

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ (МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА)

УДК 539.3

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД

© 2016 г. Т.И. Белянкова¹, В.В. Калинин¹, О.М. Тукодова²

Аннотация. Предложен один из возможных подходов к исследованию внутренней и поверхностной устойчивостей преднапряженных функционально-градиентных сред. Предполагается, что в среде наведена однородная начальная деформация. При исследовании внутренней устойчивости материала определены области допустимых напряжений для различных видов начальных механических воздействий и типов функциональных зависимостей изменения свойств материала. На примере задачи о сдвиговых колебаниях функционально-градиентного слоя показано различие в диапазонах допустимых напряжений при рассмотрении поверхностной устойчивости материала.

Ключевые слова: устойчивость, преднапряженная среда, функционально-градиентные материалы, начальные напряжения.

ON STABILITY OF PRESTRESSED FUNCTIONALLY GRADED MEDIA

T.I. Belyankova¹, V.V. Kalinchuk¹, O.M. Tukodova²

The paper analyzes the possibility of studying the surface and internal stabilities of prestressed functionally graded media. While conducting the research, it is assumed that due to mechanical stresses a homogeneous initial strain is induced in the medium. We use the unique correspondence criterion of stresses and strains in the study of internal stability of material. The regions of allowable stresses were determined for the considered kinds of initial mechanical actions and types of functional dependencies that describe the changes in the material properties. Following the example of shear vibrations problem for a functionally graded layer we studied the issue of its surface stability. The difference in the ranges of allowable stresses was indicated while taking into account the structure of the surface wave field.

Keywords: stability, prestressed medium, functionally graded materials, initial stresses.

ВВЕДЕНИЕ

Динамика контактного взаимодействия преднапряженных сред детально исследовалась в работах [1–3]. Достаточно полный обзор приведен в [4]. В указанных выше работах исследованы дисперсионные свойства преднапряженных сред, развиты эффективные методы исследования особенностей динамического контактного взаимодействия, включая оригинальные методы решения интегральных уравнений первого рода, с высокой точностью учитывающие динамические свойства среды. Проанализировано влияние вида напряженного состояния и величины начальных напряжений на динамику

как однородной, так и неоднородной полуограниченной среды. В то же время вне рассмотрения остались вопросы устойчивости преднапряженной среды, играющие при исследовании ее динамики существенную роль [5–7]. В отличие от статических задач механики преднапряженных сред, в динамических задачах наряду с внутренней неустойчивостью [5; 6] может иметь место поверхностная неустойчивость [7]. Для простых материалов условия устойчивости представляются в аналитическом виде, что позволяет достаточно эффективно их проверять. В случае сложных материалов для анализа устойчивости привлекаются численные методы [8]. В настоящей работе для анализа внутренней устой-

¹ Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, тел. 8 (863) 250-98-10, e-mail: kalin@ssc-ras.ru

² Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1а.

чивости используется критерий взаимно однозначного соответствия напряжений и деформаций [5]. Вопрос о поверхностной устойчивости среды решается на основе анализа ее дисперсионных свойств.

**МОДЕЛЬ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЫ**

Рассмотрим задачу о колебаниях слоя $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_0 \leq x_3 \leq x_{30}$, нижняя грань которого жестко закреплена. Полагаем, что в среде, свойства которой изменяются по координате x_3 , под действием механических воздействий наводится однородное начально-деформированное состояние (НДС)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \tag{1}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad v_i = \text{const};$$

$\mathbf{R} = \mathbf{i}_s X_s(q_1, q_2, q_3, t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{i}_s a_s(q_1, q_2, q_3)$ – радиус-векторы точки среды в НДС и естественном состоянии (ЕС) соответственно, $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – относительные удлинения волокон, направленных в ЕС вдоль осей $a_i, i = 1, 2, 3$, совпадающих с декартовыми координатами, δ_{ij} – символ Кронекера.

