НАУКА ЮГА РОССИИ 2017 Т. 13 № 4 С. 4–14
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2017 VOL. 13 No 4 P. 4–14

МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.23885/2500-0640-2017-3-4-4-14

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЗОНАНСОВ ПРИ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

© 2017 г. В.А. Лыжов[1, 2], Т.И. Белянкова[1, 2], В.В. Калинчук[1, 2]

Аннотация. Исследованы крутильные колебания упругого полого кругового бесконечного цилиндра, инициированные жестким бандажом, совершающим торсионные колебания. Стенка цилиндра представляет собой пакет вложенных друг в друга и сцепленных между собой круговых бесконечных однородных или неоднородных (функционально градиентных) цилиндров. Режим колебаний предполагается установившимся, происходящим по гармоническому закону. В качестве вспомогательной рассмотрена задача о возбуждении крутильных колебаний распределенной на поверхности цилиндра тангенциальной нагрузкой. Методами операционного исчисления эта задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, которые в общем случае представляют собой кусочно-однородные или произвольные функции. Заменой специального вида система обыкновенных дифференциальных уравнений преобразована в систему задач Коши, численное решение которой строится методом Рунге – Кутты с модификацией Мерсона. В интегральной форме построено решение вспомогательной задачи, проведен детальный анализ свойств символа ядра полученного интегрального представления. На основе анализа дисперсионного соотношения построено решение основной контактной задачи. Изучено влияние свойств материала стенки цилиндра на распределение контактных напряжений и на динамическую жесткость цилиндра, исследовано влияние характера, области локализации и интенсивности изменения свойств стенки полого цилиндра на его динамическую жесткость. Результаты представлены в виде графиков. Детальный анализ позволил установить диапазоны частот, в которых имеют место благоприятные условия для возникновения неограниченных резонансов. Выявлены закономерности формирования поверхностного волнового поля, показано, как за счет изменения структуры и свойств стенки цилиндра можно избежать появления областей частот, благоприятных для возникновения резонансов.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр, многослойное покрытие, функционально градиентное покрытие, торсионные колебания, динамическая жесткость.

ON THE POSSIBILITY OF RESONANCES OCCURRENCE FOR TORSIONAL OSCILLATIONS OF AN INHOMOGENEOUS CYLINDER

V.A. Lyzhov[1, 2], T.I. Belyankova[1, 2], V.V. Kalinchuk[1, 2]

Abstract. Torsional oscillations of an elastic hollow circular infinite cylinder are investigated. The vibrations are initiated by a rigid bandage that performs torsional oscillations. The wall of the cylinder is a package of nested, interconnected circular infinite homogeneous or heterogeneous (functionally graded) cylinders. The oscillation regime is assumed to be steady, proceeding according to the harmonic law. The problem of exciting torsional vibrations with a tangential load distributed on the cylinder surface is considered as an auxiliary problem. Using the methods of operational calculus, this problem is reduced to a system of ordinary differential equations with coefficients, which in general are piecewise homogeneous or arbitrary functions. By replacing a special form, the system of ordinary differential equations is transformed into a system of Cauchy problems, the numerical solution of which is constructed by the Runge-Kutta method with the Merson modification. In the integral form, a solution of the auxiliary problem is constructed, a detailed analysis of the properties of the kernel symbol of the obtained integral representation is carried out. Based on the analysis of the dispersion relation, the solution of the basic contact problem is constructed. The influence of the material properties of the wall of the cylinder on the distribution of contact stresses and on the dynamic stiffness of the cylinder was

[1] Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41

[2] Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1

studied, and the influence of the character, the localization region, and the intensity of changes in the properties of the hollow cylinder wall on its dynamic rigidity was studied. The results are presented in the form of graphs. A detailed analysis made it possible to identify the frequency ranges in which favorable conditions for the emergence of unlimited resonances exist. Regularities are revealed, it is shown how due to the change in the structure and properties of the cylinder wall, it is possible to avoid the regions favorable for the appearance of resonances.

Keywords: thick-walled cylinder, multilayer coating, functionally graded components of the coating, torsional oscillations, dynamic rigidity.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению особенностей динамики цилиндрических тел уделяется большое внимание. В работах [1–24] рассмотрены различные аспекты процессов возбуждения и распространения волн в цилиндрических телах. Нормальные волны в заполненных жидкостью цилиндрах исследованы в работах [3; 4; 11], изучено влияние наличия жидкости на структуру поверхностных волновых полей. В публикациях [5; 10] при исследовании особенностей распространения продольных волн в преднапряженных цилиндрах выявлена существенная роль начальной деформации в формировании волнового поля на их поверхности.

Влияние геометрических факторов на структуру поверхностных волновых полей в случае нормальных колебаний и наличия жидкости в полых композитных цилиндрах изучено в работах [6; 15; 17; 21; 22]. Случай торсионных колебаний рассмотрен в работах [1; 8; 9; 13; 14; 16; 18; 20]. В статье [1] построено и проанализировано дисперсионное уравнение составного цилиндра, особенности динамического процесса в сплошных цилиндрах исследованы в работах [13; 14; 16], влияние геометрических параметров стенки полых цилиндров на формирование поверхностного волнового поля выявлено в статьях [8; 9; 15; 20].

В публикации [7] рассмотрена динамическая контактная задача о крутильных колебаниях жесткого бандажа на поверхности полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. Изучено влияние свойств стенки цилиндра на распределение контактных напряжений под бандажом. В процессе исследования был применен предложенный в работе [25] и усовершенствованный в [26] метод численного восстановления функции Грина неоднородной среды. Этот же подход использован в настоящей работе при исследовании трехслойного цилиндра. Метод основан на привлечении аппарата операционного исчисления в сочетании с аналитическим (для однородных) или численным (для неоднородных составляющих покрытия) построением решения с последующим матричным подходом при удовлетворении граничных условий. Использованный метод построения функции Грина позволяет адекватно учитывать как различия в изменении физико-механических параметров составляющих, так и возможные различия в условиях на границе их раздела при исследовании особенностей распределения напряжений в зоне контакта бандажа с цилиндром [7; 9; 19; 21]. В то же время осталось неисследованным влияние градиентности материала на динамическую жесткость цилиндра при крутильных колебаниях. В настоящей работе на примере задачи о торсионных колебаниях бандажа на поверхности трехслойного полого цилиндра проведен детальный анализ влияния соотношения физико-механических параметров, характера, области локализации и интенсивности изменения свойств стенки неоднородного полого цилиндра на его динамическую жесткость. Особенностью контактного взаимодействия бандажа с цилиндром является возможность возникновения резонансов, аналогичных резонансам, возникающих при исследовании природных [27] и техногенных [28; 29] процессов. В отличие от полупространства [30–32] в средах типа слоя, полого или сплошного цилиндра мнимая составляющая динамической жесткости может обращаться в ноль, что в условиях положительности вещественной составляющей создает условия для возникновения резонансных явлений. При этом в случае взаимодействия с массивным штампом [27–29; 31; 32] могут возникать неограниченные резонансы.

ТОРСИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОГО БАНДАЖА НА ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается задача о гармонических установившихся торсионных колебаниях жесткого бандажа, жестко сцепленного с бесконечным неодно-

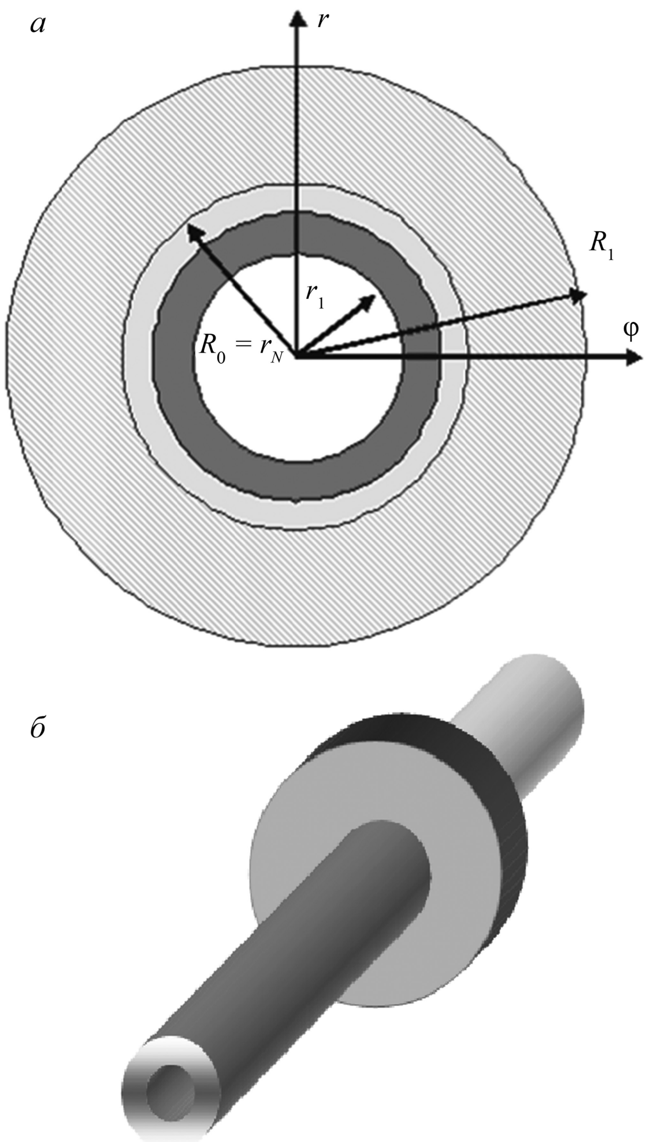

Рис. 1. Жесткий бандаж, посаженный на вал: *а* – геометрические размеры; *б* – общий вид.
Fig. 1. Hard bandage, placed on the shaft: *a* – geometric dimensions; *б* – general view.

родным полым цилиндром, стенка которого представляет собой пакет N вложенных друг в друга и сцепленных между собой круговых бесконечных однородных или неоднородных цилиндров, имеющих радиусы (начиная с внутреннего) r_1, r_2, r_3, r_N соответственно (рис. 1). Их механические параметры являются либо константами ρ_n, λ_n, μ_n, $(n = 1,...N)$, либо функциями радиуса $r_n \le r \le r_{n+1}$, $(n = 1,...N - 1)$ $\rho_n(r) = \rho_0 f_\rho^{(n)}(r)$, $\lambda_n(r) = \lambda_0 f_\lambda^{(n)}(r)$, $\mu_n(r_n) = \mu_0 f_\mu^{(n)}(r_n)$. Бандаж имеет внешний и внутренний радиус соответственно R_1 и $R_0 = r_N$, занимает на поверхности цилиндра область $z_1 \le z \le z_2$ и совершает торсионные колебания под действием момента $Me^{-i\omega t}$. Колебания всех цилиндров удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(n)}}{\partial \varphi} = 0,\ u_\varphi{}^{(n)} = u_\varphi{}^{(n)}(r, z),\ u_r{}^{(n)} = u_z{}^{(n)} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $u_\varphi^{(n)}$ – тангенциальная компонента вектора перемещений в n-ом цилиндре.

При исследовании колебаний неоднородной среды целесообразно перейти к безразмерным параметрам: линейные величины необходимо отнести к некоторому характерному линейному размеру l_0. В данном случае это полуширина бандажа $l_0 = 0{,}5|z_2 - z_1|$. Напряжения и усилия отнесены к значению модуля сдвига некоторого «опорного» материала μ_0: $l^* = l l_0^{-1}$, $\lambda^* = \lambda\mu_0^{-1}$, $\mu^* = \mu^*\mu_0^{-1}$; плотность – к значению плотности «опорного» материала ρ_0: $\rho^* = \rho\rho_0^{-1}$. В качестве частоты используется безразмерный параметр $\kappa_2 = \omega h V_S^{-1}$, где $V_S = \sqrt{\mu_0 \rho_0^{-1}}$ – скорость сдвиговой волны в однородной среде с параметрами λ_0, μ_0, ρ_0. Далее звездочки опускаются.

Для решения исходной задачи рассмотрим вспомогательную задачу о гармонических колебаниях неоднородного полого цилиндра под действием заданной на поверхности цилиндра $r = R_N$ в области $z_1 \le z \le z_2$ гармонической торсионной нагрузки $q(z)e^{-i\omega t}$. Колебания стенки цилиндра удовлетворяют условиям (1.1). Уравнение движения n-го цилиндра имеет вид:

$$\frac{\partial \theta_{\varphi r}{}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\theta_{r\varphi}{}^{(n)} + \theta_{\varphi r}{}^{(n)}}{r} + \frac{\partial \theta_{\varphi z}{}^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_\varphi{}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

$$n = 1,...,N,$$

где

$$\theta_{r\varphi}{}^{(n)} = \theta_{\varphi r}{}^{(n)} = \mu_n \left(\frac{\partial u_\varphi{}^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_\varphi{}^{(n)}}{r} \right),$$

$$\theta_{z\varphi}{}^{(n)} = \theta_{\varphi z}{}^{(n)} = \mu_n \frac{\partial u_\varphi{}^{(n)}}{\partial z}.$$

