НАУКА ЮГА РОССИИ (ВЕСТНИК ЮЖНОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА) 2016 Т. 12 №1 С. 4–10
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2016 Vol. 12 Issue 1 P. 4–10

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕМНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ

© 2016 г. Академик В.И. Колесников[1], В.В. Бардушкин[2], А.П. Сычев[3], Д.А. Кириллов[2]

Аннотация. В работе решается задача определения и численного моделирования объемной плотности энергии деформации в композитных материалах, имеющих неодинаковую плотность размещения сферических включений в различных направлениях. В качестве дисперсного наполнителя пространственно неоднородных композитов рассматривается графит. В качестве матрицы – эпоксидное связующее УП-610. Изложены основные теоретические аспекты используемого подхода к прогнозированию указанной локальной упругой характеристики, связанного с преобразованием сжатия-расширения пространства материала. При построении математической модели используется понятие оператора концентрации напряжений (тензора четвертого ранга), связывающего средние (внешние) по неоднородному материалу напряжения с их локальными значениями в пределах отдельного элемента неоднородности. Моделирование опирается на обобщенное сингулярное приближение теории случайных полей, используемое при решении стохастического дифференциального уравнения равновесия упругой среды. Указанное приближение позволяет получить явное выражение для оператора концентрации напряжений в композитном материале, с помощью которого возможен анализ распределения значений объемной плотности энергии деформации в зависимости от состава, структуры и процентного содержания элементов неоднородности, а также вида и величины прикладываемой нагрузки. Вводится параметр, позволяющий производить оценку неравномерности распределения наполнителя в полимерном связующем. Исследованы зависимости значений рассматриваемой энергетической характеристики от изменения данного параметра и вида внешнего механического воздействия.

Ключевые слова: моделирование, объемная плотность энергии деформации, матричные композиты, включения, оператор концентрации напряжений.

SIMULATION OF STRAIN ENERGY DENSITY IN THE SPATIALLY NON-UNIFORM MATERIALS

Academician RAS V.I. Kolesnikov[1], V.V. Bardushkin[2], A.P. Sychev[3], D.A. Kirillov[2]

Abstract. The problem of determining and numerical simulating of the strain energy density in composites having unequal density of the spherical inclusions in different directions is solved. Graphite is considered as disperse fillers of spatially non-uniform composites. The epoxy binder UP-610 is considered as a matrix. The basic theoretical aspects of the applied approach to predicting the indicated local elastic characteristics associated with the conversion of the compression-expansion of space of the material are presented. When constructing a mathematical model the concept of operator of stresses concentration (the fourth-rank tensor), which connects the average (external) stresses of heterogeneous materials with their local values within a single cell heterogeneity, is used. Simulation is based on generalized singular approximation of random field's theory used for solving stochastic differential equations of equilibrium of an elastic medium. The application allows

[1]Ростовский государственный университет путей сообщения (Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.

[2]Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (National Research University of Electronic Technology, Moscow, Zelenograd, Russian Federation), Российская Федерация, 124498, г. Москва, Зеленоград, пл. Шокина, д. 1, e-mail: bardushkin@mail.ru.

[3]Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sap@rgups.ru.

obtaining an explicit expression for the stress concentration in the composites by means of which it is possible to analyze the distribution of the strain energy density depending on the composition, structure, and the percentage of the elements of heterogeneity, as well as the type and magnitude of the applied load. The parameter, allowing evaluating the non-uniformity of the filler distribution in polymeric binder, is introduced. The dependencies of strain energy density values on changes of this parameter and types of external mechanical stresses are studied.

Keywords: simulation, strain energy density, matrix composites, inclusions, operator of stresses concentration.

ВВЕДЕНИЕ

Проявления пространственной неоднородности композитов могут быть обусловлены различными причинами. Это могут быть специальные требования к разрабатываемым изделиям, заставляющие исследователей искать оригинальные технологические решения для достижения неравномерности распределения включений в различных направлениях пространства материалов. Пространственная неоднородность создаваемых композитов может быть вызвана также объективными трудностями проектирования и создания технологического оборудования [1–3].

