

На правах рукописи



Телятников Илья Сергеевич

**ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ
СТАТИЧЕСКОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ЛИТОСФЕРНЫХ
СТРУКТУР НА РАЗЛОМАХ**

**Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твёрдого тела**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

**Краснодар
2014**

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «**Кубанский государственный университет**»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Бабешко Ольга Мефодиевна

Официальные оппоненты: **Индейцев Дмитрий Анатольевич**
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор, директор ФГБУ Н «Институт проблем машиноведения Российской академии наук»

Дунаев Владислав Игоревич,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры производства строительных конструкций и строительной механики
ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Защита состоится «26» февраля 2015 г. в 14⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д 212.101.07 при ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, ауд. 231.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет» по адресу: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, <http://www.kubsu.ru/ru/science/dissertations>

Автореферат разослан «27» декабря 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  Зарецкая Марина Валерьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Землетрясения – грозные природные явления, способные повлечь за собой масштабные катастрофы и нанести серьезный материальный ущерб. В силу опасных последствий сейсмических событий задачи разработки теоретических основ новых геофизических технологий, систем мониторинга и прогнозирования сейсмической активности относят к фундаментальным научным проблемам настоящего времени.

Значительный вклад в исследование проблем сейсмических процессов в земной коре внесли В.В. Адушкин, А.О. Глико, Л. В. Канторович, Б.В. Костров, С.В. Медведев, В.Н. Родионов, М.А. Садовский, В.И. Уломов, Ю.К. Чернов. Большое значение имеют результаты К. Аки, А.С. Алексеева, В.В. Кузнецова, В. Ф. Писаренко, П. Ричардса, В. Н. Родионова, У. Ф. Саваренского, А. Ben-Menahem, J. D. Byerlee, J. H. Dieterich, С. Marone, J. R. Rice, С.Н. Scholz. В области изучения структуры литосферы и динамики земной коры, развития методов моделирования и мониторинга сейсмоопасных участков важные результаты принадлежат Е. В. Гальперину, Г. А. Гамбурцеву, А. В. Николаеву, Ю. В. Ризниченко, Л. Е. Собисевичу, А. Л. Собисевичу.

В России и ряде других стран реализуются крупные программы по исследованию вопросов изменения природной среды, в которых особое место отведено изучению сейсмических процессов. Существуют разнообразные модели подготовки и развития сейсмических событий, получены значительные результаты в экспериментальных исследованиях строения геофизической среды. Однако задача достоверного прогноза землетрясений чрезвычайно сложна и по-прежнему остается одной из насущных проблем человечества.

В Кубанском государственном университете совместно с учеными Южного научного центра РАН проводятся исследования, направленные на разработку новых методов оценки региональной сейсмичности. Основу предлагаемых подходов составляет анализ напряженно-деформированного состояния литосферных структур с позиции механики деформируемого твердого тела. Разработанная концепция оценки сейсмичности территорий базируется на определении зон концентрации напряжений,

которые могут быть признаком возможного сейсмического события.

Наряду с сейсмологией в таких отраслях, как машиностроение, материаловедение, дефектоскопия, возникают проблемы прочности, имеющие ту же математическую основу, что и развиваемая в Кубанском госуниверситете концепция механического прогноза сейсмичности.

Большой вклад в развитие методов исследования статических и динамических задач теории упругости внесли: Ю.А. Амензаде, В.М. Александров, В.А. Бабешко, В.М. Бабич, А.В. Белоконь, Н.М. Бородачев, И.Н. Векуа, И.И. Ворович, В.Т. Гринченко, И.М. Дунаев, В.Д. Купрадзе, А.И. Лурье, М.Д. Мартыненко, В.И. Моссаковский, Н.И. Мусхелишвили, И.А. Молотков, В. Новацкий, В.В. Новожилов, Г.Я. Попов, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Б.Л. Пелех, В.Л. Рвачев, В.М. Сеймов, А.И. Слепян, Л.А. Толоконников, А. Ф. Улитко, Я. С. Уфлянд, Ю. А. Устинов, М. И. Чебаков, Д. И. Шерман, J. D. Achenbach, A. Ben-Menahem, W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, M.J.P. Musgrave, Ch. Zhang и др.

В настоящее время активно ведутся исследования и уже получены интересные результаты в рамках моделей, основанных на положении о слоисто-блочном строении литосферы, обоснованном в работах академика М. А. Садовского, выводы которого способствовали формированию нового подхода к исследованию проблемы зарождения и развития сейсмических событий. В рамках концепции деформируемой среды литосферные плиты могут моделироваться трехмерными протяженными или неограниченными блочно-слоистыми структурами, подвергающимися воздействиям различной природы. В масштабе строения Земли их можно рассматривать в качестве покрытий относительно малой толщины. В свою очередь проблема геодинамического взаимодействия блочных структур как разделенных контактирующих деформируемых пластин на упругом основании может быть изучена методами теории смешанных контактных задач.