Граничные условия на поверхности внешнего цилиндра представляются формулами

$$\begin{cases} \theta_{r\varphi}^{(N)}\Big|_{r=R_0} = \mu_N \left(\dfrac{\partial u_\varphi^{(N)}}{\partial r} - \dfrac{u_\varphi^{(N)}}{r} \right)_{r=R_0} = q(z),\ z_1 \le z \le z_2, \\ \theta_{r\varphi}^{(N)}\Big|_{r=R_0} = 0,\ z < z_1, z > z_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Условия на границах разделов цилиндров-составляющих и на поверхности внутреннего цилиндра имеют вид:

$$r = r_n, |z| \le \infty, \ (n = 2,...,N), \ \theta_{r\varphi}^{(n-1)} = \theta_{r\varphi}^{(n)},$$
$$u_\varphi^{(n-1)} = u_\varphi^{(n)}, \qquad (1.4)$$

$$r = r_1, |z| \le \infty: \quad \theta_{r\varphi}^{(1)} = 0. \qquad (1.5)$$

Систему уравнений движения (1.2) неоднородного цилиндра со стенкой из пакета N однородных слоев можно переписать в виде

$$\mathbf{L}_\varphi^{\mathbf{t(n)}}\left[u_\varphi^{(n)}\right] = 0,$$

$$\mathbf{L}_\varphi^{\mathbf{t}(n)} = \mu_n\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + + (\mu_n)'\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right] - \rho_n\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) с граничными условиями (1.3)–(1.5) представляет собой краевую задачу о торсионных колебаниях неоднородного цилиндра.

Уравнение (1.6) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными или с переменными коэффициентами, для решения которой используют либо традиционные полуаналитические методы [30–32], либо оригинальные численные методы [7; 26].

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Решение краевой задачи (1.6), (1.3)–(1.5) строится на основе использования методов операционного исчисления. В случае постоянных коэффициентов оно представляется в виде ($n = 1,...,N$):

$$U_\varphi^{(n)} = c_{p+1}I_1(\sigma_2^{(n)}r) + c_{p+2}K_1(\sigma_2^{(n)}r), \ p = 2(n-1). \qquad (2.1)$$

Здесь $I_1(\gamma r)$, $K_1(\gamma r)$ – модифицированные функции Бесселя. Для решения краевой задачи с переменными коэффициентами используем развитый в работах [19; 26] подход. Решение краевой задачи представляется в виде:

$$U_\varphi^{(n)} = Y_2^{(n)} = c_{p+1}y_{12}^{(n)}(\alpha, r) + c_{p+2}y_{22}^{(n)}(\alpha, r), \quad p = 2(n-1). \qquad (2.2)$$

Участвующие в представлении (2.2) функции $y_{ij}^{(n)}(\alpha,r)$, $i, j = 1,2$ являются линейно независимыми решениями задачи Коши с начальными условиями $y_{ij}(\alpha,R_0) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера) для уравнения

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{M}^{(n)}(\alpha, r)\mathbf{Y}^{(n)}$$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \uparrow\left\{U_\varphi^{(n)'}, U_\varphi^{(n)}\right\} = \uparrow\{Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}\}$$

с матрицей

$$\mathbf{M}^{(n)}(\alpha, r) = \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)} & m_{12}^{(n)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{11}^{(n)} = -\frac{1}{\mu_n}\left(\frac{\mu_n}{r} + \mu_n'\right),$$

$$m_{12}^{(n)} = \frac{1}{\mu_n r}\left(\frac{\mu_n}{r} + \mu_n'\right) + \left(\sigma_2^{(n)}\right)^2.$$

Неизвестные c_k в представлениях решений (2.1) и (2.2) определяются за счет удовлетворения трансформированных путем преобразования Фурье граничных условий (1.3)–(1.5)

$$\mathbf{L_N^t C_N^t} = \mathbf{Q_N^t} \qquad (2.3)$$

Размерность вектора неизвестных $\mathbf{C_N^t}$ и вектора правых частей $\mathbf{Q_N^t}$ определяется числом слоев в стенке цилиндра и равна $2N$, размерность матрицы $\mathbf{L_N^t}$ – $2N \times 2N$.

Пусть $N = 1$. Матрица $\mathbf{L_N^t}$ представляется в виде [21]

$$\mathbf{L_1^t} = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}^t} \\ \mathbf{P_{01}^t} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{A}_{11}^{\mathbf{t}}$ и $\mathbf{P_{01}^t}$ двухэлементные векторы ([1×2]), которые отвечают граничным условиям соответственно на внешней и внутренней поверхности

$$\mathbf{A}_{11}^{\mathbf{t}} = \left(l_{11}^N(r_1) \quad l_{12}^N(r_1)\right), \quad \mathbf{P_{01}^t} = \left(l_{11}^1(R_0) \quad l_{12}^1(R_0)\right)$$

с элементами в случае однородного цилиндра

$$l_{11}^n(r) = \sigma_2^{(n)}I_0(r) - \frac{2}{r}I_1(r),$$

$$l_{12}^n(r) = \sigma_2^{(n)}K_0(r) + \frac{2}{r}K_1(r).$$

В случае функционально градиентного цилиндра

$$l_{11}^n(r) = \mu_n y_{11}^{(n)}(r) - \frac{\mu_n y_{12}^{(n)}(r)}{r},$$

$$l_{12}^n(r) = \mu_n y_{21}^{(n)}(r) - \frac{\mu_n y_{22}^{(n)}}{r}.$$

Пусть $N = 2$. Тогда матрица $\mathbf{L}_2^\mathbf{t}$ размерности $[4 \times 4]$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{L}_2^\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{22}^\mathbf{t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{12}^\mathbf{t} & -\mathbf{B}_{11}^\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{01}^\mathbf{t} \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Участвующие в (2.4) матрицы $\mathbf{B}_\mathbf{km}^\mathbf{t}$ размерности $[2 \times 2]$ отвечают условиям «стыковки», то есть условиям на границе раздела цилиндров. Как и раньше, первый из нижних индексов соответствует номеру границы, начиная с внутренней, второй – номеру слоя (цилиндра), упругие параметры которого участвуют в граничных условиях.