В триботехнике ситуация с неравномерным распределением наполнителей в полимерных связующих возникает, например, при создании слоистых антифрикционных композитных структур [1; 2]. Примерами пространственно неоднородных сред в электронной технике могут служить структуры на пористом кремнии и углероде, у которых сформированные поры заполняются рабочим материалом, т.е. получается классический композит матрица – включение. В плоскости, параллельной подложке, их структура подчиняется условию пространственной однородности, однако в вертикальном направлении (от подложки к поверхности) сформированные полости имеют определенную пространственную неоднородность [3].

Неравномерное распределение включений в пространстве композитов приводит к анизотропии их физико-механических свойств (упругих, оптических, сегнетоэлектрических и др.). Это необходимо учитывать при создании изделий, использующих подобные материалы. Поэтому методы оценки равномерности распределения включений и анализа влияния этого фактора на физико-механические (в частности упругие) свойства матричных композитов актуальны. При анализе напряженно-деформированного состояния подобных композитов встает проблема прогнозирования не только их эффективных (эксплуатационных) [4], но и локальных (внутренних) упругих свойств [2; 5–8]. Теоретическое моделирование локальных упругих характеристик позволяет уже на стадии проектирования материалов делать прогнозы о поведении элементов неоднородности при нагрузках (особенно экстремальных), давать рекомендации по подбору состава компонентов, их концентрации и т.п. [2; 5–8].

В работе решается задача определения и численного моделирования одной из важнейших локальных упругих характеристик – объемной плотности энергии деформации – в дисперсно-наполненных композитных материалах, имеющих неодинаковую плотность размещения сферических включений в различных направлениях. Прогнозирование значений указанной энергетической характеристики в отдельном элементе неоднородности в зависимости от состава, структуры, геометрической формы и концентрации компонентов, а также вида и величины механического (или температурного) воздействия позволяет учитывать ее перераспределение в неоднородной среде. Это может быть важным при решении многих задач в таких областях знания, как трибоматериаловедение, микро- и наноэлектроника, геофизика и др. К этим задачам можно отнести, например, решение проблемы текстурообразования в поликристаллических средах [9; 10] или прогнозирование температуры плавления металлических нитевидных нанокристаллов, заключенных в тугоплавкую матрицу пористого анодного оксида алюминия [11].

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Структура реальных пространственно неоднородных материалов представляет собой стохастическую (случайно неоднородную) сплошную среду. Центральным моментом при использовании статистических методов прогнозирования их локальных физико-механических характеристик является возможность выделения представительного объема, т.е. некоторой области бесконечно большого материала, свойства которой аналогичны свойствам материала в целом, а также свойствам подобной области, расположенной пространственно в другом месте. Удовлетворение этого условия приводит к выполнению условия эргодичности, т.е. дает возможность проводить усреднение по объему материала, а не по ансамблю реализаций [8; 12; 13]. Для пространственно однородных материалов это условие выполняется. Это же условие может выполняться и для пространственно неоднородных материалов [4].

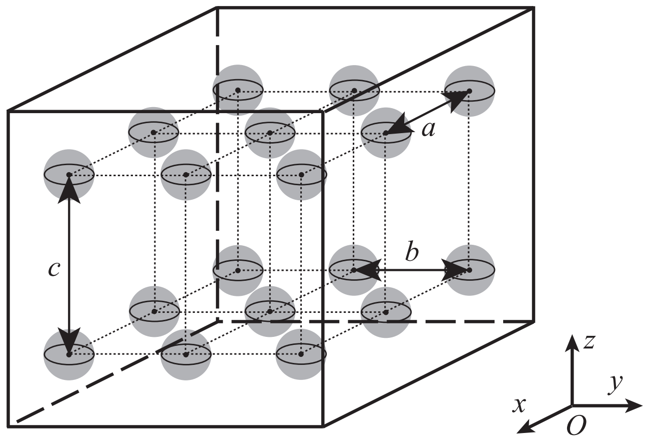

Рис. 1. Структура матричного композита, армированного сферическими включениями в направлениях осей x, y и z
Fig. 1. Structure of the matrix composite reinforced with spherical inclusions in the directions of the axes x, y and z

