

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

**О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ
ПРИ НАЛИЧИИ МАРТЕНСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ
НА ПРИМЕРЕ ФЕРМЫ МИЗЕСА**

© 2005 г. В.А. Еремеев¹

На примере фермы Мизеса рассмотрена потеря устойчивости упругих стержневых систем, элементы которых претерпевают превращения мартенситного типа. Изучена симметричная деформация фермы Мизеса, состоящей из двух стержней, испытывающих фазовые превращения мартенситного типа, и упругой пружины жесткости C , и определены точки бифуркации, соответствующие статической потере устойчивости фермы. Показано, что наличие петли гистерезиса, присущей диаграмме растяжения для стержней фермы, приводит к двум петлям на диаграмме деформирования фермы Мизеса, понижению верхней и увеличению нижней критических нагрузок, а также в некоторых случаях появлению новых точек бифуркации и потере устойчивости по механизму двух хлопков.

В последнее время значительный интерес вызывают конструкции из материалов, испытывающих фазовые превращения мартенситного типа. В частности, это связано с тем, что мартенситные фазовые переходы ответственны за эффект памяти формы, наблюдаемый во многих сплавах [1–4]. Эффект памяти формы в тонкостенных элементах (стержнях, пластинках и пленках) используется во многих технических устройствах [4]. При этом возможна, а зачастую и используется потеря устойчивости тонкостенных элементов при сжатии или изменении температуры. Это делает актуальным проблему изучения потери устойчивости тел с фазовыми переходами мартенситного типа.

В теории устойчивости упругих и вязкоупругих систем важное место занимает ферма Мизеса [5–6], являясь своего рода пробным камнем для различных подходов к исследованию более сложных тонкостенных конструкций. Отметим в этой связи только работы [7–10].

Здесь на примере фермы Мизеса рассмотрена потеря устойчивости упругих стержневых систем, элементы которых претерпевают превращения мартенситного типа. Изучена симметричная деформация фермы Мизеса, состоящей из двух стержней, испытывающих фазовые превращения мартенситного типа, и упругой пружины жесткости, и определены точки бифуркации, соответствующие статической потере устойчивости фермы. Показано, что наличие петли гисте-

резиса, присущей диаграмме растяжения для стержней фермы, приводит к двум петлям на диаграмме деформирования фермы Мизеса, понижению верхней и увеличению нижней критических нагрузок, а также в некоторых случаях появлению новых точек бифуркации и потере устойчивости по механизму двух хлопков.

Заметим, что ранее исследования устойчивости упругих тел, испытывающих фазовые превращения, в рамках пространственной теории упругости проводились в [11–14], анализ выпучивания одно- и двумерных конструкций из материалов с памятью формы проводился в [15–18]. В них отмечено, что наличие фазовых превращений существенно влияет на потерю устойчивости, в частности, появляются точки бифуркации, отсутствующие в системах без фазовых переходов [12–13].

Следуя [8–10], рассмотрим равновесие фермы Мизеса. Обозначим длину стержней до деформации через l_0 , а угол, образуемый ими с горизонтальной плоскостью, через α_0 . После приложения силы P длины стержней и угол наклона обозначим через l и α соответственно. Зависимость силы P от перемещения узла фермы u в равновесии дается формулой $P = 2\sigma F \sin \alpha + Cu$, где σ – напряжения в стержнях, F – площадь поперечного сечения стержня. В случае стержней из обычного материала зависимость напряжения от деформации имеет вид закона Гука $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга, а деформация ε вычисляется через

угол α по формуле $\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}$. Выра-

¹ Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону.