Увеличение числа слоев, составляющих стенку цилиндра, увеличивает размерность $\mathbf{L}_\mathbf{N}^\mathbf{t}$ за счет роста количества составляющих ее матриц-элементов, размерность которых не меняется. Так, в случае пакета из 5 слоев матрица $\mathbf{L}_\mathbf{N}^\mathbf{t}$ размерности $[10 \times 10]$ имеет ленточную структуру

$$\mathbf{L}_5^\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{55}^\mathbf{t} & & & & \\ \mathbf{B}_{45}^\mathbf{t} & -\mathbf{B}_{44}^\mathbf{t} & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{B}_{34}^\mathbf{t} & -\mathbf{B}_{33}^\mathbf{t} & & \\ & & \mathbf{B}_{23}^\mathbf{t} & -\mathbf{B}_{22}^\mathbf{t} & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{12}^\mathbf{t} & -\mathbf{B}_{11}^\mathbf{t} \\ & & & & \mathbf{P}_{01}^\mathbf{t} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Число строк в представлении (2.5) соответствует числу границ, число столбцов – количеству слоев в пакете. Разрешая систему (2.3) относительно неизвестных c_i, получаем решение краевой задачи. После применения обратного преобразования Фурье решение исходной задачи (1.6), (1.3)–(1.5) принимает вид:

$$u_\varphi^{(n)}(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} k^{(n)}(z-\xi, r, \kappa_2)q(\xi)d\xi,$$
$$k^{(n)}(s,r,\kappa_2) = \int K_1^{(n)}(\alpha, r, \kappa_2)e^{-i\alpha s}d\alpha. \qquad (2.6)$$

Функции $K_{11}^{(n)}(\alpha, r, \kappa_2)$ определяются для однородных цилиндров многослойной стенки выражением

$$K_{11}^{(n)} = \Delta_0^{-1}\left[\Delta_{1,\,p+1}I_1\left(\sigma_2^{(n)}r\right) + \Delta_{1,\,p+2}K_1\left(\sigma_2^{(n)}r\right)\right],$$
$$p = 2(n-1), \qquad (2.7)$$

для функционально градиентных цилиндров многослойной стенки

$$K_{11} = \Delta_0^{-1}\left[\Delta_{1,\,p+1}y_{p+1,2}^{(n)}(\alpha, r) + \Delta_{1,\,p+2}y_{p+2,2}^{(n)}(\alpha, r)\right]. \qquad (2.8)$$

Здесь Δ_0 и Δ_{ni} – определитель и алгебраическое дополнение элемента l_{ni} матрицы $\mathbf{L}_\mathbf{N}^\mathbf{t}$ (2.4) или (2.5) в зависимости от геометрии задачи.

Интегральное представление (2.6) определяет смещение произвольной точки среды при заданной на поверхности цилиндра нагрузки. В случае, когда в области $z_1 \le z \le z_2$ известно смещение поверхности, вызванное действием бандажа, выражение (2.6) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции $q(z)$, определяющей распределение контактных напряжений. При решении интегрального уравнения использованы подходы, подробно описанные в работе [7].

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Трансформанта Фурье решения интегрального уравнения (2.6) представляется формулой [7]:

$$Q(\alpha) = \frac{T(\alpha)}{\Pi(\alpha)} + \sum_{k=1}^{2M} C_k e^{i\alpha z^p},$$
$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^{M}\frac{\left(\alpha^2 - \gamma_k^2\right)}{\left(\alpha^2 - \xi_k^2\right)},$$

где $\xi_k(k = 1,2,...,n_1)$ и $\gamma_k(k = 1,2,...,n_2)$ – вещественные полюсы и нули символа $K_{11}(\alpha,R_0,\kappa_2)$. Остальные $\xi_k(k = n_1 + 1,...,M)$ и $\gamma_k(k = n_2 + 1,...,M, M \ge \max\{n_1,n_2\})$ – комплексные полюсы и нули $K_{11}(\alpha,R_0,\kappa_2)$, лежащие в полосе $|\mathrm{Im}\alpha| \le \varepsilon_0$.

Функция $T(\alpha)$ – трансформанта Фурье функции

$$t(z) = t_0(z) + \sum_{k=1}^{2M} C_k t_k(z),$$
$$t_k(z) = \sum_{p=1}^{N}\beta_k^p \psi_p(z),\ k = 0,1,...,2M. \qquad (3.1)$$

$\psi_p(z)$ – система координатных функций, заданных на отрезке $[-a, a]$, коэффициенты β_k^p удовлетворяют системе $2M + 1$ алгебраических уравнений

$$\mathbf{AB}_k = \mathbf{F}_k,\ \mathrm{k} = 0,1,...,2M,$$
$$\mathbf{A} = \left\|A_{pl}\right\|_{p,l=1}^{N}, \quad A_{pl} = \int_\Gamma K_0(\alpha)\Psi_p(\alpha)\Phi_l^*(\alpha)d\alpha,$$
$$K_0(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{\Pi(\alpha)},$$
$$\mathbf{F}_k = \left\{f_k^l\right\}_{l=1}^{N}, \quad f_0^l = \int_{-a}^{a} f(z)\varphi_l(z)dz,$$
$$f_k^l = \int_\Gamma K(\alpha)\Phi_l(\alpha)e^{-i\alpha z^k}d\alpha, \quad \mathbf{B}_k = \left\{\beta_k^p\right\}_{p=1}^{N}.$$

Таблица 1. Области возникновения резонанса для различных случаев неоднородности стенки цилиндра
Table 1. Areas of occurrence of resonance for different cases of inhomogeneity of the cylinder wall

№ закона Law No.	Интегральный коэффициент Integral coefficient F	1 мода / 1 mode		2 мода / 2 mode		3 мода / 3 mode	
		Диапазон Range	Ширина Width	Диапазон Range	Ширина Width	Диапазон Range	Ширина Width
1	2,00	2,7–4,1	1,4	5,2–5,3	0,1	8,7 и 9,4	<0,1
2	1,79	2,8–4,0	1,2	5,2–5,4	0,2	10,0–10,6	0,6
3	1,79	3,6–4,1	0,5	6,2–6,7	0,5	11,5–11,7	0,2
4	2,00	3,7–4,2	0,5	6,3–6,7	0,4	11,8–12,1	0,3

$\Psi_p(\alpha)$ и $\Phi_l(\alpha)$ – преобразования Фурье систем координатных функций $\psi_p(z)$ и $\varphi_l(z)$. Звездочка означает комплексно сопряженную величину. Постоянные C_k в представлении (3.2) ($k = 1,2,...,2M$) удовлетворяют алгебраической системе

$$\sum_{p=1}^{N} \beta_0^p \Psi_p(\pm\gamma_n) - \sum_{k=1}^{2M} C_k \sum_{p=1}^{N} \beta_k^p \Psi_p(\pm\gamma_n) = 0,$$
$$n = 0,1,...,2M.$$

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛОГО ЦИЛИНДРА. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Для определения резонансных свойств неоднородного цилиндра проведен численный эксперимент по исследованию динамической жесткости цилиндра

$$Q(\kappa_2) = \int_{z_1}^{z_2} q(z)dz,$$

где $q(z)$ – механические напряжения на границе цилиндр – бандаж при единичном смещении бандажа. ReQ отвечает за амплитуду возникающих колебаний, ImQ – за излучение из зоны контакта. Область потенциальной возможности возникновения резонансных явлений определяется условиями Re$Q > 0$, $|\mathrm{Im}Q| < 0{,}1$.