Исследования задач для сред с покрытиями проводили В.М. Александров, С.А. Амбарцумян, Б.Д. Аннин, И.Н. Векуа, А.С. Вольмир, И.И. Ворович, А.Л. Гольденвейзер, И.Г. Горячева, Р.В. Гольдштейн, А.И. Лурье, С.М. Мхитарян, Б.Л. Пелех,

Г.И. Петрашень, В.С. Саркисян, С.П. Тимошенко и др. Результаты изучения контактных задач приведены в работах А.С. Алексева, И.В. Ананьева, В.А. Бабешко, В.Г. Баженова, А.К. Беляева, Н.М. Бородачева, В.Г. Буряка, А.О. Ватульяна, Е.В. Глушкова, Н.В. Глушковой, В.Т. Головчана, В.Т. Гринченко, А.Н. Гузя, В.И. Ерофеева, В.В. Зозули, Л.А. Игумнова, М.А. Ильгамова, Д.А. Индейцева, В.В. Калинин, В.И. Колесникова, Л.И. Коссовича, А.М. Кривцова, В.Д. Купрадзе, А.В. Манжирова, В.П. Матвиенко, Н.Ф. Морозова, А.В. Наседкина, О.Д. Пряхиной, О.А. Савицкого, В.М. Сеймова, А.В. Смирновой, Т.В. Суворовой, Д.В. Тарлаковского, Ю.Г. Яновского и других ученых.

Отличительная черта глобальной сейсмичности – выраженная упорядоченность по местоположению всех сейсмоактивных регионов, обусловленная взаимодействием литосферных плит. Упорядоченные изменения сейсмической активности, наблюдаемые в тектонически опасных зонах, указывают на явления, связанные с возникновением резонансных взаимодействий, которые могут быть вызваны как взаимным влиянием деформационных волн, распространяющихся вдоль конвергентных границ, так и искусственными возмущениями. Однако данные сейсмомониторинга подтверждают возможность землетрясений и на территориях, удаленных от глобальных разломов, что диктует необходимость исследования особенностей распространения возмущений через межблочные границы литосферных структур сравнительно небольшой мощности.

Положения успешно развиваемой в КубГУ механической концепции прогноза сейсмичности требуют для своей реализации глубокого математического анализа протекающих при взаимодействии литосферных плит сложных процессов, для исследования которых привлечен математический аппарат высокого уровня – топология, факторизационные методы, внешний анализ, метод блочного элемента и другие современные подходы. В работах В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимовой, М.В. Зарецкой большое внимание уделено математическому описанию реальных моделей строения геофизической среды блочными структурами. В исследованиях В.В. Лозового и А.С. Мухина рассмотрены вопросы диагностики разломов и дефектов литосферных структур. В работах М.Н. Колесникова предпринята попытка исследования

особенностей прохождения сейсмических волн через разломы, рассмотрена динамическая плоская задача о взаимодействии литосферных плит на деформируемом основании под действием вертикальной гармонической нагрузки, приложенной к одной из плит. Однако следует отметить, что нарастание сейсмичности, вызванное изменением напряженно-деформированного состояния литосферных структур, происходит медленно. Это подтверждается данными высокоточных GPS-приемников. Смещения плит за неделю достигают всего нескольких миллиметров, что свидетельствует о статическом взаимодействии в зоне контакта. На рисунке 1 представлены вертикальные смещения GPS-пункта Сочи.

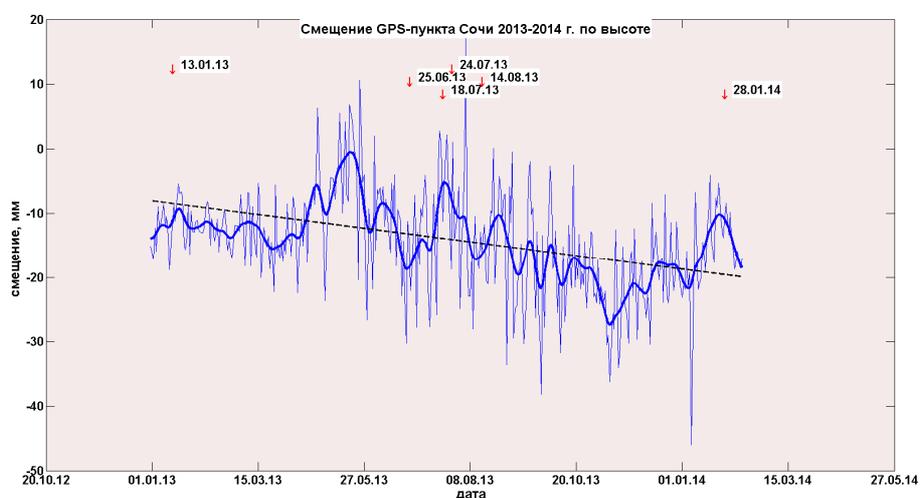


Рисунок 1

В настоящей диссертации построены элементы теории статического взаимодействия литосферных плит в пространственном варианте.

Диссертационная работа посвящена исследованию взаимодействия литосферных плит, контактирующих вдоль прямолинейных разломов, путем их моделирования двумерными пластинами на трехмерном упругом основании, разработке методов определения характеристик напряженно-деформированного состояния структур с составными покрытиями при вибрационном и статическом воздействии, изучению влияния характера взаимодействия на разломах и свойств элементов структуры на развитие деформационного процесса.

Актуальность диссертационного исследования определяется необходимостью разработки механико-математических методов исследования взаимодействия литосферных структур в облас-

тях разломов (основных сейсмогенерирующих зонах) в условиях вибрационных и статических воздействий.

Целью диссертационного исследования является:

- разработка на основе факторизационных и топологических подходов нового метода исследования и решения граничных задач, имеющих широкий спектр применения – от оценки напряженно-деформированного состояния взаимодействующих разнотипных литосферных плит, расположенных на деформируемом основании, до изучения свойств деформируемых тел с покрытиями, содержащими сложно обнаруживаемые вертикальные трещины;
- поиск путей преодоления трудностей использования других подходов для изучения медленного движения литосферных плит или статического состояния тел с дефектными покрытиями;
- исследование напряженно-деформированного состояния медленного или статического взаимодействия литосферных структур, находящихся на деформируемом основании и контактирующих вдоль прямолинейного разлома.

