

УДК 539.3:534.1

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С ПОРИСТОЙ ОСНОВОЙ

© 2012 г. Д.Н. Шейдаков<sup>1</sup>, И.Б. Михайлова<sup>1</sup>, А.В. Соколов<sup>1</sup>

В рамках бифуркационного подхода проведен анализ устойчивости упругой прямоугольной трехслойной плиты с пористой основой, находящейся под действием двухосного нагружения. Для модели физически линейного материала получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение трехслойной плиты в возмущенном состоянии. В качестве примера подробно рассмотрен случай квадратной плиты с одинаковыми верхним и нижним покрытиями. Для нескольких конкретных материалов построены области устойчивости в плоскости параметров нагружения. Изучено влияние покрытий и размеров плиты на потерю устойчивости.

**Ключевые слова:** нелинейная упругость, пористость, микрополярная среда, устойчивость деформируемых тел, трехслойная плита, влияние покрытий.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел имеет большое значение как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, поскольку исчерпание несущей способности и разрушение сооружений и инженерных конструкций нередко происходит именно в результате потери устойчивости под действием внешних нагрузок. Вследствие увеличения числа новых конструкционных материалов актуальной становится проблема устойчивости тел со сложной структурой. Целью настоящего исследования является изучение потери устойчивости нелинейно упругих плит из высокопористых материалов, таких как металлические и полимерные пены. Как правило, такие плиты имеют трехслойную структуру (пористая основа покрыта твердыми и жесткими оболочками), что необходимо для оптимизации механических свойств при нагружении, а также для защиты от коррозии. В подавляющем большинстве работ поведение пен изучается в рамках классической модели сплошной среды. Однако представляется более целесообразным использовать при анализе высокопористых материалов модель микрополярной среды, или континуума Коссера [1–5], так как она позволяет более адекватно описывать ряд важных свойств данных материалов.

<sup>1</sup> Южный научный центр Российской академии наук, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41; e-mail: sheidakov@mail.ru; michailova@ssc-ras.ru; arcady.sokolov@gmail.com

### НАЧАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим прямоугольную трехслойную плиту длины  $b_1$ , ширины  $b_2$  и толщины  $H$ . Будем считать, что поведение пористой основы толщиной  $2a$  описывается моделью микрополярного упругого тела. Верхнее покрытие толщиной  $h_+$  и нижнее покрытие толщиной  $h_-$  выполнены из классических неполярных материалов. При двухосном сжатии (растяжении) плиты положение частицы в деформированном состоянии задается радиусами-векторами  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_+$ , и  $\mathbf{R}_-$  (здесь и далее символами “+” и “-” будем обозначать величины, относящиеся к верхнему и нижнему покрытиям, соответственно, а без “+” или “-” – относящиеся к пористой основе трехслойной плиты) [6, 7]:

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 x_1, & 0 \leq x_1 \leq b_1, \\ X_2 &= \alpha_2 x_2, & 0 \leq x_2 \leq b_2, \\ X_3 &= \begin{cases} f_+(x_3), & a \leq x_3 \leq a + h_+, \\ f(x_3), & |x_3| \leq a, \\ f_-(x_3), & -(a + h_-) \leq x_3 \leq -a; \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+ &= \alpha_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f_+(x_3) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R} &= \alpha_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f(x_3) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_- = \alpha_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f_-(x_3) \mathbf{e}_3.$$

Здесь  $x_1, x_2, x_3$  – декартовы координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты),  $X_1, X_2,$

$X_3$  – эйлеровы координаты,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  – ортонормированный векторный базис декартовых координат,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты сжатия вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно,  $f(x_3)$  и  $f_{\pm}(x_3)$  – некоторые неизвестные функции, характеризующие толщинную деформацию трехслойной плиты.

Кроме того, при  $|x_3| \leq a$  задан собственно ортогональный тензор микроповорота  $\mathbf{H}$ , который характеризует поворот частицы микрополярной среды и при рассматриваемой деформации равен единичному тензору  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (3)$$

Согласно выражениям (1), (2), градиенты деформации  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{C}_{\pm}$  равны (здесь и далее ' обозначает производную по  $x_3$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_+ &= \text{grad } \mathbf{R}_+ = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + f'_+ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{C} &= \text{grad } \mathbf{R} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + f' \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{C}_- = \text{grad } \mathbf{R}_- = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + f'_- \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

где grad – градиент в лагранжевых координатах.

Из соотношений (3), (4) следует, что для пористой основы плиты ( $|x_3| \leq a$ ) тензор изгибной деформации  $\mathbf{L}$  равен нулю [8; 9], а мера деформации типа Коши  $\mathbf{Y}$  выражается следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + f' \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (5)$$

Согласно (4), для верхнего ( $a \leq x_3 \leq a + h_+$ ) и нижнего ( $-a - h_- \leq x_3 \leq -a$ ) покрытий выражения мер искажения  $\mathbf{U}_{\pm}$  и тензоров макроповорота  $\mathbf{A}_{\pm}$  имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\pm} &= (\mathbf{C}_{\pm} \cdot \mathbf{C}_{\pm}^T)^{1/2} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ \alpha_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + f'_{\pm} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_{\pm} &= \mathbf{U}_{\pm}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{\pm} = \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем считать, что упругие свойства трехслойной плиты описываются моделью физически линейного материала, удельная потенциальная энергия деформации которого в случае микрополярного тела является квадратичной формой тензоров  $\mathbf{Y} - \mathbf{E}$  и  $\mathbf{L}$  [10, 11]:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mu + \kappa) \text{tr}((\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T) + \\ &+ \frac{1}{2} \mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{1}{2} \gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2} \gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}, \\ \mu + \kappa &> 0, \quad \lambda + 2\mu + \kappa > 0, \\ \gamma_2 &\geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

а в случае классического неполярного материала – квадратичной формой тензоров  $\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E}$  [6]:

$$W_{\pm} = \frac{1}{2} \lambda_{\pm} \text{tr}^2(\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E}) + \mu_{\pm} \text{tr}(\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E})^2, \quad (8)$$

$$\mu_{\pm} > 0, \quad \lambda_{\pm} + 2\mu_{\pm} > 0.$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\lambda_{\pm}$ ,  $\mu_{\pm}$  – константы Ляме для основы плиты и покрытий соответственно,  $\kappa$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  – микрополярные упругие константы.