Рассматривались различные варианты неоднородной стенки цилиндра с жестким включением. Интегральный коэффициент неоднородности $F = \int_{R_0}^{R_N} f(r)dr$ для выбранных законов изменения свойств стенки цилиндра близок к значению 1,9 (табл. 1). На рисунке 2 приведены использованные при исследовании законы изменения материальных параметров стенки цилиндра по радиусу для случая жесткого включения:

а) акустически однородный цилиндр, плотность и жесткость материала стенки меняется скачкообразно;

б) акустически однородный цилиндр, плотность и жесткость материала стенки меняется по закону

$$f(r) = f_0\left(1 + k\sin\left(\frac{r_N - r}{r_N - R_0}\pi\right)^n\right) \quad (4.1)$$

в) акустически неоднородный цилиндр, плотность постоянна, жесткость материала стенки меняется по закону (4.1);

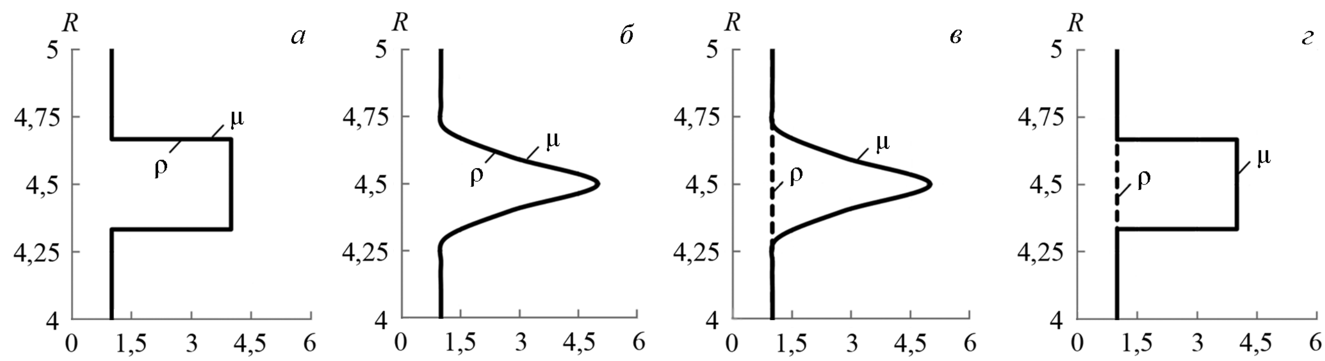

Рис. 2. Законы изменения материальных параметров стенки цилиндра: *а*, *б* – акустически однородная среда; *в*, *г* – постоянная плотность.
Fig. 2. The laws of changing the material parameters of the cylinder wall: *а*, *б* – acoustically homogeneous media; *в*, *г* – constant density.

г) акустически неоднородный цилиндр, плотность постоянна, жесткость материала стенки меняется скачкообразно.

На рисунке 3 приведена зависимость первой моды динамической жесткости цилиндра *Q* для случаев неоднородности (1)–(4). Область возможного возникновения резонанса для первой моды значительно шире для акустически однородного цилиндра (1) и (2), начинается с безразмерной частоты 2,7 и заканчивается около 4,1. Если же плотность материала остается постоянной, ширина области резонанса уменьшается более чем вдвое и смещается в область более высоких частот.

На рисунке 4 приведена зависимость динамической жесткости цилиндра *Q* второй моды. В случае акустически однородного цилиндра (случаи 1 и 2) ширина резонансной области незначительна и составляет порядка 0,1–0,2. Для акустически неоднородного цилиндра (случаи 3 и 4) область резонанса также смещается в сторону высоких частот с увеличением ширины до 0,5.

На рисунке 5 приведена зависимость динамической жесткости цилиндра *Q* для третьей моды. Здесь область возникновения резонансов для случая 1 – акустически однородный цилиндр со скачкообразным изменением свойств – практически вырождается в две точки, в то время как для акустически однородного цилиндра с плавным изменением свойств в стенке ширина области составляет 0,6. Области резонанса для акустически неоднородного цилиндра смещены в сторону более высоких частот, их ширина составляет 0,2–0,3.

В таблице 1 приведены границы и ширина области возникновения резонансов для всех исследованных случаев.

Резюмируя вышесказанное, можно сказать, что вид неоднородности стенки цилиндра существенным образом влияет на области возможного возникновения резонансов. Данное влияние может заключаться в смещении резонансной частоты и в изменении ширины области резонанса – как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Причем характер изменений может быть различным даже для разных мод цилиндра одной конфигурации. В связи с отсутствием общих закономерностей при выборе условий эксплуатации подобных объектов и построении их физико-математических моделей важно максимально точно учитывать динамические свойства конструкции для каждого конкретного случая в заданном частотном диапазоне.