REFERENCES

1. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1997. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 1. [Materials with shape memory effect. Volume 1]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 424 p. (In Russian).
2. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 2. [Materials with shape memory effect. Volume 2]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 374 p. (In Russian).
3. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 3. [Materials with shape memory effect. Volume 3]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 474 p. (In Russian).
4. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 4. [Materials with shape memory effect. Volume 4]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 268 p. (In Russian).
5. Mises R.V. 1923. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 3(6): 406–422. (In German).
6. Mises R.V., Ratzersdorfer J. 1925. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 5(3): 218–235. (In German).
7. Feodosiev V.I. 1973. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov. [Selected problems and questions about the strength of materials]*. Moscow, Nauka Publ.: 400 p. (In Russian).
8. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. 1979. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem. [Stability and oscillations of elastic systems]*. Moscow, Nauka Publ.: 384 p. (In Russian).
9. Vorovich I.I., Minakova N.I., Shepeleva V.G. 1979. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. (4): 120–132. (In Russian).
10. Eremeev V.A., Lebedev L.P. 1991. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*. (3): 22–26. (In Russian).
11. Grinfel'd M.A. 1990. *Metody mekhaniki sploshnykh sred v teorii fazovykh prevrashcheniy. [Methods of continuum mechanics in the theory of phase transitions]*. Moscow, Nauka Publ.: 312 p. (In Russian).
12. Eremeev V.A., Zubov L.M. 1991. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. (2): 56–65. (In Russian).
13. Eremeev V.A., Freidin A.B., Sharipova L.L. 2003. *Doklady Physics*. 48(7): 359–363.
14. Fu Y.B., Freidin A.B. 2004. In: *Proceedings of the Royal Society of London A*. 460: 3065–3094.
15. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. 2000. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 6(1): 89–102. (In Russian).
16. Movchan A.A., Kazarina S.A. 2002. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. (6): 82–89. (In Russian).
17. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. 2003. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 44(3): 169–178. (In Russian).
18. Khusainov M.A. 1997. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 67(6): 118–120. (In Russian).

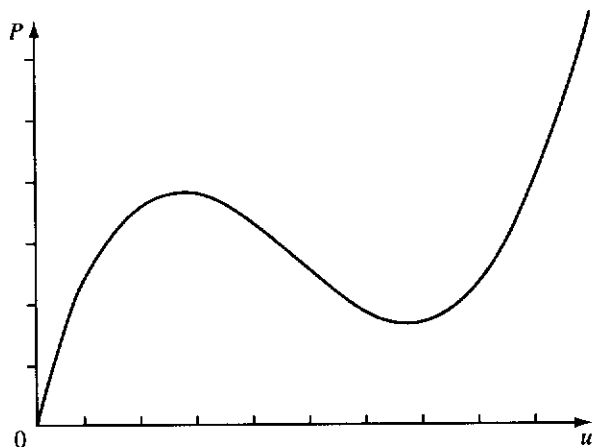


Рис. 1. Диаграмма деформирования для фермы Мизеса при $C/EF = 0,1$

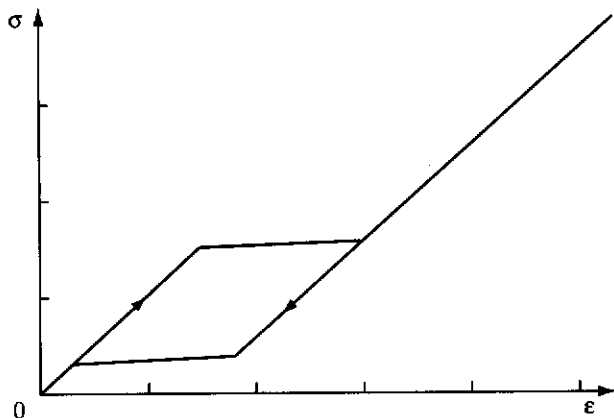


Рис. 2. Диаграмма деформирования для стержня с фазовым переходом

жая угол α через линейное перемещение u при помощи соотношения $u = l_0 \cos \alpha_0 (\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha)$, получим формулу, отличающуюся от [7–8] наличием слагаемого, вызванного реакцией пружины

$$P = 2EF(l_0 \sin \alpha_0 - u) \times \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (l_0 \sin \alpha_0 - u)^2}} - \frac{1}{l_0} \right) + Cu, \quad (a = l_0 \cos \alpha_0).$$

Характерная диаграмма деформирования $P-u$ имеет вид [8] (рис. 1) (здесь $\alpha_0 = 30^\circ$; $C/EF = 0,1$). Нагрузки, соответствующие минимуму и максимуму на графике, являются нижней и верхней критическими нагрузками. Убывающий участок диаграммы $P-u$ при силовом нагружении фермы неустойчив и может быть реализован при задании перемещения u .