Из выражений (3), (5), и (7) следует, что для пористой основы плиты тензор моментных напряжений типа Пиолы  $\mathbf{G}$  при деформации двухосного сжатия равен нулю, а тензор напряжений типа Пиолы

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H} = (\lambda s + \chi(\alpha_1 - 1)) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\lambda s + \chi(\alpha_2 - 1)) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\lambda s + \chi(f' - 1)) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (9)$$

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + f' - 3, \quad \chi = 2\mu + \kappa.$$

Согласно (6), (8), выражения тензоров напряжений Пиолы  $\mathbf{D}_{\pm}$  для покрытий имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\pm} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{U}_{\pm}} \cdot \mathbf{A}_{\pm} = (\lambda_{\pm} s_{\pm} + 2\mu_{\pm}(\alpha_1 - 1)) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\lambda_{\pm} s_{\pm} + 2\mu_{\pm}(\alpha_2 - 1)) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ &+ (\lambda_{\pm} s_{\pm} + 2\mu_{\pm}(f'_{\pm} - 1)) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ s_{\pm} &= \alpha_1 + \alpha_2 + f'_{\pm} - 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения равновесия нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов записываются следующим образом [7; 10]:

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{div } \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0, \quad (11)$$

где div – дивергенция в лагранжевых координатах. Символ  $\times$  означает векторный инвариант тензора второго ранга.

Уравнения равновесия для классической (неполярной) среды при отсутствии массовых сил имеют вид [6]

$$\text{div } \mathbf{D}_{\pm} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_+ |_{x_3=a+h_+} &= 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_- |_{x_3=-(a+h_-)} = 0, \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_{\pm} |_{x_3=\pm a} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D} |_{x_3=\pm a}, \\ f_{\pm}(\pm a) &= f(\pm a), \quad f(0) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

выражают отсутствие внешних нагрузок на лицевых поверхностях трехслойной плиты ( $x_3 = a + h_+$ ,  $x_3 = -a - h_-$ ), жесткое сцепление верхнего и нижнего покрытий с пористой основой ( $x_3 = \pm a$ ), а также

отсутствие вертикального смещения на плоскости  $x_3 = 0$ .

Решая краевую задачу (11)–(13) с учетом соотношений (9), (10), находим неизвестные функции  $f(x_3)$  и  $f_{\pm}(x_3)$

$$f(x_3) = \alpha_3 x_3, \quad f_+(x_3) = \alpha_3^+(x_3 - a) + a\alpha_3,$$

$$f_-(x_3) = \alpha_3^-(x_3 + a) - a\alpha_3,$$

$$\alpha_3 = 1 + \frac{\lambda(2 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\lambda + \chi}, \quad \alpha_3^{\pm} = 1 + \frac{\lambda_{\pm}(2 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\lambda_{\pm} + 2\mu_{\pm}}.$$

### БИФУРКАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия трехслойной плиты при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое для микрополярированной части радиусом-вектором  $\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}$  и тензором микроповорота  $\mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}$ , а для покрытий – радиусами-векторами  $\mathbf{R}_{\pm} + \eta\mathbf{v}_{\pm}$ . Здесь  $\eta$  – малый параметр,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_{\pm}$  – векторы добавочных перемещений,  $\boldsymbol{\omega}$  – линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярированной среды, отсчитываемый от начального деформированного состояния.

Возмущенное состояние равновесия микрополярированной среды описывается уравнениями [10]

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^* = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{G}^* + [\operatorname{grad} \mathbf{v}^{\top} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^{\top} \cdot \mathbf{D}^*]_{\times} = 0,$$

$$\mathbf{D}^* = \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \Big|_{\eta=0},$$

$$\mathbf{G}^* = \frac{d}{d\eta} \mathbf{G}(\mathbf{R} + \eta\mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}) \Big|_{\eta=0},$$

где  $\mathbf{D}^*$  и  $\mathbf{G}^*$  – линейризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы. В случае физически линейного микрополярированного материала (7) для этих тензоров справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= (\lambda(\operatorname{tr} \mathbf{Y}^*) \mathbf{E} + (\mu + \kappa) \mathbf{Y}^* + \mu \mathbf{Y}^{*\top}) \cdot \mathbf{H} - \\ &- (\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu(\mathbf{Y}^{\top} - \mathbf{E}) + \\ &+ (\mu + \kappa)(\mathbf{Y} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* &= (\gamma_1(\operatorname{tr} \mathbf{L}^*) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^* + \gamma_3 \mathbf{L}^{*\top}) \cdot \mathbf{H} - \\ &- (\gamma_1(\operatorname{tr} \mathbf{L}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L} + \gamma_3 \mathbf{L}^{\top}) \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathbf{Y}^* = (\operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{H}^{\top}, \quad \mathbf{L}^* = \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}^{\top}.$$

Здесь  $\mathbf{Y}^*$  – линейризованная мера деформации типа Коши,  $\mathbf{L}^*$  – линейризованный тензор изгибных деформаций.

Уравнения нейтрального равновесия в рамках неполярной нелинейной теории упругости имеют вид [6]

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_{\pm}^* = 0, \quad \mathbf{D}_{\pm}^* = \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}_{\pm}(\mathbf{R}_{\pm} + \eta\mathbf{v}_{\pm}) \Big|_{\eta=0}. \quad (17)$$

Представление линейризованных тензоров напряжений Пиолы  $\mathbf{D}_{\pm}^*$  для модели физически линейного материала (8) получим путем линейризации определяющих соотношений (10) с учетом (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\pm}^* &= (\lambda_{\pm}(\operatorname{tr} \mathbf{U}_{\pm}^*) \mathbf{E} + 2\mu_{\pm} \mathbf{U}_{\pm}^*) \cdot \mathbf{A}_{\pm} + (\lambda_{\pm} \operatorname{tr}(\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E}) \mathbf{E} + \\ &+ 2\mu_{\pm}(\mathbf{U}_{\pm} - \mathbf{E})) \cdot \mathbf{U}_{\pm}^{-1} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}_{\pm} - \mathbf{U}_{\pm}^* \cdot \mathbf{A}_{\pm}). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{U}_{\pm}^*$  – линейризованные меры искажения, которые можно выразить через линейризованные меры деформации Коши–Грина:

$$(\mathbf{U}_{\pm} \cdot \mathbf{U}_{\pm})^* = (\mathbf{C}_{\pm} \cdot \mathbf{C}_{\pm}^{\top})^*$$