Для достижения цели были решены следующие **задачи**:

- модификация метода собственных функций с применением метода блочного элемента для построения решения пространственной задачи об установившихся колебаниях для двух разнотипных контактирующих пластин на поверхности упругого основания;
- разработка метода исследования граничных задач статического взаимодействия контактирующих между собой и деформируемым основанием пластин, моделирующих литосферные плиты;
- разработка подходов к решению задач вибрации при переходе к статическому случаю для убывающей частоты колебаний;
- построение решения трехмерной задачи об установившихся колебаниях составного покрытия с прямолинейным разломом на деформируемой подложке под действием сосредоточенной вертикальной гармонической нагрузки;
- построение решения статической пространственной задачи для двух разнотипных контактирующих пластин, граничащих вдоль прямой, на поверхности упругого основания;
- исследование взаимодействия контактирующих литосферных плит при прохождении сигнала через межблоковые разломы в случае уменьшения частоты колебаний.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались топологические и факторизационные методы, метод блочного элемента, дифференциальный и интегральный методы факторизации в теории граничных задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечиваются корректностью постановок рассматриваемых граничных задач, применением строгих математических методов, а также сравнением результатов с полученными иными методами известными результатами других авторов.

Научную новизну диссертации определяют следующие основные результаты, полученные автором:

- новый факторизационный метод исследования задач о взаимодействии между собой и с деформируемым основанием разнотипных пластин Кирхгофа;

- новый эффективный метод исследования трехмерных смешанных граничных задач, моделирующих статическое напряженно-деформированное состояние взаимодействующих литосферных плит, позволяющий проводить анализ решений при различных условиях в области контакта для прямолинейных разломов;

- построенные новые типы функциональных уравнений и представленный полный комплекс факторизационных методов их решения;

- результаты вычислительных экспериментов для установившихся колебаний деформируемой среды с покрытием в виде полубесконечных пластин, контактирующих вдоль прямолинейного разлома, при разных условиях контакта, а также различных свойствах контактирующих пластин.

Теоретическая значимость и практическая ценность полученных результатов определяются возможностью их применения в различных областях науки и техники.

Предложенные механико-математические методы могут быть применены в сейсмологии и геофизике. Так, сделанные выводы о влиянии характера взаимодействия литосферных плит на прохождение сигнала нашли применение в проектах при оценке сейсмического состояния территории олимпийского

строительства с учетом имеющихся разломов на основе данных о напряжениях и деформациях.

Экспериментальные исследования взаимодействия литосферных структур на разломах и особенностей прохождения сейсмических сигналов через разлом требуют значительных временных и материальных затрат. Полученные теоретические результаты позволяют с применением вибросейсмоисточников тестировать типы разломов литосферных плит, рационально определив программы экспериментов. Кроме того, они могут найти приложения в инженерной практике.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственное задание, проект 2014/75, НИР № 2274 «Построение глобальной модели напряженности Земли для оценки сейсмичности в российских регионах»). Результаты диссертационного исследования использованы при выполнении проектов Федеральной целевой комплексной программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.В37.21.0646 «Развитие новых наукоемких методов мониторинга и прогноза состояния территорий в сейсмоопасных и оползнеопасных зонах» от 20.08.12 г., соглашение № 14.В87.21.0869 «Развитие метода блочных элементов для оценки резонансных свойств тел и конструкций сложного строения» от 06.09.2012 г.), а также проектов, поддержанных грантами РФФИ: 13-08-00196, 13-01-00132, 13-01-96502_р-юг, 13-01-96503_р-юг, 13-01-96504_р-юг, 13-01-96509_р-юг, – что также указывает на актуальность темы и практическую значимость результатов диссертационной работы.

На защиту выносятся:

- 1) новый метод исследования и решения граничных задач о напряженно-деформированном состоянии взаимодействующих разнотипных литосферных плит, расположенных на деформируемом основании, разработанный на основе факторизационных и топологических подходов;
- 2) метод определения характеристик статического напряженно-деформированного состояния деформируемой среды с покрытием, образованным двумя разнотипными протяженными пластинами, контактирующими вдоль прямолинейного разлома;

3) алгоритмы расчета амплитуд перемещений поверхностей пластин покрытия и вычисления ряда базовых параметров, необходимых для исследования широкого круга граничных задач;

4) результаты исследования влияния параметров контактирующих пластин и условий их взаимодействия на прохождение сигнала через разлом.

Апробация работы. Результаты работы представлялись на Международной научной конференции «Современные проблемы механики и математики» (Украина, г. Львов, 2013 г.), Международной молодежной конференции «Механика 2013» (Армения, г. Цахкадзор, 2013 г.), IX Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты» (г. Новосибирск, 2013 г.), Международной научной конференции «Великий русский инженер В.Г. Шухов и его научное наследие» (г. Москва, 2013 г.), XVI Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности и экономике» (г. Санкт-Петербург, 2013 г.), X и XI всероссийских научных конференциях молодых ученых «Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах» (г. Анапа, 2013 г. и 2014 г.), IX и X научных конференциях студентов и аспирантов базовых кафедр Южного научного центра РАН (г. Ростов-на-Дону, 2013 г. и 2014 г.), XIII и XIV объединенных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых факультета компьютерных технологий и прикладной математики КубГУ (г. Краснодар, 2013 г. и 2014 г.), VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014 г.), Международной научно-практической конференции «Природно-ресурсный потенциал, экология и устойчивое развитие регионов России» (г. Пенза, 2014 г.), X Международной конференции NPNJ'2014 по неравновесным процессам в соплах и струях (г. Алушта, 2014 г.), Международной научно-практической конференции «Инновационное развитие современной науки» (г. Уфа, 2014 г.), VIII Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Армения, г. Горис – Степанакерт, 2014 г.).