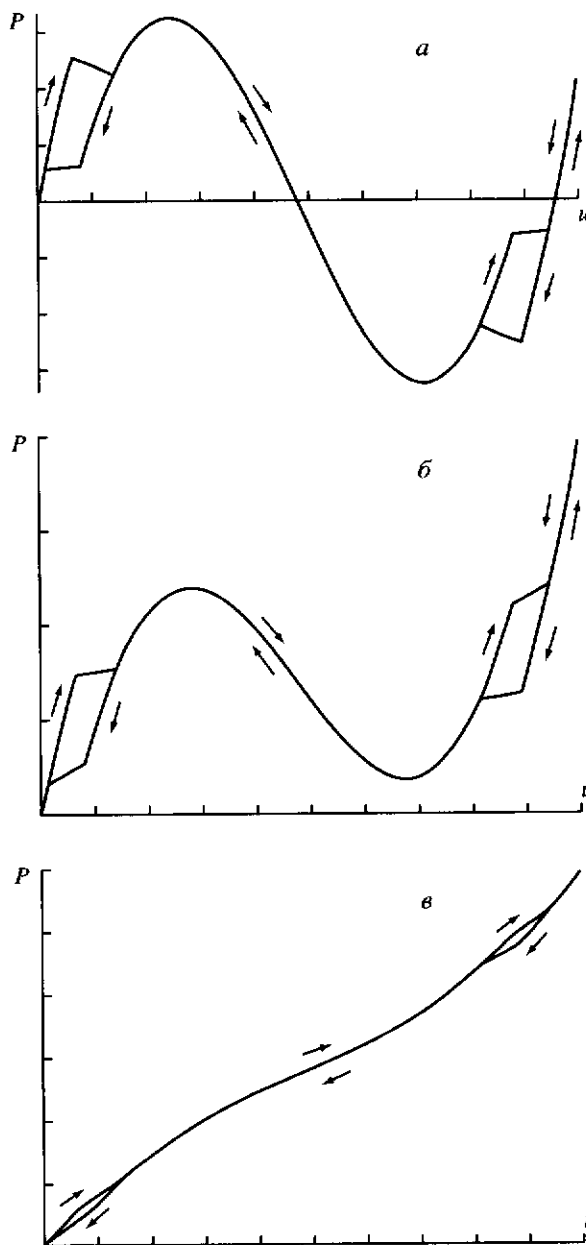


Рис. 3. Петли гистерезиса на диаграмме нагружения для фермы Мизеса при разных значениях жесткости пружины: $C/EF = 0$ (а), $C/EF = 0,05$ (б), $C/EF = 0,5$ (в)

Для стержней из материала с памятью формы закон Гука, вообще говоря, не имеет места, а при температурах, близких к температуре перехода, диаграмма $\sigma-\epsilon$ имеет достаточно сложный вид с одной или несколькими петлями гистерезиса [1]. Не ограничивая общности, далее в работе будем использовать упрощенный вид петли гистерезиса в форме параллелограмма (рис. 2). Здесь стрелкой показано направление изменения деформации.

Диаграммы нагружения для фермы Мизеса при учете петли гистерезиса уравнений состоя-

ния материала даны на рис. 3а–в. Наличие петли гистерезиса на диаграмме σ – ϵ влечет за собой две петли гистерезиса на диаграмме P – u . В отсутствие пружины ($C = 0$, рис. 3а) диаграмма деформирования имеет симметричный вид, наличие пружины симметрию разрушает. С увеличением жесткости пружины петли гистерезиса уменьшаются, как, например, при $C = 0,5EF$ (рис. 3в). Тем самым увеличение жесткости пружины приводит к уменьшению влияния фазового перехода.

Увеличение петли гистерезиса на диаграмме растяжения для стержня оказывает существенное влияние на вид диаграммы деформирования фермы Мизеса, в частности, приводит к понижению верхней и повышению нижней критической нагрузок. Отметим, что возможны сочетания параметров упругой системы, для которых появляются дополнительные точки бифуркации (области неустойчивости) (рис. 3а), для которых возможна потеря устойчивости путем двух прощелкиваний (хлопков) фермы Мизеса. Наличие новых точек бифуркации при потере устойчивости трехмерных тел с фазовыми переходами отмечалось в [12–14].

Анализ потери устойчивости фермы Мизеса при наличии фазовых превращений мартенситного типа показал, что свойства материала довольно сложным образом наследуются в свойствах конструкции и существенно влияют на ее устойчивость (появляются новые точки бифуркации, изменяются критические нагрузки).

Заметим, что аналогично может быть исследована потеря устойчивости более сложных стержневых конструкций.