Краевая задача описывается линеаризованными уравнениями движения

$$\nabla \cdot \mathbf{\Theta} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{2}$$

и граничными условиями на поверхности $O = O_1 + O_2$ и нижней грани слоя

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{\Theta} \Big|_{O_1} = \mathbf{q} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{u} \Big|_{O_2} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{u} \Big|_{x_3=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона, \mathbf{N} – вектор внешней нормали к поверхности среды, \mathbf{u}, \mathbf{q} – векторы перемещений и напряжений, ρ – плотность материала среды, определенные в НДС. Компоненты тензора $\mathbf{\Theta}$ представляются формулами

$$\Theta_{ik} = \theta_{iksp} \frac{\partial u_s}{\partial x_p}; \tag{4}$$

$$\theta_{lll} = 2J^{-1} \left\{ -\psi_0 + \psi_1 v_l^2 + 3\psi_2 v_l^4 + 2V_{00} + v_l^4 (V_{11} + 2v_l^2 V_{12}) \right\},$$

$$\theta_{lkl} = 2J^{-1} \left\{ v_l^2 [\psi_1 + \psi_2 (v_l^2 + v_k^2)] \right\}, \tag{5}$$

$$\theta_{lkl} = 2J^{-1} \left\{ -\psi_0 + \psi_2 v_j^2 v_k^2 \right\},$$

$$\theta_{jjk} = 4J^{-1} \left\{ V_{00} + v_j^2 v_k^2 [V_{11} + V_{12} (v_j^2 + v_k^2)] \right\};$$

$$\psi_0 = \frac{1}{8} n I_3,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4} \left[(I_1 - 3)\lambda - 2\mu + \frac{l}{2} (I_1 - 3)^2 + m(I_1 - I_2) - \frac{n}{2} (I_1 - 1) \right],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4} \left[2\mu + m(I_1 - 3) + \frac{n}{2} \right], \quad V_{00} = \frac{1}{8} n I_3, \tag{6}$$

$$V_{11} = \frac{1}{4} \left[\lambda + l(I_1 - 3) - m(I_1 - 1) - \frac{n}{2} \right], \quad V_{12} = V_{21} = \frac{1}{4} m.$$

$J = v_1 v_2 v_3$ – метрический множитель, $I_k = I_k(\mathbf{F})$ – инварианты меры Фингера начальной деформации,

$$I_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \quad I_2 = v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_3^2 + v_2^2 v_3^2,$$

$$I_3 = v_1^2 v_2^2 v_3^2.$$

Параметры Ляме λ, μ и константы Мурнагана третьего порядка l, m, n [4, 5] являются функциями координаты x_3 .

**НАЧАЛЬНО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ
СОСТОЯНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД**

Далее рассматривается слой, свойства которого изменяются в соответствии с законами, представленными на рисунке 1. В качестве опорного используется материал с параметрами $\rho = 7,748 \cdot 10^3$ кг/м³,

$$\lambda = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \quad \mu = 0,804 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2,$$

$$l = -3,25 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2, \quad m = -6,32 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2,$$