Публикации. Основное содержание и результаты диссертационных исследований отражены в 19 работах, в том числе 5 публикациях, вышедших в изданиях из перечня, утвержденного ВАК РФ, 1 работа принята к печати. Результаты исследований использованы при получении свидетельства об официальной регистрации программы. В указанных публикациях идеи постановок задач и методы их исследования разрабатывались совместно с научным руководителем О.М. Бабешко, В.А. Бабешко и соавторами.

Объем и структура работы. Диссертация общим объемом 139 страниц содержит: введение, три главы основной части, заключение, список литературы, включающий 142 источника, и три приложения. Работа проиллюстрирована 29 рисунками.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** представлен обзор результатов исследований по теме диссертационной работы, даны обоснование актуальности темы диссертации и общая характеристика работы, сформулированы цель и решаемые в ходе исследования задачи, отмечена научная новизна и практическая ценность полученных результатов, описан вклад автора диссертации в совместных публикациях.

В **первой главе** излагаются теоретические основы используемых подходов и методы, применяемые в диссертационной работе.

В *параграфе 1.1* приведены основные положения факторизации функций и матриц-функций. При решении практических задач зачастую можно ограничиться использованием приближенной факторизации функций, в таких случаях подлежащую факторизации функцию можно аппроксимировать рациональной. В данном параграфе также изложены положения используемой аппроксимации.

Параграф 1.2 посвящен методу факторизации целых и полиномиальных матриц-функций, применяемому при факторизации коэффициентов функциональных уравнений. Предлагаемые подходы к исследованию и решению задач теории упругости требуют факторизации матриц-функций с элементами в виде полиномиальных аналитических функций нескольких комплексных переменных, что определяет потребность получения формул приближенной факторизации таких матриц.

Идея метода Винера – Хопфа послужила развитию целого ряда приближенных методов решения практически важных задач, в том числе рассматриваемых в диссертации задач о взаимодействии протяженных литосферных структур, граничащих по прямолинейным разломам. В *параграфе* 1.3 описана общая схема метода факторизации Винера – Хопфа.

В *параграфе* 1.4 представлен алгоритм дифференциального метода факторизации, применимого единообразно к исследованию граничных задач вне зависимости от типа дифференциальных уравнений. Автором этот метод развивается применительно к пространственным динамическим и статическим задачам о контактном взаимодействии пластин, моделирующих литосферные плиты или треснувшие покрытия.

В *параграфе* 1.5 рассмотрен пример применения топологического метода в граничных задачах для блочной структуры с разной размерностью блоков. В качестве модели разноразмерной блочной структуры выбрана граничная задача для двух пластин в контакте с трехмерным основанием, решение которой с использованием данных мониторинговой информации, в том числе и приемников GPS/ГЛОНАСС, позволяет оценивать концентрацию напряжений в моделируемых литосферных структурах.

В диссертации разработан прямой метод исследования и решения трехмерных граничных задач для покрытий с прямолинейными разломами. Во **второй главе** даны постановки динамических и статических задач, моделирующих взаимодействие литосферных структур, описаны методы решения указанных задач для пластин, контактирующих вдоль разломов прямолинейной формы, часто встречающихся на практике.

В *параграфе* 2.1 приведены определяющие уравнения и граничные условия для пластин. *Параграф* 2.2 содержит постановки задач для подложки. В качестве модели подложки может быть выбрано основание Винклера или упругая среда.

В *параграфе* 2.3 рассмотрена задача для двух контактирующих упругих пластин на поверхности деформируемой подложки, совершающих колебания под действием локализованной поверхностной нагрузки. Процесс считается установившимся (с частотой ω). В декартовой системе координат ось Ox_3 направлена по

нормали к поверхности системы покрытие/подложка, а ось Ox_2 совпадает с границей между пластинами. Уравнения колебаний двух полуограниченных пластин принимают следующий вид:

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_j = \{u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}\}$ – вектор амплитуд перемещений точек срединной поверхности j -й пластины; элементы операторов \mathbf{R}_j

$$(j=1,2) \text{ имеют вид } R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j4}, \quad R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j4},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad R_{33}^j = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4}, \quad R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j =$$

$$= R_{32}^j = 0; \quad \varepsilon_{j1} = \frac{1-\nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j2} = \frac{1+\nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12}, \quad \varepsilon_{j4} = \frac{\omega^2 \rho_j (1-\nu_j^2)}{E_j},$$

$$\varepsilon_{j5} = \frac{1-\nu_j^2}{E_j h_j}. \quad \text{Матрица } \mathbf{E}_j = \text{diag}\{-\varepsilon_{j5}, -\varepsilon_{j5}, \varepsilon_{j5}\}, \quad \mathbf{g}_j = \{g_{jk}\} \text{ – вектор}$$

амплитуд напряжений, действующих со стороны подложки на нижнюю границу пластины; $\mathbf{b}_j = -\varepsilon_{j5} \mathbf{t}_j$, $\mathbf{t}_j = \{t_{jk}\}$, $k = \overline{1,3}$ – вектор поверхностных воздействий; ρ_j – плотность, ν_j – коэффициент Пуассона, E_j – модуль Юнга; h_j – толщина j -й пластины; $\Omega_1 = \{x_1 : 0 < x_1 < +\infty\}$, $\Omega_2 = \{x_1 : -\infty < x_1 < 0\}$.