Автор благодарен Л.М. Зубову и А.Б. Фрейдину за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00431).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев С.П., Волков А.Е.* и др. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под ред. Лихачева В.А. Т. 1. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1997. 424 с.
2. *Беляев С.П., Волков А.Е.* и др. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под ред. Лихачева В.А. Т. 2. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1998. 374 с.
3. *Беляев С.П., Волков А.Е.* и др. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под ред. Лихачева В.А. Т. 3. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1998. 474 с.
4. *Беляев С.П., Волков А.Е.* и др. Материалы с эффектом памяти формы. Справ. изд. / Под ред. Лихачева В.А. Т. 4. СПб.: НИИХ СПбГУ, 1998. 268 с.
5. *Mises R.* // ZAMM. 1923. S. 406–462.
6. *Mises R.* // ZAMM. 1925. S. 218–231.
7. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
8. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
9. *Ворович И.И., Минакова Н.И., Шепелева В.Г.* // Изв. АН. МТТ. 1979. № 4. С. 120–132.
10. *Еремеев В.А., Лебедев Л.П.* // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1991. № 3. С. 22–26.
11. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
12. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* // Изв. АН. МТТ. 1991. № 2. С. 56–65.
13. *Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л.* // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 2. С. 189–193.
14. *Fu Y.B., Freidin A.B.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. Vol. 460. P. 3065–3094.
15. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* // Мех. композ. материалов и констр. 2000. Т. 6. № 1. С. 89–102.
16. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
17. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г.* // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3.
18. *Хусаинов М.А.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 6. С. 118–120.

ON THE STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS WITH MARTENSATE TRANSFORMATIONS BY THE EXAMPLE OF MIZES TRUSS

V.A. Eremeyev

By the example of Mises truss instability of elastic rod systems which elements undergo martensate transformations is considered. The stability of Mises truss is investigated taking into account the phase transformations of martensate type in rods. For this system the loading diagrams are constructed. It is shown that top and bottom critical loads depend on the characteristics of hysteresis loop for the material of truss. For example, in some cases additional bifurcation points are appeared.

REFERENCES

1. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1997. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 1. [Materials with shape memory effect. Volume 1]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 424 p. (In Russian).
2. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 2. [Materials with shape memory effect. Volume 2]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 374 p. (In Russian).
3. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 3. [Materials with shape memory effect. Volume 3]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 474 p. (In Russian).
4. Belyaev S.P., Volkov A.E. et al. 1998. *Materialy s efektom pamyati formy. Tom 4. [Materials with shape memory effect. Volume 4]*. St. Petersburg, Research Institute of Chemistry, St. Petersburg State University Publishers: 268 p. (In Russian).
5. Mises R.V. 1923. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 3(6): 406–422. (In German).
6. Mises R.V., Ratzersdorfer J. 1925. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 5(3): 218–235. (In German).
7. Feodosiev V.I. 1973. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov. [Selected problems and questions about the strength of materials]*. Moscow, Nauka Publ.: 400 p. (In Russian).
8. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. 1979. *Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem. [Stability and oscillations of elastic systems]*. Moscow, Nauka Publ.: 384 p. (In Russian).
9. Vorovich I.I., Minakova N.I., Shepeleva V.G. 1979. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. (4): 120–132. (In Russian).
10. Eremeev V.A., Lebedev L.P. 1991. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*. (3): 22–26. (In Russian).
11. Grinfel'd M.A. 1990. *Metody mekhaniki sploshnykh sred v teorii fazovykh prevrashcheniy. [Methods of continuum mechanics in the theory of phase transitions]*. Moscow, Nauka Publ.: 312 p. (In Russian).
12. Eremeev V.A., Zubov L.M. 1991. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. (2): 56–65. (In Russian).
13. Eremeev V.A., Freidin A.B., Sharipova L.L. 2003. *Doklady Physics*. 48(7): 359–363.
14. Fu Y.B., Freidin A.B. 2004. In: *Proceedings of the Royal Society of London A*. 460: 3065–3094.
15. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. 2000. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 6(1): 89102. (In Russian).
16. Movchan A.A., Kazarina S.A. 2002. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. (6): 82–89. (In Russian).
17. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. 2003. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 44(3): 169–178. (In Russian).
18. Khusainov M.A. 1997. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 67(6): 118–120. (In Russian).