$$n = -8,04 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2.$$

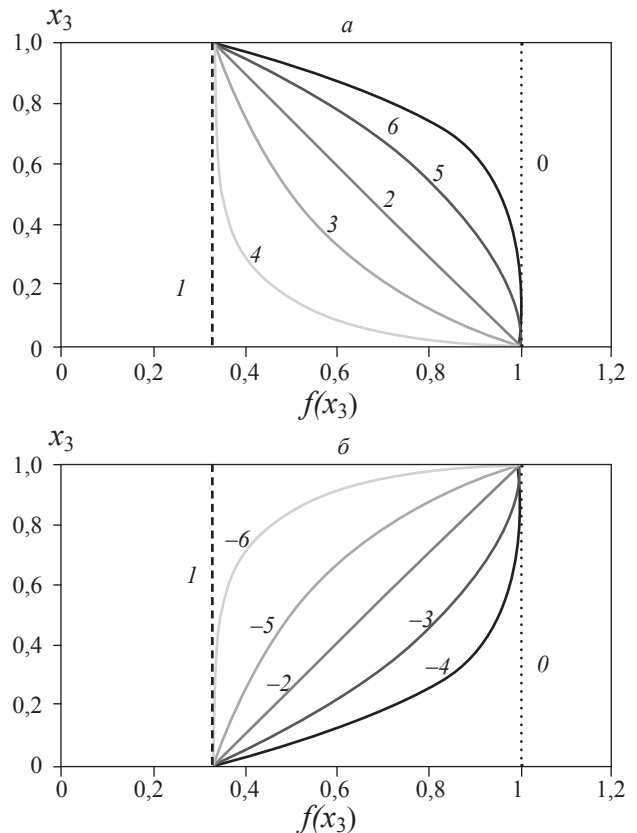


Рис. 1. Функциональные зависимости свойств материала слоя
Fig. 1. The functional dependencies of the properties of the layer material

Цифрами 1–6 на рисунке 1 отмечены зависимости «нормальной» неоднородности (рис. 1а) свойств материала, знаком « \leftrightarrow » в обозначениях кривых отмечены «аномальные» зависимости (рис. 1б) неоднородности.

На рисунке 2 показано распределение по глубине начальных напряжений, создающих заданные деформации (рис. 2а), а также эпюры напряжений на трех уровнях по глубине слоя (рис. 2б). Неоднородность свойств слоя соответствует кривой 5 рисунка 1, начальное воздействие – одноосному напряженному состоянию 1х1, определяемому условием $\sigma_{11}^0 = p_1, \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$.

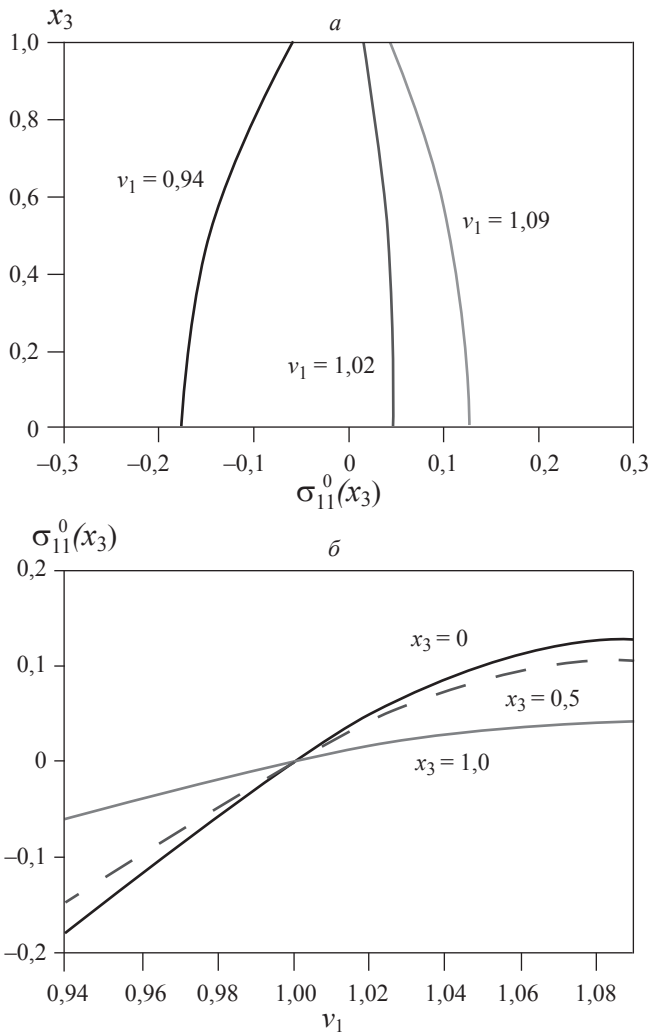


Рис. 2. Зависимость начальных напряжений от деформации
Fig. 2. The dependence of the initial stresses on the strain

ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
МАТЕРИАЛА

Используя критерий взаимно однозначного соответствия напряжений и деформаций [5], получаем условия, определяющие внутреннюю устойчивость материала $\sigma_{ii}^0 \leftrightarrow (x_3, \nu_i)$. На рисунке 3

показаны области допустимых напряжений (незакрашенная область) при одноосном (рис. 3а) и двухосном вдоль оси x_1 (рис. 3б) НДС для ФГМ с «нормальной» неоднородностью (отмечена цифрой 5 на рис. 1).