↓

$$\mathbf{U}_{\pm}^* \cdot \mathbf{U}_{\pm} + \mathbf{U}_{\pm} \cdot \mathbf{U}_{\pm}^* = \operatorname{grad} \mathbf{v}_{\pm} \cdot \mathbf{C}_{\pm}^{\top} + \mathbf{C}_{\pm} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}_{\pm})^{\top}.$$

Линейризованные краевые условия на лицевых поверхностях трехслойной плиты ( $x_3 = a + h_+$ ,  $x_3 = -a - h_-$ ) и на границах раздела сред ( $x_3 = \pm a$ ) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_+^* \Big|_{x_3=a+h_+} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_-^* \Big|_{x_3=-(a+h_-)} = \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{G}^* \Big|_{x_3=\pm a} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_{\pm}^* \Big|_{x_3=\pm a} &= \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}^* \Big|_{x_3=\pm a}, \\ \mathbf{v}_{\pm} \Big|_{x_3=\pm a} &= \mathbf{v} \Big|_{x_3=\pm a}. \end{aligned}$$

Будем полагать, что на краях плиты ( $x_1 = 0, b_1$ ;  $x_2 = 0, b_2$ ) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линейризованным граничным условиям:

1) для пористой основы плиты ( $|x_3| \leq a$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_2 \Big|_{x_1=0, b_1} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_3 \Big|_{x_1=0, b_1} = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} \Big|_{x_1=0, b_1} = 0, \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{e}_1 \Big|_{x_1=0, b_1} &= \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{x_1=0, b_1} = \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{x_1=0, b_1} = 0, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_1 \Big|_{x_2=0, b_2} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{e}_3 \Big|_{x_2=0, b_2} = \\ &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v} \Big|_{x_2=0, b_2} = 0, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{e}_2 \Big|_{x_2=0, b_2} &= \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{x_2=0, b_2} = \\ &= \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} \Big|_{x_2=0, b_2} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

2) для верхнего и нижнего покрытий ( $a \leq x_3 \leq a + h_+$ ,  $-a - h_- \leq x_3 \leq -a$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}_\pm^\cdot \cdot \mathbf{e}_2 |_{x_1=0, b_1} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}_\pm^\cdot \cdot \mathbf{e}_3 |_{x_1=0, b_1} = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_\pm |_{x_1=0, b_1} = 0, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}_\pm^\cdot \cdot \mathbf{e}_1 |_{x_2=0, b_2} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}_\pm^\cdot \cdot \mathbf{e}_3 |_{x_2=0, b_2} = \\ &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_\pm |_{x_2=0, b_2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Запишем представление векторов добавочных перемещений  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}_\pm$  и добавочного поворота  $\boldsymbol{\omega}$  в базисе декартовых координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_\pm &= v_1^\pm \mathbf{e}_1 + v_2^\pm \mathbf{e}_2 + v_3^\pm \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\omega} &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражения (14), (17), описывающие возмущенное состояние равновесия пористой трехслойной плиты, представляют собой систему 12 уравнений в частных производных относительно 12 неизвестных функций  $v_1, v_2, v_3, v_1^\pm, v_2^\pm, v_3^\pm, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Подстановка

$$\begin{aligned} v_1 &= V_1(x_3) \sin \beta_1 x_1 \cos \beta_2 x_2, \\ v_2 &= V_2(x_3) \cos \beta_1 x_1 \sin \beta_2 x_2, \\ v_3 &= V_3(x_3) \cos \beta_1 x_1 \cos \beta_2 x_2, \\ v_1^\pm &= V_1^\pm(x_3) \sin \beta_1 x_1 \cos \beta_2 x_2, \\ v_2^\pm &= V_2^\pm(x_3) \cos \beta_1 x_1 \sin \beta_2 x_2, \\ v_3^\pm &= V_3^\pm(x_3) \cos \beta_1 x_1 \cos \beta_2 x_2, \\ \omega_1 &= \Omega_1(x_3) \cos \beta_1 x_1 \sin \beta_2 x_2, \\ \omega_2 &= \Omega_2(x_3) \sin \beta_1 x_1 \cos \beta_2 x_2, \\ \omega_3 &= \Omega_3(x_3) \sin \beta_1 x_1 \sin \beta_2 x_2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi m_1}{b_1}, \quad \beta_2 = \frac{\pi m_2}{b_2}, \quad m_{1,2} = 1, 2, \dots,$$

приводит к отделению переменных  $x_1, x_2$  в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линейризованным граничным условиям (20), (21) на краях плиты.