Рассматривается условие идеального контакта пластин с деформируемым основанием. Для указанных типов оснований можно выписать интегральные соотношения, связывающие амплитуды перемещений \mathbf{u} и напряжений \mathbf{g} на их поверхности

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\sigma_1 \sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2, 0) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2)$$

где $\mathbf{K} = \|K_{mn}\|_{m,n=1}^3$, $\mathbf{G} = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}$, \mathbf{V}_2 – оператор двумерного преобразования Фурье. Методы построения матриц Грина \mathbf{K} для различных типов упругих подложек приводятся в работах И.И. Воровича, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхиной, А.В. Смирновой, Е.В. Глушкова, Н.В. Глушковой, В.В. Калининчука и др. Положение контуров σ_1 , σ_2 определяется принципом предельного поглощения. Для основания Винклера амплитуды смещений \mathbf{u} пропорциональны \mathbf{g} и

матрица \mathbf{K} является диагональной с постоянными вещественными элементами. Для сложных моделей сред соотношения (2), называемые функциями влияния, могут быть получены путем экспериментов.

В области контакта пластин ($x_1 = 0$, $-\infty < x_2 < +\infty$) задаются граничные условия, описываемые соотношениями вида

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0-0} = \mathbf{f}(x_2). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ($j = 1, 2$) – заданные дифференциальные операторы. Вид этих операторов, а также функции \mathbf{f} определяются типом взаимодействия пластин в области стыковки. Различные варианты условий представлены в работах А.С. Вольмира и А.Л. Гольденвейзера.

Применение приведенного в первой главе топологического метода даже для классических границ весьма сложно. В параграфе 2.4 для плит с прямолинейными границами описывается новый метод, обеспечивающий возможность более быстрого проведения расчетов, используемый при исследовании комплекса граничных задач, описывающих взаимодействие плит по прямолинейному участку границы.

Задача сводится к системе функциональных уравнений относительно трансформант Фурье амплитуд контактных напряжений между покрытием и подложкой $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+$, $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-$. Полученная система решается методом Винера – Хопфа путем факторизации по параметру α_1 относительно контура σ , выбираемого в соответствии с принципом предельного поглощения. При этом система содержит неизвестные значения вектор-функций $\mathbf{G}_1^+(q_{1l}, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_2^-(q_{2l}, \alpha_2)$, нуждающиеся в дополнительном определении, где $q_{jl}(\alpha_2)$ – однократные нули $\det \mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ по переменной α_1 , расположенные выше (для $j = 1$) и ниже (для $j = 2$) контура σ ($l = \overline{1, 4}$).

Изложен алгоритм определения трансформант напряжений. Получены соотношения для интегральных характеристик амплитуд перемещений поверхностей пластин вида

$$\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{U}}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{\mathbf{C}}_{1k}(\alpha_2) \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{k=1}^4 \tilde{\mathbf{C}}_{2k}(\alpha_2) \tilde{\mathbf{U}}_{jk}^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2),$$

содержащие произвольные функции $\tilde{C}_{jk}(\alpha_2)$, $j=1,2$, $k=\overline{1,4}$, определяемые из граничных условий в области контакта пластин (3). Окончательное решение задачи получается путем применения обратного преобразования Фурье в соответствующих областях.

В параграфе 2.5 описано применение разработанного метода к решению статической задачи о взаимодействии составного покрытия и упругой подложки. Уравнения (1) принимают вид

$$\mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R,$$

$$R_{11}^{0,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad R_{22}^{0,j} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad R_{33}^{0,j} = \varepsilon_{j3} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right),$$

$$R_{kl}^j = R_{kl}^{0,j} \quad (k \neq l).$$

В области стыковки пластин заданы условия (3). На границе покрытия и подложки справедливо соотношение

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2),$$

где \mathbf{K}_0 – матрица Грина статической задачи для упругого слоя.

Получена система функциональных уравнений относительно $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+$ и $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-$. Особенность данной системы состоит в том, что кроме неизвестных значений $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$ она содержит неизвестные значения их производных $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) = d\mathbf{G}_j/d\alpha_1|_{\alpha_1=\pm i\lambda}$, где $\pm i\lambda$ – двукратные нули $\det \mathbf{R}_{0j}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$, $\lambda = |\alpha_2|$. Здесь верхний знак символа « \pm » соответствует значению $j=1$, нижний – $j=2$.

В данном случае для определения $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$ построено новое дополнительное функциональное уравнение, в совокупности полученные соотношения имеют вид

$$\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{11}^\pm \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{21}^\pm \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \tilde{\mathbf{P}}_{12}^\pm \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) -$$

$$- \tilde{\mathbf{P}}_{22}^\pm \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \mathbf{G}_{jk}^\pm(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{d\mathbf{G}_j^0(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} - \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_{11}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_{21}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) -$$

$$- \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_{12}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \frac{d\tilde{\mathbf{P}}_{22}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \sum_{j,k=1}^2 \tilde{C}_{jk}(\alpha_2) \frac{d\mathbf{G}_{jk}^\pm}{d\alpha_1}.$$

Здесь \mathbf{G}_j^0 , $\tilde{\mathbf{P}}_{jk}^\pm$, \mathbf{G}_{jk}^\pm зависят от данных задачи и параметров α_1, α_2 .