Для построения модели рассмотрим матричный композит, состоящий из двух изотропных компонентов – включений сферической формы приблизительно одинакового радиуса R и окружающей их сплошной матрицы. При этом структура неоднородного материала такова, что плотность «укладки» элементов неоднородности в различных направлениях неодинакова. Примем, что любой представительный объем (рис. 1) композитного материала имеет такое расположение включений, что в направлении x прямоугольной системы координат среднее расстояние между центрами соседних сфер равно a, в направлении y равно b, а в направлении z равно c. Отметим, что вдоль направления любой из осей системы координат этот материал является пространственно однородным, однако в целом однородность отсутствует.

Приведем исходную структуру материала к виду, позволяющему проводить прогнозирование его упругих характеристик. С этой целью совершим аффинное преобразование сжатия-растяжения пространства композита:

$$x'=\frac{c}{a}\,x,\quad y'=\frac{c}{b}\,y,\quad z'=z. \tag{1}$$

В результате этого преобразования сферические включения радиуса R примут форму эллипсоидов с полуосями cR/a, cR/b, R, причем средние расстояния между центрами соседних эллипсоидов вдоль каждой из координатных осей будут одинаковыми, равными c. Таким образом, весь материал станет пространственно однородным. При этом:

– объем каждого сферического включения изменяется в $c^2/(ab)$ раз (следовательно, и объем всех элементов неоднородности изменяется во столько же раз), однако объем всего композитного материала также изменяется в $c^2/(ab)$ раз, а значит, концентрация включений остается неизменной;

– компоненты матричного композита остаются изотропными (если коэффициенты c/a и c/b в преобразовании сжатия-растяжения (1) принимают значения, при которых сохраняется способность материала к обратимой деформации);

– в силу пространственной однородности «нового» материала в качестве элементарного объема можно рассматривать одно эллипсоидальное включение с различными полуосями cR/a, cR/b, R, окруженное сплошной матрицей.

В работе [4] обоснована корректность подхода, связанного с аффинным преобразованием сжатия-растяжения пространства композита, к прогнозированию эффективных (эксплуатационных) упругих свойств пространственно неоднородных материалов в рамках обобщенного сингулярного приближения. Опираясь на [4], можно утверждать корректность этого же подхода к прогнозированию локальных упругих характеристик указанных композитов.

Объемная плотность энергии деформации определяется следующим образом:

$$E(\mathbf{r})=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\sigma_{ij}(\mathbf{r}). \tag{2}$$

В формуле (2) $\mathbf{r}$ – радиус-вектор случайной точки среды; $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ – компоненты соответственно тензоров деформаций ε и напряжений σ, произведение которых понимается как свертка по соответствующим индексам.

Воспользовавшись обобщенным законом Гука

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})=s_{ijkl}(\mathbf{r})\sigma_{kl}(\mathbf{r}),$$

где $s_{ijkl}(\mathbf{r})$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$ – компоненты тензора податливости $s(\mathbf{r})$, соотношение (2) можно записать в виде

$$E(\mathbf{r})=\frac{1}{2}s_{ijkl}(\mathbf{r})\sigma_{kl}(\mathrm{r})\sigma_{ij}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Для анализа распределения значений объемной плотности энергии $E(\mathbf{r})$ необходимо установление связи между напряжениями $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ в каждом элементе неоднородности и внешним (средним) напряжением $\langle\sigma_{kl}(\mathbf{r})\rangle$, приложенным ко всему композиту (угловые скобки здесь и далее определяют процедуру статистического усреднения, которая при выполнении гипотезы эргодичности совпадает с усреднением по объему [2; 8; 12; 13]). Подобную связь можно установить с помощью безразмерного оператора концентрации напряжений $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ (тензора четвертого ранга) [2; 5–8]