С учетом соотношений (3)–(6), (9), (15), (16), (18), (22), (23) уравнения нейтрального равновесия (14), (17) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mu + \kappa) V_1'' - ((\lambda + \mu) \beta_1^2 + (\mu + \kappa) (\beta_1^2 + \beta_2^2)) V_1 - \\ - (\lambda + \mu) \beta_1 \beta_2 V_2 - (\lambda + \mu) \beta_1 V_3' + B_2 \Omega_2' - B_3 \beta_2 \Omega_3 = 0, \\ (\mu + \kappa) V_2'' - ((\lambda + \mu) \beta_2^2 + (\mu + \kappa) (\beta_1^2 + \beta_2^2)) V_2 - \\ - (\lambda + \mu) \beta_1 \beta_2 V_1 - (\lambda + \mu) \beta_2 V_3' + B_1 \Omega_1' + B_3 \beta_1 \Omega_3 = 0, \\ (\lambda + \chi) V_3'' - (\mu + \kappa) (\beta_1^2 + \beta_2^2) V_3 + (\lambda + \mu) \beta_1 V_1' + \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} + (\lambda + \mu) \beta_2 V_2' + B_1 \beta_2 \Omega_1 - B_2 \beta_1 \Omega_2 = 0, \\ \gamma_2 \Omega_1'' - ((\gamma_1 + \gamma_3) \beta_1^2 + \gamma_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) - B_1 (\alpha_2 + \alpha_3)) \Omega_1 - \\ - (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_1 \beta_2 \Omega_2 + (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_1 \Omega_3' + \\ + B_1 V_2' + B_1 \beta_2 V_3 = 0, \\ \gamma_2 \Omega_2'' - ((\gamma_1 + \gamma_3) \beta_2^2 + \gamma_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) - B_2 (\alpha_1 + \alpha_3)) \Omega_2 - \\ - (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_1 \beta_2 \Omega_1 + (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_2 \Omega_3' - \\ - B_2 V_1' - B_2 \beta_1 V_3 = 0, \\ (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \Omega_3'' - (\gamma_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) - B_3 (\alpha_1 + \alpha_2)) \Omega_3 - \\ - (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_1 \Omega_1' - (\gamma_1 + \gamma_3) \beta_2 \Omega_2' - \\ - B_3 \beta_2 V_1 + B_3 \beta_1 V_2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\mu_+ + B_2^+) (V_1^+)' - ((\lambda_+ + 2\mu_+) \beta_1^2 + (2\mu_+ + B_3^+) \beta_2^2) V_1^+ - \\ - (\lambda_+ - B_3^+) \beta_1 \beta_2 V_2^+ - (\lambda_+ - B_2^+) \beta_1 (V_3^+)' = 0, \\ (2\mu_+ + B_1^+) (V_2^+)' - ((\lambda_+ + 2\mu_+) \beta_2^2 + (2\mu_+ + B_3^+) \beta_1^2) V_2^+ - \\ - (\lambda_+ - B_3^+) \beta_1 \beta_2 V_1^+ - (\lambda_+ - B_1^+) \beta_2 (V_3^+)' = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_+ + 2\mu) (V_3^+)' - ((2\mu_+ + B_2^+) \beta_1^2 + (2\mu_+ + B_1^+) \beta_2^2) V_3^+ + \\ + (\lambda_+ - B_2^+) \beta_1 (V_1^+)' + (\lambda_+ - B_1^+) \beta_2 (V_2^+)' = 0; \\ (2\mu_- + B_2^-) (V_1^-)' - ((\lambda_- + 2\mu_-) \beta_1^2 + (2\mu_- + B_3^-) \beta_2^2) V_1^- - \\ - (\lambda_- - B_3^-) \beta_1 \beta_2 V_2^- - (\lambda_- - B_2^-) \beta_1 (V_3^-)' = 0, \\ (2\mu_- + B_1^-) (V_2^-)' - ((\lambda_- + 2\mu_-) \beta_2^2 + (2\mu_- + B_3^-) \beta_1^2) V_2^- - \\ - (\lambda_- - B_3^-) \beta_1 \beta_2 V_1^- - (\lambda_- - B_1^-) \beta_2 (V_3^-)' = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_- + 2\mu) (V_3^-)' - ((2\mu_- + B_2^-) \beta_1^2 + (2\mu_- + B_1^-) \beta_2^2) V_3^- + \\ + (\lambda_- - B_2^-) \beta_1 (V_1^-)' + (\lambda_- - B_1^-) \beta_2 (V_2^-)' = 0. \end{aligned}$$

Для сокращения записи здесь использованы следующие обозначения:

$$B_1 = \lambda(\alpha_1 - 3) + (\lambda + \mu)(\alpha_2 + \alpha_3) - \chi,$$

$$B_2 = \lambda(\alpha_2 - 3) + (\lambda + \mu)(\alpha_1 + \alpha_3) - \chi,$$

$$B_3 = \lambda(\alpha_3 - 3) + (\lambda + \mu)(\alpha_1 + \alpha_2) - \chi,$$

$$B_1^\pm = \frac{\lambda_\pm s_\pm - 2\mu_\pm}{\alpha_2 + \alpha_3^\pm}, \quad B_2^\pm = \frac{\lambda_\pm s_\pm - 2\mu_\pm}{\alpha_1 + \alpha_3^\pm},$$

$$B_3^\pm = \frac{\lambda_\pm s_\pm - 2\mu_\pm}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Выражения для линейризованных граничных условий (19) примут следующий вид:

1) при  $x_3 = a + h_+$

$$\begin{aligned} (2\mu_+ + B_2^+)(V_1^+)' + \beta_1 B_2^+ V_3^+ &= 0, \\ (2\mu_+ + B_1^+)(V_2^+)' + \beta_2 B_1^+ V_3^+ &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\lambda_+ \beta_1 V_1^+ + \lambda_+ \beta_2 V_2^+ + (\lambda_+ + 2\mu_+)(V_3^+)' = 0;$$

2) при  $x_3 = a$ :

$$\begin{aligned} (2\mu_+ + B_2^+)(V_1^+)' + \beta_1 B_2^+ V_3^+ - \\ - (\mu + \kappa) V_1' + \beta_1 \mu V_3 - B_2 \Omega_2 &= 0, \\ (2\mu_+ + B_1^+)(V_2^+)' + \beta_2 B_1^+ V_3^+ - \\ - (\mu + \kappa) V_2' + \beta_2 \mu V_3 + B_1 \Omega_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_+ \beta_1 V_1^+ + \lambda_+ \beta_2 V_2^+ + (\lambda_+ + 2\mu_+)(V_3^+)' - \lambda \beta_1 V_1 - \quad (28)$$

$$- \lambda \beta_2 V_2 - (\lambda + \chi) V_3' = 0,$$

$$\gamma_2 \Omega_1' + \gamma_3 \beta_1 \Omega_3 = 0, \quad \gamma_2 \Omega_2' + \gamma_3 \beta_2 \Omega_3 = 0,$$

$$\gamma_1 \beta_1 \Omega_1 + \gamma_1 \beta_2 \Omega_2 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \Omega_3' = 0,$$

$$V_1 - V_1^+ = 0, \quad V_2 - V_2^+ = 0, \quad V_3 - V_3^+ = 0;$$

3) при  $x_3 = -a$

$$\begin{aligned} (2\mu_- + B_2^-)(V_1^-)' + \beta_1 B_2^- V_3^- - (\mu + \kappa) V_1' + \\ + \beta_1 \mu V_3 - B_2 \Omega_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\mu_- + B_1^-)(V_2^-)' + \beta_2 B_1^- V_3^- - (\mu + \kappa) V_2' + \\ + \beta_2 \mu V_3 + B_1 \Omega_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_- \beta_1 V_1^- + \lambda_- \beta_2 V_2^- + (\lambda_- + 2\mu_-)(V_3^-)' - \lambda \beta_1 V_1 - \quad (29)$$