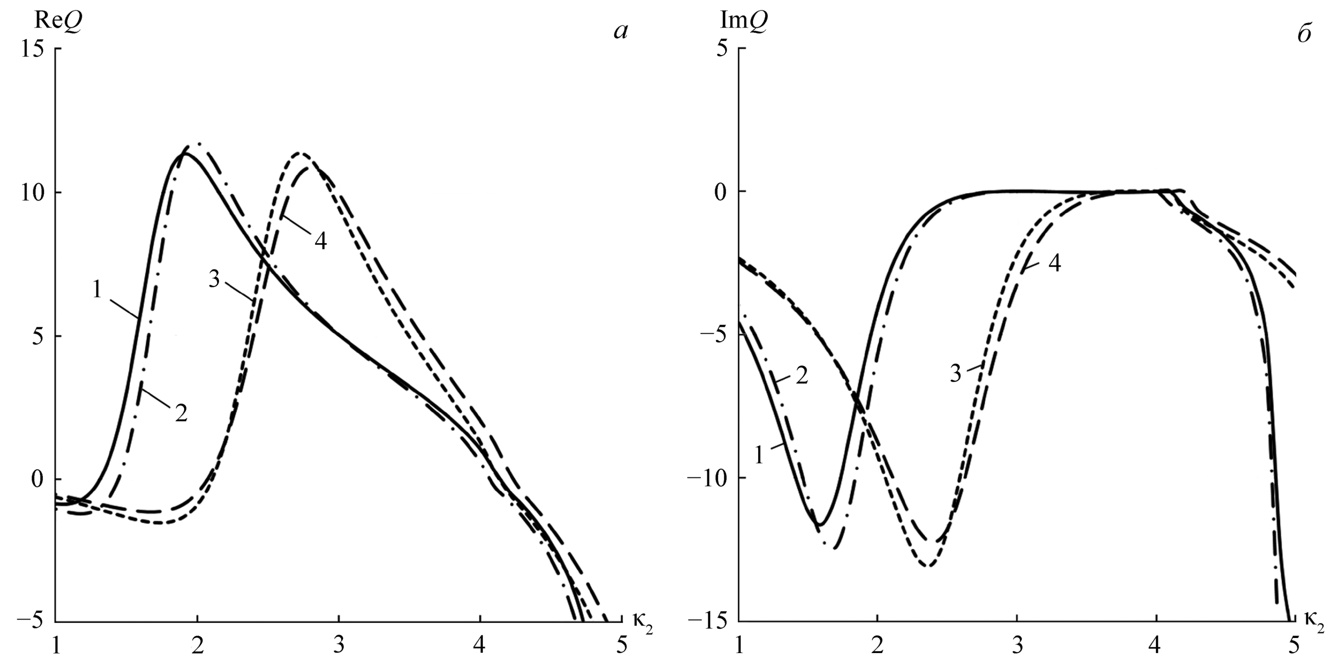

Рис. 3. Влияние структуры материала стенки на вещественную (*а*) и мнимую (*б*) составляющие реакции неоднородного цилиндра для первой моды. Цифрами 1, 2, 3 и 4 отмечены кривые, соответствующие законам а, б, в и г изменения материальных параметров соответственно.

Fig. 3. Influence of the structure of the wall material on the real (*а*) and imaginary (*б*) components of the reaction of an inhomogeneous cylinder for the first mode. Numerals 1, 2, 3 and 4 indicate curves corresponding to the laws а, б, в, and г of the changes in the material parameters, respectively.

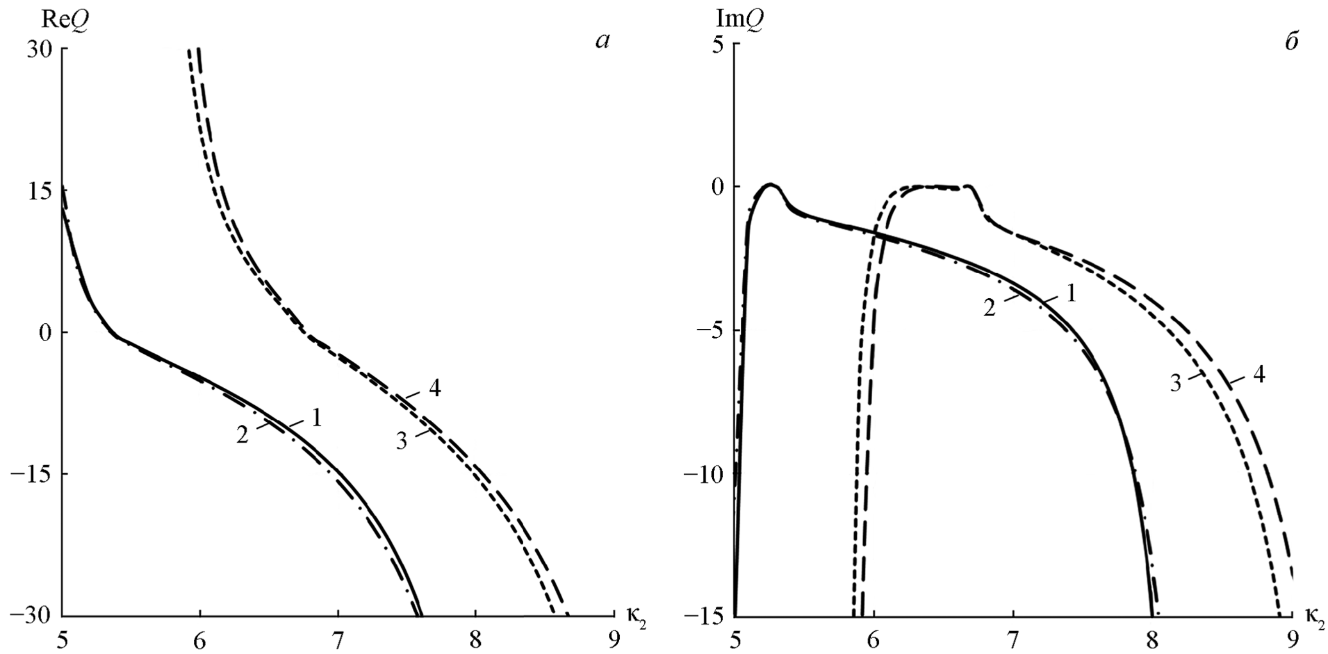

Рис. 4. Влияние структуры материала стенки на вещественную (*а*) и мнимую (*б*) составляющие реакции неоднородного цилиндра для второй моды. Цифрами 1, 2, 3 и 4 отмечены кривые, соответствующие законам а, б, в и г изменения материальных параметров соответственно.

Fig. 4. The influence of the structure of the wall material on the real (*a*) and imaginary (*б*) components of the reaction of an inhomogeneous cylinder for the second mode. Numerals 1, 2, 3 and 4 indicate curves corresponding to the laws a, б, в, and г of the changes in the material parameters, respectively.