Полученная после подстановки в выражения для $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)$ вместо α_1 значения $i\lambda$, а в выражения для $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)$ – $-i\lambda$ замкнутая алгебраическая система позволяет определить $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$.

Основные сложности при решении рассмотренных задач связаны с проведением факторизации матриц. Для приближенной факторизации могут быть использованы методы, описанные в первой главе.

Параграф 2.6 посвящен вопросу перехода от задачи вибрации к статической задаче при уменьшении частоты колебаний системы покрытие/подложка. Чтобы избежать накопления ошибки, связанного с наличием в ряде соотношений параметров, полученных в результате вычисления вычетов в однократных полюсах, при стремлении частоты колебаний к нулю, предлагается при малых значениях ω строить приближенное решение, рассматривая серию решаемых последовательно статических задач.

В **третьей главе** построены решения конкретных задач с помощью описанного во второй главе метода. Так, в *параграфе 3.1* в пространственной постановке рассмотрена задача о вертикальных колебаниях системы из двух полуограниченных пластин на упругой подложке под воздействием сосредоточенной гармонической поверхностной нагрузки $A\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0)e^{i\omega t}$.

В *параграфе 3.2* рассмотрена статическая задача для двух пластин на деформируемом основании под действием вертикальной нагрузки, приводящая к новому типу функциональных уравнений.

Соотношения для образов Фурье перемещений поверхностей пластин запишутся в виде

$$U_j(\alpha_1, \alpha_2) = R_{0j}^{-1} [\varepsilon_{j5} G_j(\alpha_1, \alpha_2) + B_j(\alpha_1, \alpha_2)] + W_j^0(\alpha_1, \alpha_2),$$

где $W_j^0(\alpha_1, \alpha_2)$ содержит произвольные функции $C_{jk} = C_{jk}(\alpha_2)$, а также значения трансформант контактных напряжений $G_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$ и их производных $G'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$, определяемые после решения функционального уравнения Винера – Хопфа

$$K_{01}(\alpha_1, \alpha_2) G_1^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_{02}(\alpha_1, \alpha_2) G_2^-(\alpha_1, \alpha_2) + F_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

где

$$F_0(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 \left[B_j(\alpha_1, \alpha_2) (R_{0j})^{-1} + W_j^0(\alpha_1, \alpha_2) \right], \quad K_{0j} = \pm \left(K_0 - \varepsilon_{j5} (R_{0j})^{-1} \right),$$

$$B_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_{j5} A e^{i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)}, \quad B_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0.$$

Неизвестные $G_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$, $G'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$ ($j=1,2$) находятся описанным в *параграфе 2.5* способом с построением дополнительных функциональных уравнений.

При реализации обращения преобразований Фурье перемещений символы функций Грина задачи для установившихся колебаний K и статической задачи K_0 , а также функции K_j , K_{0j} заменяются их аппроксимациями.

Полученные в *параграфах 3.1, 3.2* соотношения открывают возможность исследования влияния условий в области контакта частей составного покрытия на состояние системы, позволяют при необходимости проследить этапы процесса разрушения трещины (разлома) от первоначально целой пластины до последующего полного разъединения ее на две полуплоскости.

В *параграфе 3.3* представлены результаты численного исследования описанных задач. Рассмотрено поведение вещественных и комплексных (для статической задачи) полюсов аппроксимируемых функций. На рисунке 2 приведены зависимости α_1 от $\alpha_2 \in R$ для функции вида $K_0(\alpha) - \varepsilon(\alpha^2)^{-2}$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, где в качестве K_0 выбрана функция Грина упругого слоя, лежащего без трения на деформируемом основании, для комплексного нуля с наименьшей мнимой частью ($\alpha = (0, 3,11778)$, $\varepsilon = 10$, $\nu = 0,1$ – слева, $\alpha = (1,0107, 2,12727)$, $\varepsilon = 0,1$, $\nu = 0,2$ – справа).

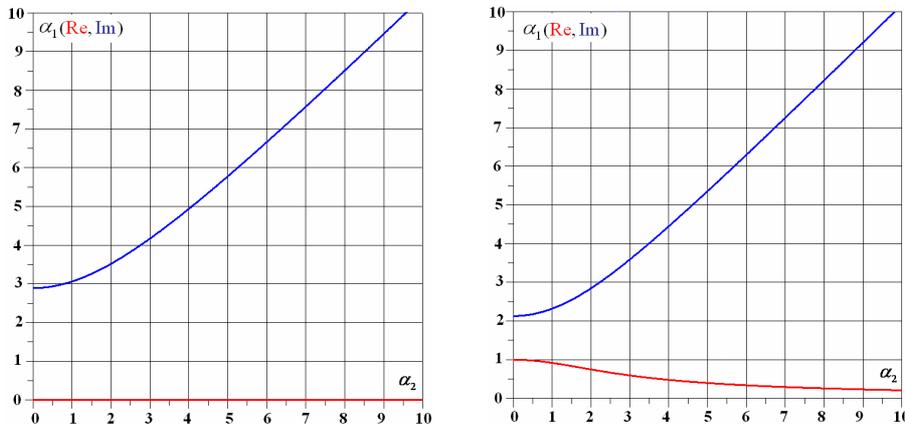


Рисунок 2

Реализован алгоритм построения решения задачи для установившегося режима колебаний в случае неизменных свойств системы в направлении оси Ox_2 . Рассмотрено влияние характера взаимодействия пластин на разломе, а также свойств пластин на перемещения поверхности в зоне контакта. В качестве основания выбран упругий слой. На рисунках 3, 4 приведены комплексные амплитуды смещений поверхности системы (вещественная часть – красная линия, мнимая – черная), координата сосредоточенного источника $x_1^0 = 5$. Рисунок 3 соответствует случаю, когда перемещения и поперечные силы, действующие на края пластин, непрерывны, изгибающие моменты равны нулю, приведенная частота $\bar{\omega} = 2,5$.