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = K^{\sigma}_{ijkl}(\mathbf{r})\left\langle \sigma_{kl}(\mathbf{r})\right\rangle . \qquad (4)$$

Тогда, учитывая (4), выражение (3) можно переписать как

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} s_{ijkl}(\mathbf{r}) K^{\sigma}_{klmn}(\mathbf{r})\left\langle \sigma_{mn}(\mathbf{r})\right\rangle K^{\sigma}_{ijpq}(\mathbf{r})\left\langle \sigma_{pq}(\mathbf{r})\right\rangle . \qquad (5)$$

Для проведения корректного анализа локальной концентрации напряжений $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ в композите, позволяющего учитывать взаимодействие элементов неоднородности, состав, структуру материала, форму и концентрацию включений, необходимо решать уравнения равновесия упругой неоднородной среды. Однако в общем случае получить соотношение для численных расчетов оператора концентрации напряжений $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ не удается. Поэтому для его вычисления используются различные приближения. Одним из таких приближений, учитывающих перечисленные выше факторы, является обобщенное сингулярное приближение теории случайных полей [12]. В его рамках используется только сингулярная составляющая тензора Грина уравнений равновесия, зависящая лишь от дельта-функции Дирака, а также вводится однородное тело сравнения, материальные константы которого входят в окончательное выражение для вычисления $K^{\sigma}(\mathbf{r})$. Физический смысл обобщенного сингулярного приближения заключается в предположении однородности полей напряжений и деформаций в пределах элемента неоднородности. В этом случае выражение для $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ имеет следующий вид (индексы опущены) [2; 7]:

$$K^{\sigma}(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})\left(I - g(\mathbf{r})c''(\mathbf{r})\right)^{-1}\left\langle c(\mathbf{r})\left(I - g(\mathbf{r})c''(\mathbf{r})\right)^{-1}\right\rangle^{-1}, \qquad (6)$$

где I – единичный тензор четвертого ранга; $c(\mathbf{r})$ – тензор модулей упругости; двумя штрихами обозначена разность между соответствующими параметрами неоднородной среды и однородного тела сравнения, характеристики которого обозначаются далее верхним индексом «с»: $c''(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) - c^{c}$; $g(\mathbf{r})$ – интеграл от сингулярной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия, являющийся тензором четвертого ранга. Для вычисления компонент g_{ijkl} тензора $g(\mathbf{r})$ необходимо вначале осуществить расчеты компонент a_{iklj} тензора четвертого ранга A, а затем в a_{iklj} по двум парам индексов (i, j) и (k, l) провести операцию симметризации [12]. Компоненты a_{iklj} тензора A вычисляются с помощью соотношения

$$a_{iklj} = -\frac{1}{4\pi}\int n_k n_j t^{-1}_{il}\, d\Omega , \qquad (7)$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ – элемент телесного угла в сферической системе координат, t_{il}^{-1} – элементы матрицы, обратной матрице T с элементами $t_{il} = c^{c}_{iklj} n_k n_j$, а n_k и n_j $(k, j = 1, 2, 3)$ – компоненты вектора внешней нормали к поверхности включения. Для эллипсоидальных включений с главными полуосями l_1, l_2 и l_3 компоненты вектора нормали определяются соотношениями

$$n_1 = \frac{1}{l_1}\sin\theta\cos\varphi ,\; n_2 = \frac{1}{l_2}\sin\theta\sin\varphi ,\; n_3 = \frac{1}{l_3}\cos\theta .$$

Анализ соотношения (6) показывает, что при оценке локального напряженно-деформированного состояния неоднородной среды при помощи оператора концентрации напряжений исключается информация о виде внешнего механического воздействия, поскольку $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ зависит только от материальных параметров среды и структуры материала.