Как следует из рисунка 3, диапазоны допустимых деформаций, хотя и отличаются при одноосных и двухосных НДС, но включают достаточно большие значения деформаций. В условиях динамических воздействий на материал критерий взаимно однозначного соответствия между напряжениями и деформациями не является оптимальным. Необходимы исследования других динамических характеристик, среди которых большое значение могут иметь дисперсионные свойства среды, а также структура поверхностного волнового поля.

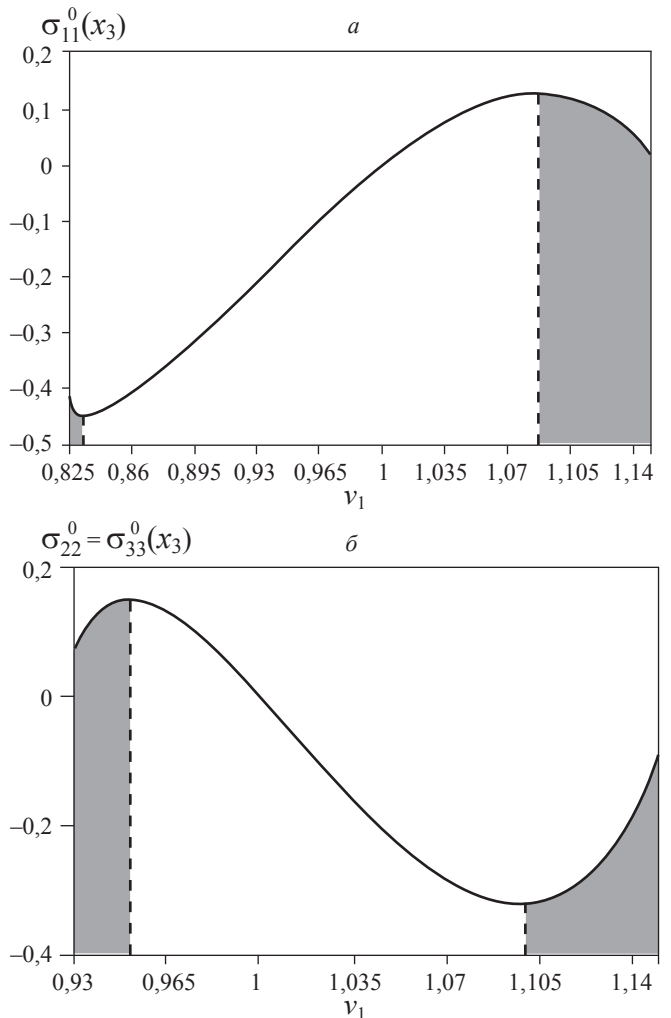


Рис. 3. Области допустимых деформаций при одноосном (а) и двухосном (б) начально-деформированном состоянии для функционально-градиентного материала с «нормальной» неоднородностью

Fig. 3. Areas of admissible deformations at uniaxial (a) and biaxial (b) SSS for FGM with the “standard” heterogeneity

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ
ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ГРАДИЕНТНОГО СЛОЯ НА ЕГО
ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

На примере задачи о сдвиговых колебаниях преднапряженного функционально-градиентного упругого слоя исследуем влияние типа неоднородности слоя, характера начальных воздействий на его динамические свойства. Решение краевой задачи имеет вид [4]

$$u_2(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k_{22}(x_1 - \xi, x_3, \omega) q(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$k_{22}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} K_{22}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad (8)$$

$$K_{22}(\alpha, x_3, \omega) = y_{21}(\alpha, x_3, \omega) [y_{11}(\alpha, h, \omega)]^{-1}, \quad (9)$$

$y_{jk}(\alpha, x_3, \omega)$ – линейно независимые решения задачи Коши с начальными условиями $y_{jk}(\alpha, 0, \omega)$.

СКОРОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН
В ПРЕДНАПРЯЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ

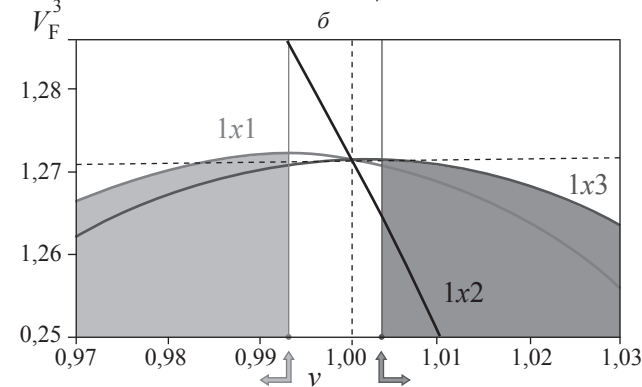
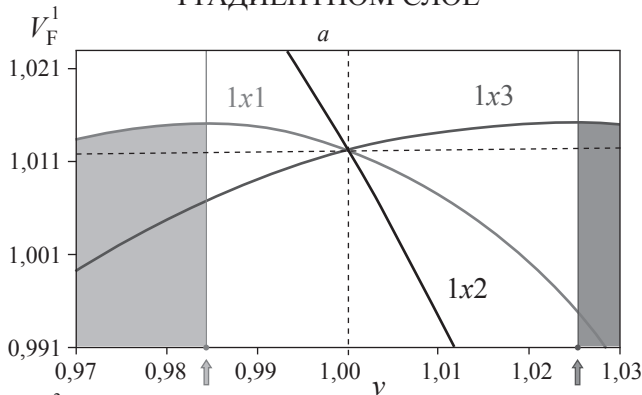


Рис. 4. Области допустимых деформаций для относительных фазовых скоростей первой и третьей мод
Fig. 4. Areas of admissible deformations for the relative phase velocities of the first and third modes

На рисунке 4 представлены графики, показывающие зависимости относительных фазовых скоростей V первой и третьей мод при значении волнового числа, равном 10, от деформации, которую наводят в слое одноосные напряжения. Как и ранее, на рисунке 4 закрашены области напряжений, которые создают в слое деформации, превышающие допустимые. Как следует из графиков, область допустимых значений для разных мод существенно различается, причем чем выше мода, тем диапазон допустимых значений меньше.