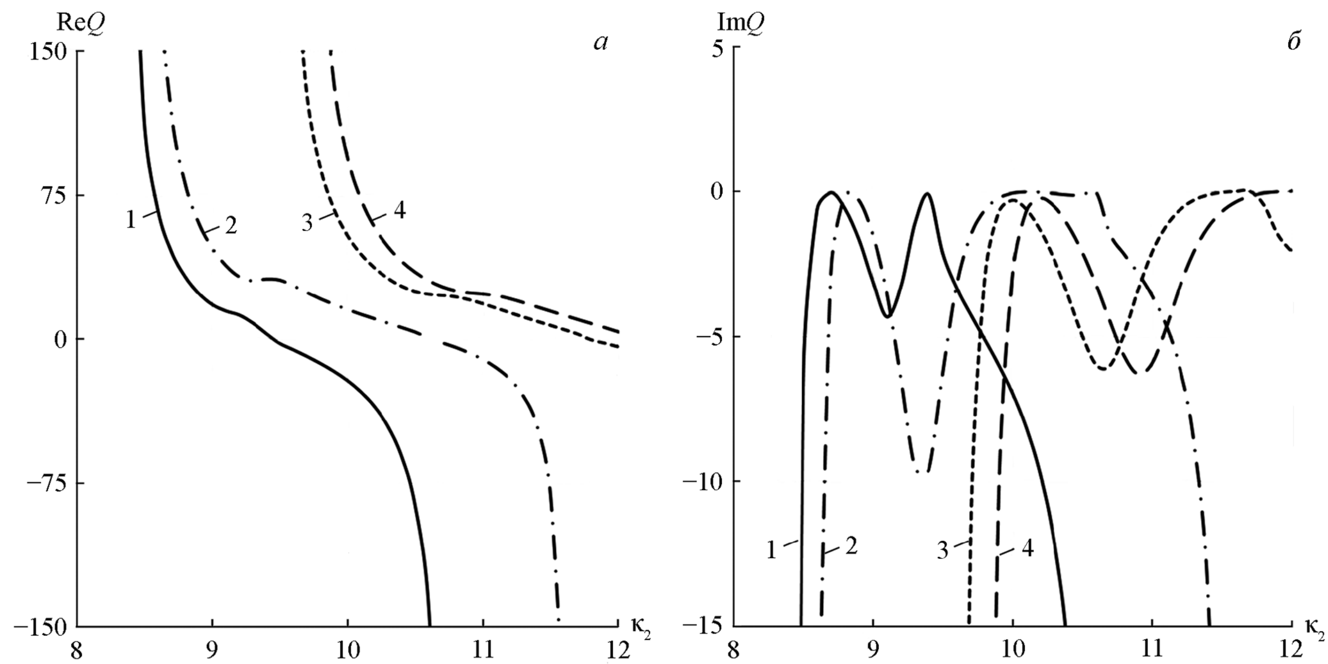

Рис. 5. Влияние структуры материала стенки на вещественную (а) и мнимую (б) составляющие реакции неоднородного цилиндра для третьей моды. Цифрами 1, 2, 3 и 4 отмечены кривые, соответствующие законам а, б, в и г изменения материальных параметров соответственно.

Fig. 5. The influence of the structure of the wall material on the real (a) and imaginary (б) components of the reaction of an inhomogeneous cylinder for the third mode. Numerals 1, 2, 3 and 4 indicate curves corresponding to the laws a, б, в, and г of the changes in the material parameters, respectively.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель неоднородного полого толстостенного бесконечного цилиндра с многослойной стенкой, совершающего установившиеся гармонические торсионные колебания под действием осциллирующего бандажа. Стенка моделируется пакетом вложенных однородных или функционально градиентных цилиндров. Предложенная модель позволяет адекватно учитывать свойства неоднородных валов, трубопроводов, физико-механические параметры которых могут меняться по толщине стенки различным образом и с различной интенсивностью. В рамках модели детально исследовано влияние характера, области локализации и интенсивности изменения свойств стенки цилиндра на его динамическую жесткость. Установлены закономерности формирования поверхностного волнового поля, показано, как за счет изменения структуры и свойств стенки трубопровода можно улучшить его технико-эксплуатационные и прочностные качества, выявлены области, в которых возможно возникновение резонансов.

Работа выполнена в рамках реализации Государственного задания, проект № 0256-2014-0003, № госрегистрации 01201354542.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Haines D.W., Lee P.C.Y. 1971. Axially symmetric torsional waves in circular composite cylinders. *J. Appl. Mech.* 38(4): 1042–1044. doi: 10.1115/1.3408909

2. Калинчук В.В., Полякова И.Б. 1981. О возбуждении преднапряженного цилиндра. *Прикладная математика и механика*. 45(2): 384–389.

3. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. 2000. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах. *Акустичний вiсник*. 3(3): 44–55.

4. Комиссарова Г.Л. 2002. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах. *Прикладная механика*. 38(1): 124–134.

5. Akbarov S.D., Guz A.N. 2004. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders. *International Journal of Engineering Science*. 42: 769–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2003.11.002

6. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. 2004. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре. *Акустичний вiсник*. 7(3): 39–48.

7. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинчук В.В. 2008. Динамическая контактная задача о крутильных колебаниях жесткого бандажа на поверхности полого цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. *Вестник Южного научного центра*. 4(4): 9–14.

8. Ozturk A., Akbarov S.D. 2008. Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder. *Mechanics of Composite Materials*. 44(1): 77–86. doi: 10.1007/s11029-008-0009-7

9. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинчук В.В. 2009. Торсионные колебания преднапряженного цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 3: 11–17.

10. Akbarov S.D., Guliev M.S. 2009. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science.* 39(2): 155–177. doi: 10.3970/cmes.2009.039.101

11. Комиссарова Г.Л. 2009. Свойства поверхностных волн в заполненном жидкостью упругом цилиндре. *Акустический журнал*. 55(3): 315–325.

12. Ozturk A., Akbarov S.D. 2009. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 89(9): 754–766. doi: 10.1002/zamm.200800201

13. Akbarov S.D., Ozturk A. 2010. The influence of Murnaghan constants on the propagation of a torsional wave in pre-stretched compound circular cylinders. *International Applied Mechanics*. 46(7): 847–856. doi: 10.1007/s10778-010-0374-5

14. Kepceler T. 2010. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface. *Applied Mathematical Modelling*. 34(12): 4058–4073. doi: 1016/j.apm.2010.03.038

15. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А. 2010. Гранично-элементный анализ динамической осадки пороупругой колонны. *Проблемы прочности и пластичности*. 72: 154–158.

16. Akbarov S.D., Kepceler T., Mert Egilmez M. 2011. Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration.* 330(18–19): 4519–4537. doi: 10.1016/j.jsv.2011.04.009

17. Yu J.G., Lefebvre J.E. 2013. Guided waves in multilayered hollow cylinders: The improved Legendre polynomial method. *Composite Structures*. 95: 419–429. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.07.012

18. Akbarov S.D., Kepceler T. 2015. On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials. *Applied Mathematical Modelling*. 39(13): 3569–3587. doi: 10.1016/j.apm.2014.11.061

19. Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности динамики трехслойного полого цилиндра. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 4: 19–32.

20. Sandhya Rani B., Malla Reddy P., Shamantha Reddy G. 2015. Study of Torsional Vibrations in Composite Transversely Isotropic Poroelastic Cylinders. *Procedia Engineering.* 127: 462–468. doi: 10.1016/j.proeng.2015.11.399

21. Белянкова Т.И., Богомолов А.С., Калинчук В.В., Лыжов В.А. 2015. Особенности волнового поля на поверхности полой цилиндрической трубы с покрытием. *Вестник Южного научного центра*. 11(1): 16–23.

22. Ватульян А.О., Юров В.О. 2015. О дисперсионных соотношениях для полого цилиндра в поле неоднородных предварительных напряжений. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2: 22–29.