Для двухкомпонентного композита с изотропными включениями и матрицей операция усреднения по всему объему материала для некоторой случайной величины $a(\mathbf{r})$ сводится к суммированию (здесь и далее индекс «в» будет относиться к включениям, а «м» – к матрице) [2; 8; 12; 13]:

$$\left\langle a(\mathbf{r})\right\rangle = v_{\text{в}} a_{\text{в}} + v_{\text{м}} a_{\text{м}} , \qquad (8)$$

где $v_{\text{в}}$ и $v_{\text{м}}$ – объемные содержания включений и матрицы $(v_{\text{в}} + v_{\text{м}} = 1)$; $a_{\text{в}}$ и $a_{\text{м}}$ – соответствующая указанному компоненту случайная величина. Тогда, учитывая (8), соотношение (6) для $K^{\sigma}(\mathbf{r})$ во включении примет вид

$$K^{\sigma}_{\text{в}} = c_{\text{в}}\left(I - g_{\text{в}}(c_{\text{в}} - c^{c})\right)^{-1}\left(v_{\text{в}} c_{\text{в}}\left(I - g_{\text{в}}(c_{\text{в}} - c^{c})\right)^{-1} + v_{\text{м}} c_{\text{м}}\left(I - g_{\text{м}}(c_{\text{м}} - c^{c})\right)^{-1}\right)^{-1}, \qquad (9)$$

а в матрице –

$$K^{\sigma}_{\text{м}} = c_{\text{м}}\left(I - g_{\text{м}}(c_{\text{м}} - c^{c})\right)^{-1}\left(v_{\text{в}} c_{\text{в}}\left(I - g_{\text{в}}(c_{\text{в}} - c^{c})\right)^{-1} + v_{\text{м}} c_{\text{м}}\left(I - g_{\text{м}}(c_{\text{м}} - c^{c})\right)^{-1}\right)^{-1}. \qquad (10)$$

В формулах (9) и (10) $g_{\text{в}}$ – тензор $g(\mathbf{r})$ во включении с компонентами, вычисляемыми с помощью соотношения (7) при $l_1 = \frac{cR}{a}$, $l_2 = \frac{cR}{b}$, $l_3 = R$; $g_{\text{м}}$ – тензор $g(\mathbf{r})$ в матрице с компонентами, также вычисляемыми с помощью (7) при $l_1 = l_2 = l_3 = R$; $c_{\text{в}}$ и $c_{\text{м}}$ – тензоры модулей упругости включений и матрицы соответственно.

Выбор того или иного значения модулей упругости тела сравнения приводит к известным методам Фойгта, Ройсса, Хашина – Штрикмана и т.д.

В настоящей работе упругие характеристики однородного тела сравнения вычисляли в приближении самосогласования [12; 13]. С этой целью была организована итерационная процедура, в которой в качестве параметров c^{c} тела сравнения принимали значения тензора модулей упругости, полученные на предыдущем шаге итерации. В качестве начальных значений параметров тела сравнения принимали упругие характеристики, полученные в приближении Хилла, т.е. среднего арифметического значений, полученных в приближениях

Ройсса $c_{\text{Reuss}} = \left(\nu_{\text{в}} c_{\text{в}}^{-1} + \nu_{\text{м}} c_{\text{м}}^{-1}\right)^{-1}$

и Фойгта $c_{\text{Voight}} = \nu_{\text{в}} c_{\text{в}} + \nu_{\text{м}} c_{\text{м}}$ [12].

Выход из итерационной процедуры осуществлялся, когда максимальная разница между модулями c^{c} составляла менее 0,01.

ПРОВЕДЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

Для проведения модельных расчетов в работе были рассмотрены композиты с изотропными компонентами на основе связующего УП-610 (модуль Юнга 5,2 ГПа, коэффициент Пуассона 0,41) с включениями графита (модуль Юнга 10,9 ГПа, коэффициент Пуассона 0,235) [14; 15].

При операциях над тензорами использовалась их матричная форма записи. При этом ненулевые элементы c_{ij} $(i, j = 1, 2 ..., 6)$ симметрической матрицы тензора c модулей упругости для изотропного материала выражались через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν следующим образом [12]:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Кроме того, в (5) для получения элементов s_{ij} $(i, j = 1, 2 ..., 6)$ матрицы s тензора податливости использовано соотношение $s = c^{-1}$ [12].