$$- \lambda \beta_2 V_2 - (\lambda + \chi) V_3' = 0,$$

$$\gamma_2 \Omega_1' + \gamma_3 \beta_1 \Omega_3 = 0, \quad \gamma_2 \Omega_2' + \gamma_3 \beta_2 \Omega_3 = 0,$$

$$\gamma_1 \beta_1 \Omega_1 + \gamma_1 \beta_2 \Omega_2 - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \Omega_3' = 0,$$

$$V_1 - V_1^- = 0, \quad V_2 - V_2^- = 0, \quad V_3 - V_3^- = 0;$$

4) при  $x_3 = -a - h_-$ :

$$\begin{aligned} (2\mu_- + B_2^-)(V_1^-)' + \beta_1 B_2^- V_3^- &= 0, \\ (2\mu_- + B_1^-)(V_2^-)' + \beta_2 B_1^- V_3^- &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\lambda_- \beta_1 V_1^- + \lambda_- \beta_2 V_2^- + (\lambda_- + 2\mu_-)(V_3^-)' = 0.$$

Таким образом, исследование устойчивости трехслойной плиты сводится к решению линейной однородной краевой задачи (24)–(30) для системы 12 обыкновенных дифференциальных уравнений.

### СИММЕТРИЧНАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ ПЛИТА

Легко показать, что при одинаковых верхнем и нижнем покрытиях ( $h_+ = h_-$ ,  $\lambda_+ = \lambda_-$ ,  $\mu_+ = \mu_-$ ) краевая задача (24)–(30) имеет два независимых класса решений [12]. **Первый класс** образован решениями, для которых прогиб плиты является нечетной функцией координаты  $x_3$  (симметричные формы потери устойчивости):

$$0 \leq x_3 \leq a: \begin{cases} V_1(x_3) = V_1(-x_3), \\ V_2(x_3) = V_2(-x_3), \\ V_3(x_3) = -V_3(-x_3), \\ \Omega_1(x_3) = -\Omega_1(-x_3), \\ \Omega_2(x_3) = -\Omega_2(-x_3), \\ \Omega_3(x_3) = \Omega_3(-x_3); \end{cases}$$

$$a \leq x_3 \leq \frac{H}{2}: \begin{cases} V_1^+(x_3) = V_1^+(-x_3), \\ V_2^+(x_3) = V_2^+(-x_3), \\ V_3^+(x_3) = -V_3^+(-x_3). \end{cases}$$

Для решений **второго класса**, наоборот, прогиб – четная функция (изгибные формы потери устойчивости):

$$0 \leq x_3 \leq a: \begin{cases} V_1(x_3) = -V_1(-x_3), \\ V_2(x_3) = -V_2(-x_3), \\ V_3(x_3) = V_3(-x_3), \\ \Omega_1(x_3) = \Omega_1(-x_3), \\ \Omega_2(x_3) = \Omega_2(-x_3), \\ \Omega_3(x_3) = -\Omega_3(-x_3); \end{cases}$$

$$a \leq x_3 \leq \frac{H}{2}: \begin{cases} V_1^+(x_3) = -V_1^+(-x_3), \\ V_2^+(x_3) = -V_2^+(-x_3), \\ V_3^+(x_3) = V_3^+(-x_3). \end{cases}$$

Благодаря этому свойству краевой задачи (24)–(30), при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть лишь верхнюю половину трехслойной плиты ( $0 \leq x_3 \leq H/2$ ). Граничные условия при  $x_3 = 0$  следуют из четности и нечетности функций  $V_1, V_2, V_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ :

а) для **первого класса** решений

$$\begin{aligned} V_1'(0) = V_2'(0) = V_3(0) &= 0, \\ \Omega_1(0) = \Omega_2(0) = \Omega_3'(0) &= 0; \end{aligned} \quad (31)$$

б) для **второго класса** решений

$$\begin{aligned} V_1(0) = V_2(0) = V_3'(0) = 0, \\ \Omega_1'(0) = \Omega_2'(0) = \Omega_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, в случае одинаковых верхнего и нижнего покрытий исследование устойчивости трехслойной плиты сводится к решению двух линейных однородных краевых задач – (24), (25), (27), (28), (31) и (24), (25), (27), (28), (32) – для системы девяти обыкновенных дифференциальных уравнений.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера проведем анализ устойчивости для случая квадратной плиты ( $b_1 = b_2$ ) с одинаковыми верхним и нижним покрытиями ( $h_+ = h_-$ ,  $\lambda_+ = \lambda_-$ ,  $\mu_+ = \mu_-$ ). Будем полагать, что пористая основа плиты выполнена из плотного пенополиуретана [11, 13, 14]

$$\begin{aligned} \lambda &= 79,73 \cdot 10^7 \text{ Па}, & \mu &= 99,67 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \kappa &= 86,67 \cdot 10^5 \text{ Па}, & \gamma_1 &= -26,65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, \\ \gamma_2 &= 45,3 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, & \gamma_3 &= 34,65 \text{ Па} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

Рассмотрим два вида покрытий: более жесткие металлические покрытия из алюминия

$$\lambda_{\pm} = 61,9 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \mu_{\pm} = 26,2 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

и менее жесткие пластиковые покрытия из поликарбоната

$$\lambda_{\pm} = 2,3 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \mu_{\pm} = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Решая линеаризованные краевые задачи (24), (25), (27), (28), (31) и (24), (25), (27), (28), (32) численно [13; 14], найдем два семейства критических кривых, соответствующих симметричным и изгиб-

ным модам выпучивания трехслойной квадратной плиты. На основании анализа этих семейств построим области устойчивости в плоскости параметров нагружения, которыми являются коэффициенты сжатия  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вдоль координатных осей  $x_1$  и  $x_2$ . Для удобства будем использовать следующие безразмерные параметры:

$$\delta_1 = \alpha_1 - 1, \quad \delta_2 = \alpha_2 - 1, \quad \tilde{b} = \frac{b_1}{l_b}, \quad \tilde{h} = \frac{h_+}{H},$$

где  $l_b = \sqrt{\frac{\gamma_2}{2(2\mu + \kappa)}}$  – характерная длина при изгибе для плотного пенополиуретана [11]. Отношение толщины недеформированной квадратной плиты к ее стороне для всех представленных результатов равно 20 ( $b_1 = 20H$ ).