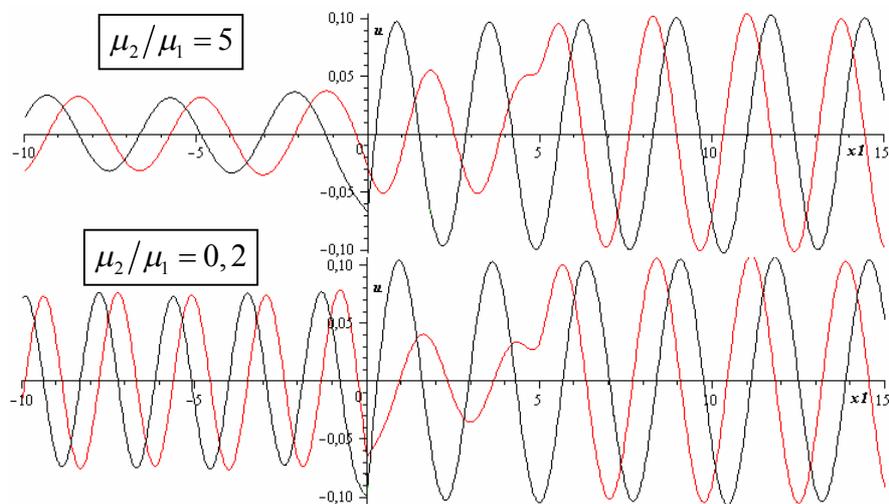


Рисунок 3

На рисунке 4 представлены графики для тех же граничных условий и соотношений жесткости пластин при $\bar{\omega} = 0,96$.

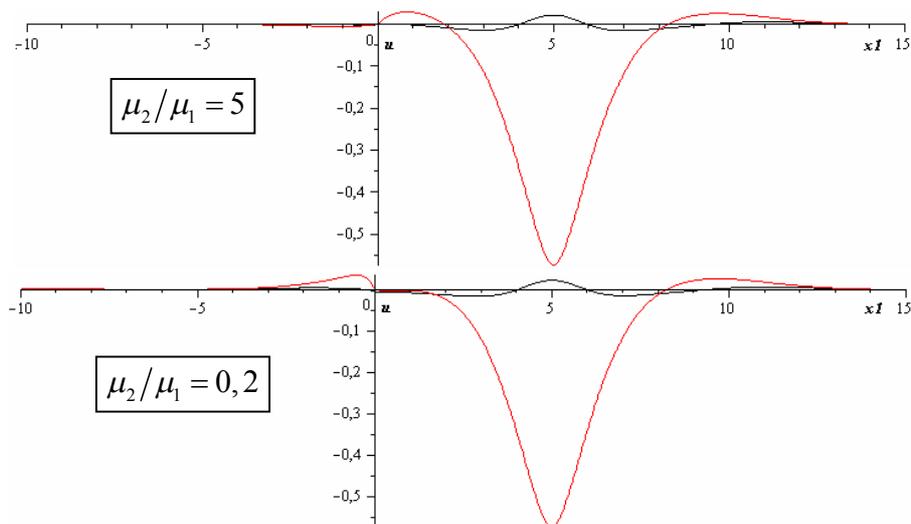


Рисунок 4

Результаты модельных расчетов демонстрируют зависимость волновой картины на поверхности системы покрытие/подложка от условий контакта, свойств составляющих покрытия и частоты вибрации. С уменьшением частоты вибрации амплитуды смещений поверхности левой пластины в сравнении с правой уменьшаются и влияние свойств пластин становится менее выраженным.

В **заключении** сформулированы основные результаты исследования, указана их практическая значимость. Приложения содержат список основных обозначений и графики, иллюстрирующие результаты вычислительных экспериментов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан метод исследования ранее не изучавшейся трехмерной граничной задачи взаимодействия разнотипных пластин, контактирующих между собой по прямолинейному разлому и одновременно взаимодействующих с деформируемым основанием.

2. На основе разработанного метода представлен способ определения всех основных характеристик напряженно-деформированного состояния блочной структуры, образованной двумя контактирующими пластинами на деформируемом основании, при различных условиях контакта пластин на разломе, исследован наиболее сложный случай граничной задачи, отвечающий статической постановке.

3. Предложен подход к решению динамических задач для малых частот посредством последовательного решения серии статических задач.

4. Разработан и программно реализован алгоритм расчета амплитуд перемещений поверхностей пластин покрытия для случая установившихся колебаний.

5. Вычислены значения ряда параметров, позволяющих ставить и решать конкретные задачи геофизики и теории прочности материалов с дефектными покрытиями.

Список работ по теме диссертации, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК

1. Метод блочного элемента для гладких границ / В.А. Бабешко, М.Н. Колесников, Е.В. Кашков, В.В. Лозовой, А.В. Плужник,

И.С. Телятников, П.Б. Иванов, В.Л. Шестоपालов, А.А. Шишкин // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2012. – №4. – С. 5–9.

2. О поведении и резонансах некоторых блочных структур сейсмологии и материаловедения / В.А. Бабешко, Е.В. Кириллова, М.Н. Колесников, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко, В.В. Лозовой, А.В. Плужник, А.А. Шишкин // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 1. – С. 6–12.