Для проведения моделирования, позволяющего учитывать неравномерность распределения включений в матрице, был введен параметр cR/a. Исследовалось влияние изменения этого параметра на объемную плотность энергии деформации $E(\mathbf{r})$ рассматриваемых пространственно неоднородных материалов.

При вычислении компонент тензоров $g_{\text{В}}$ и $g_{\text{М}}$ в формулах (9) и (10) полагалось $R = 1$ и $a = b$, т.е. считалось, что в направлениях x и y плотность сферических включений в пространственно неоднородном материале приблизительно одинакова. Все модельные расчеты проводились при объемном содержании наполнителя $\nu_{\text{В}} = 0{,}05$, что по массе составляло приблизительно 9%.

По соотношению (5) были проведены модельные расчеты зависимости $E(\mathbf{r})$ от вида приложенного внешнего воздействия для рассматриваемых модельных композитов. При этом внешнее воздействие $\langle\sigma\rangle$ (МПа) описывалось матрицей

$$\langle\sigma\rangle = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}.$$

Были рассмотрены пять частных случаев напряжений $\langle\sigma\rangle$: одноосное вдоль оси x $(\sigma_{11} = 1, \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0)$; одноосное вдоль оси z $(\sigma_{33} = 1, \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0)$; двухосное в плоскости xy $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1, \sigma_{33} = 0)$; двухосное в плоскости xz $(\sigma_{11} = \sigma_{33} = 1, \sigma_{22} = 0)$; трехосное $(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1)$.

Плотность энергии $E(\mathbf{r})$ имеет различные значения в отдельном элементе неоднородности каждого типа. Поэтому на рисунке 2*а* представлены расчетные кривые, описывающие зависимости $E(\mathbf{r})$ от параметра cR/a во включениях, а на рисунке 2*б* – в матрице.

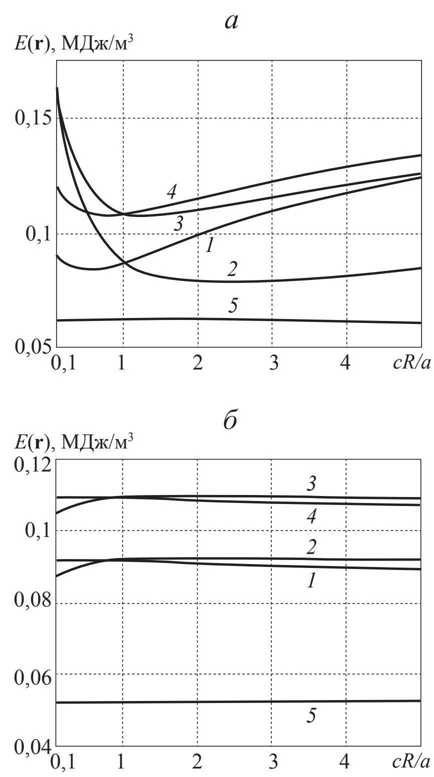

Рис. 2. Зависимости $E(\mathbf{r})$ в пространственно неоднородных материалах от параметра cR/a и вида внешнего воздействия $\langle\sigma\rangle$ (МПа):
1 – $\sigma_{11} = 1$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$;
2 – $\sigma_{33} = 1$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$;
3 – $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$, $\sigma_{33} = 0$;
4 – $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 1$, $\sigma_{22} = 0$;
5 – $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1$

Fig. 2. Dependencies $E(\mathbf{r})$ in spatially non-uniform materials on the parameter cR/a and on the type of external loadings $\langle\sigma\rangle$ (MPa)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных исследований и численных модельных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Зависимости значений объемной плотности энергии деформации $E(\mathbf{r})$ от вариации параметра (и во включениях, и в матрице) имеют нелинейный характер. При этом сильнее эта нелинейность проявляется при модельных расчетах $E(\mathbf{r})$ во включениях.