На рисунках 1 и 2 для плит различных размеров ( $\tilde{b} = 40, \tilde{b} = 80, \tilde{b} = 200$ ) представлены области устойчивости в случае тонких верхнего и нижнего покрытий (толщина покрытий составляет менее 2% от толщины недеформированной плиты). На рисунке 1 приведены результаты в случае алюминиевых покрытий, а на рисунке 2 – в случае поликарбонатных покрытий. Закрашены области неустойчивости. Для сравнения на графиках также построена граница области устойчивости (пунктирная кривая), полученная при исследовании выпучивания трехслойной плиты без учета влияния моментных напряжений, т.е. когда поведение пористой основы описывается моделью физически линейного материала (8) с константами Ляме  $\lambda$ ,  $\mu$ . Данная пунктирная кривая в целом мало отличается от границы области устойчивости для  $\tilde{b} = 200$ , особенно в случае алюминиевого покрытия (см. рис. 1).

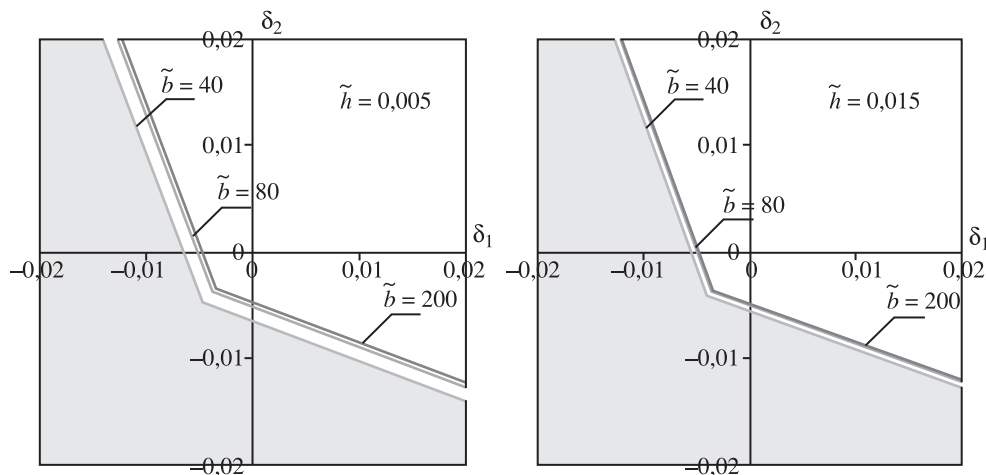


Рис. 1. Области устойчивости в случае тонких алюминиевых покрытий

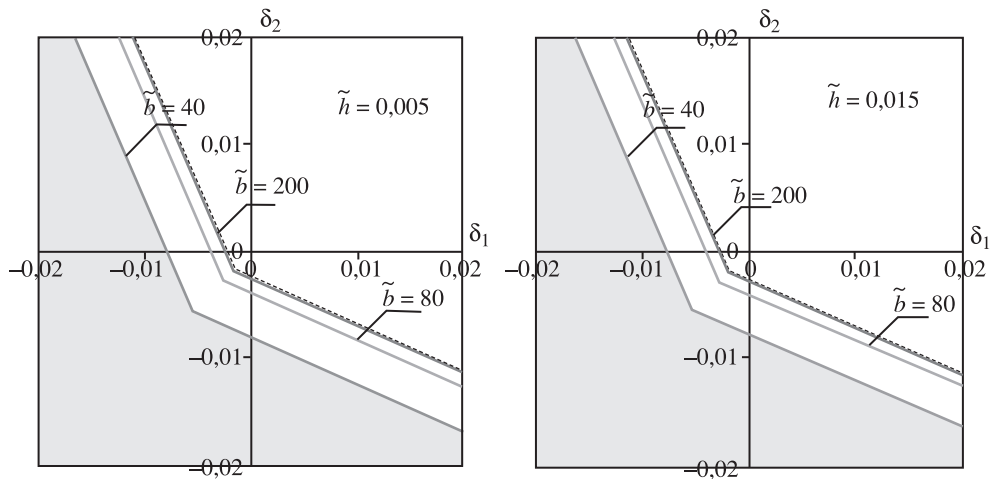


Рис. 2. Области устойчивости в случае тонких поликарбонатных покрытий

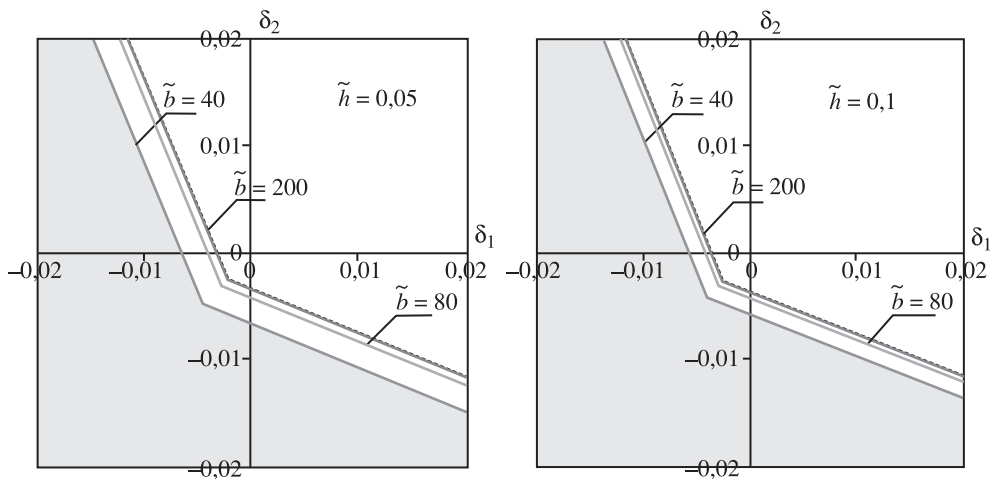
