(x_3) = V_3(-x_3).$$

Благодаря этому свойству линеаризованных краевых задач (30), (32) и (31), (32) при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь половину плиты, например верхнюю ($0 \le x_3 \le h$). Из четности и нечетности неизвестных функций V_1, V_2, V_3 следуют граничные условия при $x_3 = 0$:

а) для **первого класса** решений:

$$V_1'(0) = V_2'(0) = V_3(0) = 0; \qquad (33)$$

б) для **второго класса** решений:

$$V_1(0) = V_2(0) = V_3'(0) = 0. \qquad (34)$$

Таким образом, в случае симметричной прямоугольной плиты с поверхностными напряжениями исследование устойчивости сводится к решению двух линейных однородных краевых задач для половины плиты: (30), (32), (33) и (30), (32), (34) для неоднородной по толщине плиты – или (31)–(33) и (31), (32), (34) для однородной упругой плиты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода рассмотрена проблема устойчивости нелинейно упругой прямоугольной плиты с поверхностными напряжениями. Полагалось, что упругие свойства плиты в объеме постоянны или изменяются по толщине. Для произвольного изотропного материала получены системы линеаризованных уравнений равновесия, описывающие поведение однородных и неоднородных по толщине плит в возмущенном состоянии. С использованием специальной подстановки исследование устойчивости в общем случае сведено к решению одной из двух линейных однородных краевых задач для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом установлено, что если упругие свойства плиты симметричны относительно серединной поверхности, то для анализа устойчивости достаточно решить две упрощенные краевые задачи для половины плиты.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-08-00802-а) и в рамках реализации Государственного задания на 2016 г. № 007-01114-16 ПР, номер проекта 0256-2014-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145.
2. Altenbach H., Morozov N.F. (Eds.). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p.
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics*. San Diego, Elsevier. Vol. 42: 1–68.
4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24: 52–82.
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147.
6. Cuenot S., Frétigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410, 1–5.
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nanostructured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363.
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 57(4): 291–323.
9. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
10. Еремеев В.А., Зубов Л.М. 2008. *Механика упругих оболочек*. М., Наука: 280 с.
11. Шейдаков Д.Н. 2007. Устойчивость прямоугольной плиты при двухосном растяжении. *Прикладная механика и техническая физика*. 48(4): 94–103.

REFERENCES

1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145.
2. Altenbach H., Morozov N.F. (Eds.). 2013. Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications. Berlin, Springer: 194 p.
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics*. San Diego, Elsevier. Vol. 42: 1–68.

4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24: 52–82.
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147.
6. Cuenot S., Frétigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410, 1–5.
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nanostructured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363.
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 57(4): 291–323.
9. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
10. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2008. *Mekhanika uprugikh obolochek*. [*Mechanics of elastic shells*]. Moscow, Nauka: 280 p. (In Russian).
11. Sheidakov D.N. 2007. Stability of a rectangular plate under biaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(4): 547–555.

Поступила 20.07.2016