3. Развитие новых наукоемких методов мониторинга и прогноза состояния территорий в сейсмоопасных и оползнеопасных зонах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, И.В. Рядчиков, В.В. Лозовой, А.Г. Федоренко, М.Н. Колесников, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко, А.А. Шишкин, С.Б. Уафа, М.С. Власова, М.В. Смирнова // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 3. – С. 13–20.

4. Исследование поведения структурно неоднородных сред с изменяющимися свойствами / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, Е.М. Горшкова, М.В. Зарецкая, А.В. Павлова, И.С. Телятников // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2013. – № 3. – С. 5–12.

5. Block element method for body, localizations and resonances / V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko, E.M. Gorshkova, I.V. Gladskoi, D.V. Grishenko, I.S. Telyatnikov // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2014. – № 2. – С. 13–19.

6. Телятников И.С. Об одной модели деформационных процессов в геофизических структурах // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. – 2015. – № 1 (в печати).

Список работ по теме диссертации, опубликованных в других изданиях

7. Колесников, М.Н., Телятников, И.С. Колебания граничащих пластин на поверхности упругой среды / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: труды X Всерос. науч. конф. молодых ученых. – Краснодар: КубГУ, 2013. – С. 139–141.

8. Колесников, М.Н., Телятников, И.С. К моделированию динамики контактирующих литосферных структур / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты: материалы IX Междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2013. – С. 192–196.

9. Телятников, И.С. Задача о колебаниях неортотропной однородной пластины на упругом основании / И.С. Телятников // Прикладная математика XXI века: материалы XIII объединенной конференции студентов и аспирантов КубГУ. – Краснодар: КубГУ, 2013. – С. 129–130.

10. Математические методы в проблеме блочных структур / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, А.Г. Федоренко, И.С. Телятников // Современные проблемы механики и математики: тез. докл. Междунар. науч. конф. – Львов: Институт прикладных проблем механики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 22–23.

11. К проблеме оценки прочности многослойных тонкостенных покрытий, содержащих трещины / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, М.Н. Колесников, А.Г. Федоренко, И.С. Телятников // Великий русский инженер В.Г. Шухов и его научное наследие: материалы Междунар. конф. – М.: МАКС Пресс, 2013 – С. 18–20.

12. Kolesnikov, M.N., Telyatnikov, I.S. To a problem of vibration of adjoining semi-infinite plates on a surface of elastic medium / M.N. Kolesnikov, I.S. Telyatnikov // Mechanics 2013: Proceedings International School-Conference of Young Scientists dedicated to the 70th anniversary of National Academy of Sciences of Armenia. – Yerevan: Publisher of Yerevan State University of Architecture and Construction, 2013. – P. 261–264.

13. Колесников, М.Н., Телятников, И.С. Моделирование материалов с покрытиями / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Природноресурсный потенциал, экология и устойчивое развитие регионов России: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. – Пенза: Изд-во МНИЦ, 2014. – С. 27–31.

14. Механические проблемы в блочных структурах / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, И.С. Телятников, Д.В. Грищенко // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. – С. 31–34.

15. Телятников, И.С., Смирнова, М.В. К исследованию задач передачи нагрузки на упругое основание через покрытие / И.С. Телятников, М.В. Смирнова // Инновационное развитие современной науки: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. – С. 225–227.

16. Телятников, И.С. К задачам передачи нагрузки через покрытия / И.С. Телятников // Прикладная математика XXI века: материалы XIV объединенной конференции студентов и аспирантов КубГУ. – Краснодар: КубГУ, 2014. – С. 103–105.

17. Телятников, И.С. К задачам передачи нагрузки на упругое основание через покрытие / И.С. Телятников // Материалы X ежегодной научной конференции студентов и аспирантов базовых кафедр ЮНЦ. – Ростов н/Д: Изд-во ЮНЦ РАН, 2014. – С. 178–180.

18. К оценке состояния треснувших покрытий / В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко, Д.В. Грищенко, И.С. Телятников // NPNJ'2014: материалы X Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях. – М.: Изд-во МАИ, 2014. – С. 305–307.

19. Колесников, М.Н., Телятников, И.С. К исследованию влияния разломов на напряженно-деформированное состояние литосферных структур / М.Н. Колесников, И.С. Телятников // Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: труды XI Всерос. науч. конф. молодых ученых и студентов. – Краснодар: КубГУ, 2014. – С. 144–147.

20. Telyatnikov, I.S. To the problems of oscillations and static interaction of contacting plates on the surface of the elastic layer / I.S. Telyatnikov // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: труды VIII Междунар. конф. – Ереван: Чартарагет, 2014. – С. 481–485.

Свидетельство о регистрации программы

21. Колесников М.Н., Сыромятников П.В., Телятников И.С. Расчет амплитуд вертикальных колебаний двух контактирующих полуограниченных пластин на упругом слое под действием гармонической поверхностной нагрузки. Заявка № 2014516038 от 24.06.2014. Свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ (Россия). № 2014660326 от 06.10.2014.

Т е л я т н и к о в Илья Сергеевич

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТАТИЧЕСКОЙ
НАПРЯЖЕННОСТИ ЛИТОСФЕРНЫХ СТРУКТУР
НА РАЗЛОМАХ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 18.12.2014. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$.
Тираж 100 экз. Печать цифровая. Заказ № 2087.1
Издательско-полиграфический центр
Кубанского государственного университета
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149