23. Ватульян А.О., Моргунова А.В. 2015. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами. *Акустический журнал*. 61(3): 295–301. doi: 10.7868/S0320791915020148

24. Ватульян А.О., Юров В.О. 2016. Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений. *Прикладная механика и техническая физика*. 57(4): 182–191. doi: 10.15372/PMTF20160418

25. Ананьев И.В., Бабешко В.А. 1978. Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1: 64–72.

26. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. 2004. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. S: 44–47.

27. Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. 2013. О локализации энергии природных процессов и природные вирусы. *Доклады Академии наук*. 448(4): 406–410. doi: 10.7868/S0869565213040099

28. Бабешко В.А. 1994. К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае. *Доклады Академии наук*. 335(1): 55–60.

29. Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф. 1990. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 3: 74–83.

30. Калинчук В.В., Полякова И.Б. 1982. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства. *Прикладная механика*. 18(6): 22–27.

31. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. 1993. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством. *Прикладная математика и механика*. 57(4): 123–134.

32. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. 1994. Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 6: 83–94.

REFERENCES

1. Haines D.W., Lee P.C.Y. 1971. Axially symmetric torsional waves in circular composite cylinders. *J. Appl. Mech.* 38(4): 1042–1044. doi: 10.1115/1.3408909

2. Kalinchuk V.V., Poliakova I.B. 1981. On the excitation of a prestressed cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 45(2): 282–285. doi: 10.1016/0021-8928(81)90049-6

3. Grinchenko V.T., Komissarova G.L. 2000. [Properties of normal waves in an elastic-liquid cylindrical waveguides]. *Akustychnyj visnyk*. 3(3): 44–55. (In Russian).

4. Komissarova G.L. 2002. Propagation of Normal Waves Through a Fluid Contained in a Thin-Walled Cylinder. *International Applied Mechanics*. 38(1): 103–112. doi: 10.1023/A:1015344211300

5. Akbarov S.D., Guz A.N. 2004. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders. *International Journal of Engineering Science*. 42: 769–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2003.11.002

6. Grinchenko V.T., Komissarova G.L. 2004. [Properties of surface waves in an elastic hollow cylinder]. *Akustychnyj visnyk*. 7(3): 39–48. (In Russian).

7. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamic contact problem for torsion oscillations of rigid bandage on surface of hollow cylinder made of functionally graded material]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(4): 9–14. (In Russian).

8. Ozturk A., Akbarov S.D. 2008. Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder. *Mechanics of Composite Materials*. 44(1): 77–86. doi: 10.1007/s11029-008-0009-7

9. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. 2009. [Torsion oscillations of a stressed cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 3: 11–17. (In Russian).

10. Akbarov S.D., Guliev M.S. 2009. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*. 39(2): 155–177. doi: 10.3970/cmes.2009.039.101

11. Komissarova G.L. 2009. Properties of surface waves in an elastic cylinder filled with a liquid. *Acoustical Physics*. 55(3): 319–328. doi: 10.1134/S1063771009030051

12. Ozturk A., Akbarov S.D. 2009. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 89(9): 754–766. doi: 10.1002/zamm.200800201

13. Akbarov S.D., Ozturk A. 2010. The influence of Murnaghan constants on the propagation of a torsional wave in pre-stretched compound circular cylinders. *International Applied Mechanics*. 46(7): 847–856. doi: 10.1007/s10778-010-0374-5

14. Kepceler T. 2010. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface. *Applied Mathematical Modelling*. 34(14): 4058–4073. doi: 1016/j.apm.2010.03.038

15. Amenitsky A.V., Belov A.A., Igumnov L.A. 2010. [The boundary-element analysis of the dynamic settling of a poroelastic column]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 72: 154–158. (In Russian).

16. Akbarov S.D., Kepceler T., Mert Egilmez M. 2011. Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder. *Journal of Sound and Vibration*. 330(18–19): 4519–4537. doi: 10.1016/j.jsv.2011.04.009

17. Yu J.G., Lefebvre J.E. 2013. Guided waves in multilayered hollow cylinders: The improved Legendre polynomial method. *Composite Structures*. 95: 419–429. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.07.012

18. Akbarov S.D., Kepceler T. 2015. On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials. *Applied Mathematical Modelling*. 39(13): 3569–3587. doi: 10.1016/j.apm.2014.11.061

19. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Features of dynamics of three-layer hollow cylinder]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 4: 19–32. (In Russian).
20. Sandhya Rani B., Malla Reddy P., Shamantha Reddy G. 2015. Study of Torsional Vibrations in Composite Transversely Isotropic Poroelastic Cylinders. *Procedia Engineering*. 127: 462–468. doi: 10.1016/j.proeng.2015.11.399
21. Belyankova T.I., Bogomolov A.S., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2015. [Specific features of wave field on the surface of a hollow cylindrical tube with a coating]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 11(1): 16–23. (In Russian).
22. Vatulyan A.O., Yurov V.O. 2015. [On the dispersion relations for a hollow cylinder within inhomogeneous residual stress field]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2: 22–29. (In Russian).
23. Vatul'yan A.O., Morgunova A.V. 2015. Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with variable properties. *Acoustical physics*. 61(3): 265–271. doi: 10.1134/S1063771015020141
24. Vatul'yan A.O., Yurov V.O. 2016. Wave processes in a hollow cylinder in an inhomogeneous prestress field. *Journal of applied mechanics and technical physics*. 57(4): 731–739. doi: 10.1134/S0021894416040180
25. Anan'ev I.V., Babeshko V.A. 1978. [Oscillations of the stamp atop the layer with variable on depth characteristics]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 1: 64–72. (In Russian).
26. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2004. [On the dynamics of a medium with continuously varying in depth properties]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*. S: 44–47. (In Russian).
27. Babeshko V.A., Ritzer J., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. 2013. Energy localization in natural processes and natural viruses. *Doklady Physics*. 58(2): 51–55. doi: 10.1134/S1028335813020018
28. Babeshko V.A. 1994. [To the calculation of high-frequency resonance parameters in the three-dimensional case]. *Doklady Akademii nauk*. 335(1): 55–60. (In Russian).
29. Babeshko V.A., Vorovich I.I., Obraztsov I.F. 1990. [High-frequency resonance in semi-infinite bodies with inhomogeneities]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. 3: 74–83. (In Russian).
30. Kalinchuk V.V., Polyakova I.B. 1982. Vibration of a die on the surface of a prestressed half-space. *International Applied Mechanics*. 18(6): 504–509. doi: 10.1007/BF00883339
31. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1993. The interaction of a vibrating punch with a prestressed half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 57(4): 713–724. doi: 10.1016/0021-8928(93)90041-J
32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1994. [Dynamics of a massive body interacting with a prestressed half-space]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 6: 83–94. (In Russian).

Поступила 28.07.2017