2. Точка $cR/a = 1$ соответствует пространственно однородному композитному материалу со сферическими включениями одинакового радиуса, поэтому на рисунках 2*а* и 2*б* кривые *1*, *2* (соответствующие одноосным внешним воздействиям) и *3*, *4* (соответствующие двухосным внешним воздействиям) попарно пересекаются. Это согласуется с априорными представлениями о том, как должно происходить перераспределение $E(\mathbf{r})$ в отдельных элементах неоднородности, и может служить косвенным подтверждением адекватности построенной модели.

3. В окрестности точки $cR/a = 1$ (наиболее важный для практики диапазон изменения параметра пространственной неоднородности) значения $E(\mathbf{r})$ во включениях и в матрице, соответствующие однотипному напряжению $\langle\sigma\rangle$, отличаются друг от друга несущественно. Это указывает на хорошую совместимость элементов неоднородности и на удовлетворительное перераспределение связующим напряжений и деформаций в исследуемых пространственно неоднородных материалах, что особенно важно для эксплуатационных характеристик изделий, использующих подобные композиты в тяжело нагруженных узлах машин и механизмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-08-00654-а, № 16-08-00262-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машков Ю.К., Овчар З.Н., Байбарацкая М.Ю., Мамаев О.А. 2004. *Полимерные композиционные материалы в триботехнике.* М., Недра: 261 с.
2. Колесников В.И., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б., Сычев А.П., Колесников И.В. 2012. *Микромеханика поликристаллов и композитов* (*напряженно-деформированное состояние и разрушение*). Ростов н/Д, изд-во РГУПС: 288 с.
3. Чаплыгин Ю.А. (ред.). 2013. *Нанотехнологии в электронике. Выпуск 2.* М., Техносфера: 688 с.
4. Бардушкин В.В. 2005. Эффективные упругие характеристики пространственно неоднородных материалов. *Известия вузов. Электроника*. (2): 19–24.
5. Победря Б.Е., Горбачев В.И. 1984. Концентрация напряжений и деформаций в композитах. *Механика композитных материалов.* (2): 207–214.
6. Маслов Б.П. 1987. Концентрация напряжений в изотропной матрице, армированной анизотропными включениями. *Прикладная механика.* 23(10): 73–79.
7. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Сычев А.П. 2015. О прогнозировании распределений локальных упругих полей в неоднородных средах на основе обобщенного сингулярного приближения. *Вестник Южного научного центра*. 11(3): 11–17.
8. Buryachenko V.A. 2007. *Micromechanics of heterogeneous materials.* Berlin, Springer-Verlag: 686 p.
9. Колесников В.И., Бардушкин В.В., Булах И.И., Сычев А.П., Яковлев В.Б. 2006. О методе моделирования текстурообразования в поликристаллах при различных внешних напряжениях. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* (2): 33–36.
10. Колесников В.И., Чекасина И.И., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б. 2008. Энергетический подход при моделировании формирования текстуры в поликристаллах под влиянием внешних напряжений. *Вестник Южного научного центра.* 4(3): 3–8.
11. Шиляева Ю.И., Бардушкин В.В., Гаврилов С.А., Силибин М.В., Яковлев В.Б., Боргардт Н.И., Волков Р.Л., Смирнов Д.И. 2014. О прогнозировании температуры плавления металлических нитевидных нанокристаллов, электрохимически осажденных в поры анодного оксида алюминия. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* (3): 84–94.
12. Шермергор Т.Д. 1977. *Теория упругости микронеоднородных сред.* М., Наука: 399 с.
13. Паньков А.А. 2008. *Методы самосогласования механики композитов.* Пермь, изд-во Пермского государственного технического университета: 253 с.
14. Лапицкий В.А., Крицук А.А. 1986. *Физико-механические свойства эпоксидных полимеров и стеклопластиков.* Киев, Наукова думка: 92 с.
15. *Физические величины: справочник.* 1991. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М., Энергоатомиздат: 1232 с.