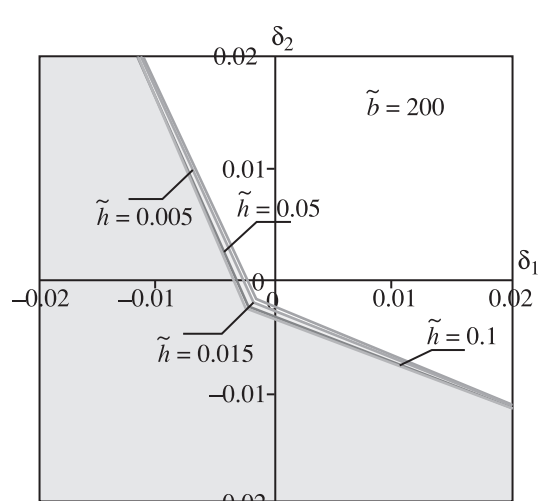
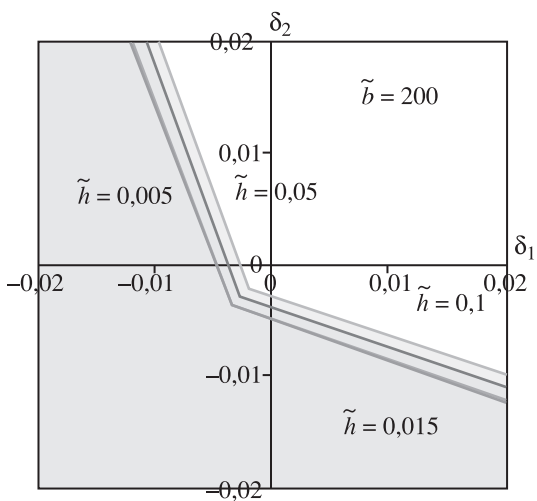
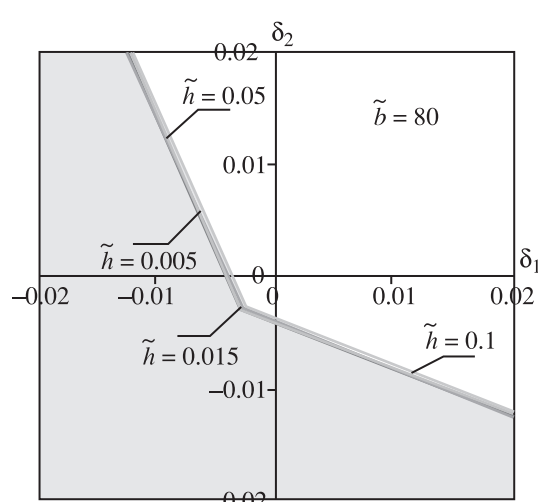
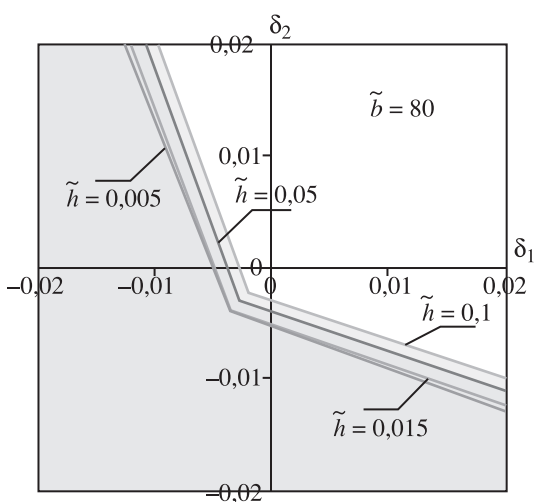
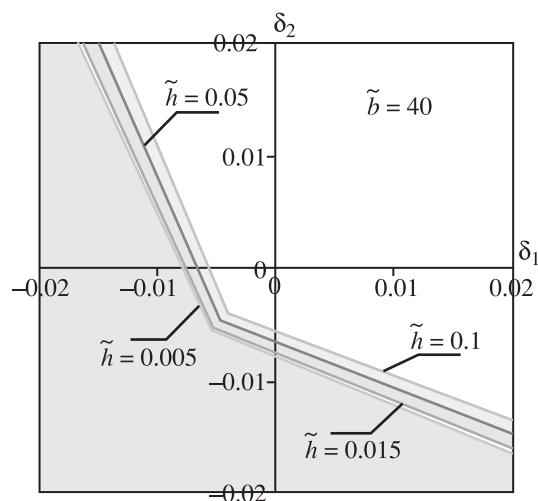
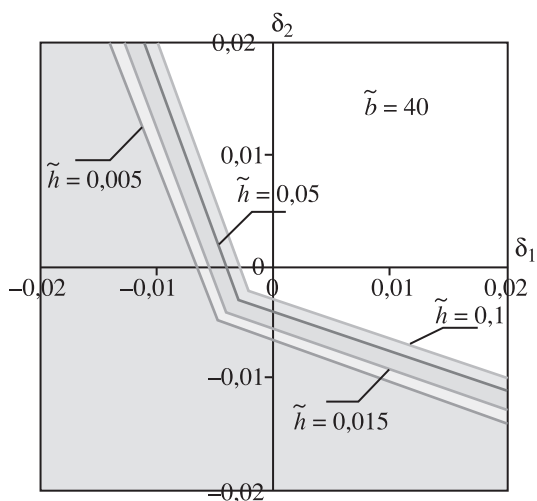


Рис. 3. Области устойчивости в случае поликарбонатных покрытий средней толщины

Из графиков хорошо видно, что при двухосном нагружении устойчивость трехслойной плиты с пористой основой заметно зависит от ее размеров: чем плита меньше, тем деформация стабильнее. Согласно полученным результатам, степень влияния размеров на бифуркацию равновесия существенно зависит от жесткости и толщины верхнего и нижнего покрытий. Установлено, что чем толще и жестче покрытия, тем менее выражен описанный выше размерный эффект. Это, в частности, видно из графиков, построенных на рисунке 3, для плит с поликарбонатными покрытиями средней толщины (толщина покрытий составляет от 2 до 10% от толщины недеформированной плиты). В случае алюминиевых покрытий средней толщины размерный эффект слабо выражен и области устойчивости, построенные для плит различных размеров, почти неразличимы.