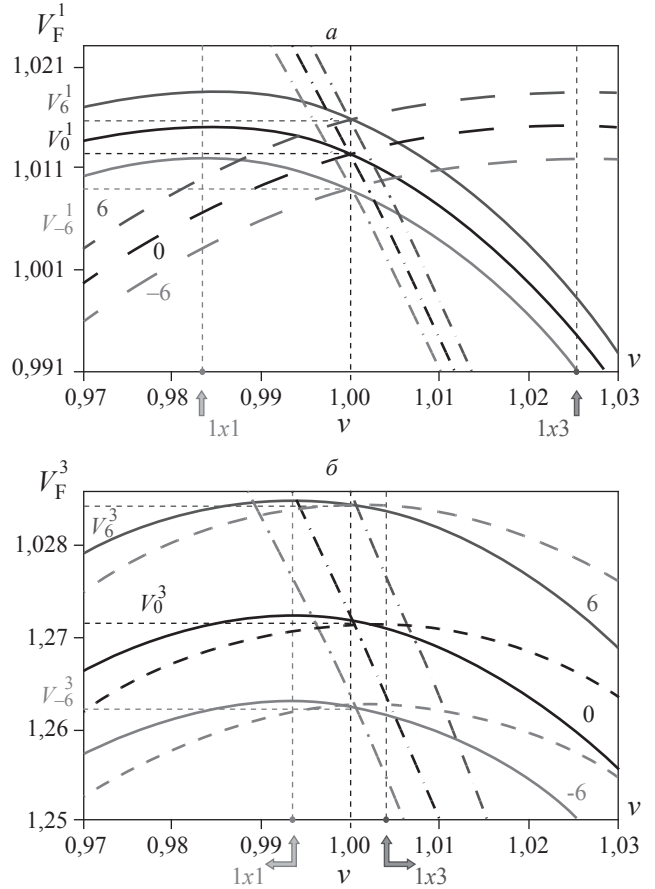


Рис. 5. Области допустимых деформаций для фазовых скоростей первой и третьей мод
Fig. 5. Areas of admissible deformations for the phase velocities of the first and third modes

На рисунке 5 показаны зависимости относительных фазовых скоростей первой и третьей мод при значении волнового числа 10 от деформации, которую наводят одноосные напряжения. На рисунке 5 представлены случаи «нормальной» (кривые б) и «аномальной» (кривые -б) неоднородности материала слоя. Сплошные линии на рисунках отвечают одноосным напряжениям вдоль x_1 , штриховые линии – одноосным напряжениям вдоль x_2 , штрих-пунктирные линии – одноосным напряжениям вдоль x_3 .

Из рисунка 5 видно, что диапазон «допустимых» напряжений частотно зависим, т.е. чем выше частота колебаний, тем меньшие деформации выдерживает материал.

Работа выполнена в рамках реализации Государственного задания на 2016 г. № 007-01114-16 ПР, номер проекта 0256-2014-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 1993. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством. *Прикладная математика и механика*. 57(4): 123–134.
2. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 1994. Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством. *Известия РАН. Механика твердого тела*. (6): 83–94.
3. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 1998. Динамика массивного тела, осциллирующего на поверхности предварительно напряженного слоя. *Известия РАН. Механика твердого тела*. (2): 89–102.
4. Калинин В.В., Белянкова Т.И. 2008. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полупространств тел*. М., Физматлит: 240 с.
5. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
6. Зубов Л.М., Рудев А.Н. 1994. Об условиях существования продольных волн в анизотропной нелинейно-упругой среде. *ДАН*. 334(2): 156–158.
7. Яковенко М.Г. 1979. Волны Релея и поверхностная неустойчивость в предварительно деформированной нелинейно-упругой полуплоскости. *Известия АН СССР. Сер. Физика Земли*. (2): 48–53.
8. Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. 2013. Потеря устойчивости прямоугольных плит из функционально-градиентных материалов. *Вестник Южного научного центра*. 9(2): 3–10.
1. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1993. The interaction of a vibrating punch with a prestressed half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 57(4): 713–724.
2. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1994. [Dynamics of a massive body interacting with a prestressed half-space]. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela. (Mechanics of Solids)*. (6): 83–94. (In Russian).
3. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 1998. [Dynamics of a massive body oscillating on the surface of a prestressed layer]. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids)*. (2): 89–102. (In Russian).
4. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2008. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh poluorganichennykh tel. [The dynamic contact problems for prestressed media]*. Moscow, Fizmatlit Publishers: 240 p. (In Russian).
5. Lurie A.I. 1980. *Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]*. Moscow, Nauka Publishers: 512 p. (In Russian).
6. Zubov L.M., Rudev A.N. 1994. [Conditions for the existence of longitudinal waves in an anisotropic nonlinear elastic medium]. *Doklady Akademii Nauk. (Doklady Mathematics)*. 334(2): 156–158. (In Russian).
7. Yakovenko M.G. 1979. [Rayleigh waves and surface instability in a prestrained nonlinearly elastic half-plane]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fizika Zemli*. (2): 48–53. (In Russian).
8. Sheydakov D.N., Mikhailova I.B. 2013. [Buckling of rectangular plates of functionally graded materials]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 9(2): 3–10. (In Russian).

Поступила 23.03.2016