REFERENCES

1. Mashkov Yu.K., Ovchar Z.N., Baybaratskaya M.Yu., Mamaev O.A. 2004. *Polimernye kompozitsionnye materialy v tribotekhnike.* [*Polymer composite materials in tribotechnics*]. Moscow, Nedra Publishers: 261 p. (In Russian).
2. Kolesnikov V.I., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B., Sychev A.P., Kolesnikov I.V. 2012. *Mikromekhanika polikristallov i kompozitov* (*napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i razrushenie*). [*Micromechanics of polycrystals and composites* (*stress-

strain state and destruction)]. Rostov-on-Don, Rostov State Transport University Publishers: 288 p. (In Russian).
3. Chaplygin Yu.A. (Ed.). 2013. *Nanotekhnologii v elektronike. Vypusk 2.* [*Nanotechnology in electronics. Issue 2*]. Moscow, Tekhnosfera Publishers: 688 p. (In Russian).
4. Bardushkin V.V. 2005. [Effective elastic characteristics of spatially non-uniform materials]. *Izvestiya vuzov. Elektronika.* (2): 19–24. (In Russian).
5. Pobedrya B.E., Gorbachev V.I. 1984. [Concentration of stresses and deformations in the composites]. *Mekhanika kompozitnykh materialov.* (2): 207–214. (In Russian).
6. Maslov B.P. 1987. [Concentration of stresses in an isotropic matrix reinforced with anisotropic inclusions]. *Prikladnaya mekhanika.* 23(10): 73–79. (In Russian).
7. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Sychev A.P. 2015. [On the prediction of local elastic fields' distributions in non-uniform media on the basis of a generalized singular approximation]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra.* 11(3): 11–17. (In Russian).
8. Buryachenko V.A. 2007. *Micromechanics of heterogeneous materials.* Berlin, Springer-Verlag: 686 p.
9. Kolesnikov V.I., Bardushkin V.V., Bulakh I.I., Sychev A.P., Yakovlev V.B. 2006. [About a method of texture formation in polycrystals under external mechanical loadings]. *Ekologicheskiy Vestnik Nauchnykh Tsentrov Chernomorskogo Ekonomicheskogo Sotrudnichestva.* (2): 33–36. (In Russian).
10. Kolesnikov V.I., Chekasina I.I., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B. 2008. [Energetical approach for modelling of polycrystal texture formation under external mechanical loadings]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra.* 4(3): 3–8. (In Russian).
11. Shilyaeva Yu.I., Bardushkin V.V., Gavrilov S.A., Silibin M.V., Yakovlev V.B., Borgardt N.I., Volkov R.L., Smirnov D.I. 2014. [On the prediction of melting temperature of metal wire-like nano-crystals electrochemically deposited into the pores of anodic aluminum oxide]. *Ekologicheskiy Vestnik Nauchnykh Tsentrov Chernomorskogo Ekonomicheskogo Sotrudnichestva.* (3): 84–94. (In Russian).
12. Shermergor T.D. 1977. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred.* [*Micromechanics of inhomogeneous media*]. Moscow, Nauka Publishers: 399 p. (In Russian).
13. Pan'kov A.A. 2008. *Metody samosoglasovaniya mekhaniki kompozitov.* [*Methods of self-consistency mechanics of composites*]. Perm, Permian State Technical University Publishers: 253 p. (In Russian).
14. Lapitskiy V.A., Kritsuk A.A. 1986. *Fiziko-mekhanicheskie svoystva epoksidnykh polimerov i stekloplastikov.* [*Physical and mechanical properties of the epoxy polymers and fiberglasses*]. Kiev, Naukova dumka Publishers: 92 p. (In Russian).
15. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik.* [*Physical quantities: a handbook*]. 1991. I.S. Grigor'ev, E.Z. Meilikhov (Eds.). Moscow, Energoatomizdat: 1232 p. (In Russian).

Поступила 27.11.2015