В ходе анализа устойчивости плиты с пористой основой установлено, что характер влияния толщины покрытий на бифуркацию равновесия существенно зависит от размеров плиты и вида двухосного нагружения. Согласно полученным результатам, для средних и больших плит ( $\tilde{b} \geq 70$ ) при двухосном сжатии всегда можно найти некоторую оптимальную толщину покрытий, при которой плита наиболее устойчива. В то же время, если в направлении одной оси действует растягивающая нагрузка, а в направлении другой – сжимающая, однозначно определить оптимальную толщину покрытий не удастся, так как она зависит от степени растяжения–сжатия плиты. В случае двухосного растяжения потеря устойчивости для рассмотренных материалов вообще не обнаружена. Все сказанное выше отражено на графиках, представленных на рисунках 4



**Рис. 4.** Области устойчивости при различных размерах  $\tilde{b}$  плиты с алюминиевыми покрытиями

**Рис. 5.** Области устойчивости при различных размерах  $\tilde{b}$  плиты с поликарбонатными покрытиями

и 5, для плит с алюминиевыми и поликарбонатными покрытиями соответственно. На этих рисунках хорошо видно, что для плит малых размеров ( $\tilde{b} < 70$ ) при любых видах двухосного нагружения наиболее

устойчивой будет плита вообще без покрытий. Это обусловлено стабилизирующим влиянием моментных напряжений, которое при малых размерах тела становится очень значительным.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода проведен анализ устойчивости упругой прямоугольной трехслойной плиты с пористой основой, находящейся под действием двухосного нагружения. Для модели физически линейного материала получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение трехслойной плиты в возмущенном состоянии. С использованием специальной подстановки сформулированы линеаризованные краевые задачи как для общего случая, так и для случая одинаковых верхнего и нижнего покрытий. В общем случае исследование устойчивости сведено к решению линейной однородной краевой задачи (24)–(30) для системы 12 обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае одинаковых верхнего и нижнего покрытий исследование устойчивости трехслойной плиты удалось свести к решению двух линейных однородных краевых задач – (24), (25), (27), (28), (31) и (24), (25), (27), (28), (32) – для системы девяти обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера проведен численный анализ устойчивости для случая квадратной плиты с одинаковыми верхним и нижним покрытиями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-01152-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 242 p.
2. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids. New York: Springer, 1999. 348 p.
3. *Kafadar C.B., Eringen A.C.* Micropolar media – I. The classical theory // International Journal of Engineering Science. 1971. Vol. 9. P. 271–305.
4. *Maugin G.A.* On the structure of the theory of polar elasticity // Philosophical Transactions of Royal Society London A356. 1998. P. 1367–1395.
5. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.
6. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer, 1997. 205 p.
8. *Nikitin E., Zubov L.M.* Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // Journal of Elasticity. 1998. Vol. 51. P. 1–22.
9. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.* On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46. P. 774–787.
10. *Еремеев В.А., Zubov Л.М.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.
11. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. H. Muhlhaus, J. Wiley. N.Y., 1995. P. 1–22.
12. *Шейдаков Д.Н.* Устойчивость прямоугольной плиты при двухосном растяжении // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 4. С. 94–103.
13. *Sheydakov D.N.* Buckling of elastic composite rods of micropolar material subjected to combined loads // Advanced Structured Materials. Vol. 7. Mechanics of Generalized Continua. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev (eds). Berlin: Springer, 2011. P. 255–271.
14. *Шейдаков Д.Н., Лыжов В.А., Михайлова И.Б.* Потеря устойчивости сжатого пористого стержня с однородным покрытием // Вестник Южного научного центра РАН. 2011. Т. 7. № 1. С. 5–12.

## STABILITY OF A RECTANGULAR SANDWICH PLATE WITH A POROUS CORE

D.N. Sheydakov, I.B. Mikhailova, A.V. Sokolov

Within a bifurcation approach, the stability analysis has been carried out for an elastic rectangular sandwich plate with a porous core subjected to biaxial loading. A system of linearized equilibrium equations has been derived for a model of a physically linear material, which describes the behaviour of a sandwich plate in the perturbed state. As an example, the case of a square plate with equal upper and lower coatings has been discussed in detail. For a few specific materials, the stability regions are constructed in a plane of the loading parameters. The influence of coatings' properties and the size of a plate on the loss of stability has been analyzed.

**Key words:** nonlinear elasticity, porosity, micropolar medium, stability of deformable bodies, sandwich plate, coating influence.

## REFERENCES

1. Cosserat E., Cosserat F. 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A, Hermann et Fils: 242 p. (In French).
2. Eringen A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids*. N.-Y., Springer: 348 p.
3. Kafadar C.B., Eringen A.C. 1971. Micropolar media – I. The classical theory. *International Journal of Engineering Science*. 9: 271–305.
4. Maugin G.A. 1998. On the structure of the theory of polar elasticity. *Philosophical Transactions of Royal Society London A*. 356: 1367–1395.
5. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(5): 85–112.
6. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
7. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin, Springer: 205 p.
8. Nikitin E., Zubov L.M. 1998. Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress. *Journal of Elasticity*. 51: 1–22.
9. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. 2009. On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 46: 774–787.
10. Eremeyev V.A., Zubov L.M. 1994. On the stability of elastic bodies with couple-stresses. *Mechanics of Solids*. 29(3): 172–181.
11. Lakes R. 1995. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: *Continuum models for materials with micro-structure*. (Ed. H. Muhlhaus). N.-Y., Wiley: 1–22.
12. Sheidakov D.N. 2007. Stability of a rectangular plate under biaxial tension. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(4): 547–555.
13. Sheidakov D.N. 2011. Buckling of elastic composite rods of micropolar material subjected to combined loads. In: *Advanced Structured Materials. Vol. 7. Mechanics of Generalized Continua*. (Eds. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev). Berlin, Springer-Verlag: 255–271.
14. Sheidakov D.N., Lyzhov V.A., Mihailova I.B. 2011. [Buckling of compressed porous rod with solid coating]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 7(1): 5–12. (In Russian).