

УДК 539.3

О КАВИТАЦИИ НА ОСИ КЛИНОВОЙ ДИСКЛИНАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2008 г. М.И. Карякин¹, О.Г. Пустовалова¹

С использованием различных моделей нелинейной теории упругости изучена возможность кавитации – существования решения, описывающего образование полости вокруг оси изолированной клиновой дисклинации в упругом цилиндре. Рассмотрены модели несжимаемой среды и проанализировано необходимое условие для функции удельной потенциальной энергии, допускающей образование полости. Проведено исследование влияния учета поверхностного натяжения и эффектов микроструктуры на порообразование. С использованием конкретной модели сжимаемого материала показано, что образование полости не является следствием гипотезы о несжимаемости.

В работах [1, 2] при моделировании кристаллических дисклинаций методами молекулярной динамики установлено, что ядро дисклинации может выступать как сток, на котором при достижении критической концентрации вакансий зарождается пора. В работах [3, 4] показано, что задачи о равновесии нелинейно-упругих тел с дислокациями и дисклинациями могут иметь так называемые сингулярные решения, описывающие образование полости вдоль оси дефекта в деформированном теле. В [4] для несжимаемых нелинейно-упругих материалов выведено интегральное соотношение, позволяющее определять радиус образующейся полости в зависимости от модели материала и параметров дефекта. Установлено, что состояние с полостью, как правило, является энергетически более выгодным. Корректный анализ вопросов, связанных с образованием полостей, требует учета поверхностных эффектов, т.е. как минимум учета в разрабатываемой теории поверхностной энергии. Для этого на примере задачи о клиновой дисклинации в настоящей работе дан отличный от изложенного в [4] и основанный на энергетических соображениях способ вывода соотношения для определения радиуса полости, образующейся около оси дефекта. Поскольку окрестность оси дисклинации – так называемое ядро – безусловно, представляет собой область высокой концентрации напряжений, учет эффектов микроструктуры при ее изучении в рамках континуальной механики представляется весьма актуальным. Еще одним фактором, свидетельст-

вующим об актуальности учета микроструктуры в теории упругих дислокаций, является использование этой теории при описании нанообъектов [5]. Простейшим способом учета структуры в рамках теории упругости является использование среды с моментными напряжениями – модели Коссера [6, 7], распространение которой на случай больших деформаций предложено в [8, 9]. В настоящей работе изучено влияние учета моментных напряжений на возможность порообразования вокруг оси нелинейно-упругого цилиндра с клиновой дисклинацией. Описанные выше исследования проведены в рамках нелинейной теории упругости несжимаемых материалов. Показанная в работе возможность существования разрывного решения при использовании для описания упругих свойств цилиндра модели Блейтца и Ко [10] (сжимаемого материала) доказывает, что образование полости не является следствием гипотезы о несжимаемости.

НЕСЖИМАЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Рассмотрим следующую деформацию сплошной среды:

$$\begin{aligned} R &= R(r), \\ \Phi &= \kappa\varphi, \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r , φ , z – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации упругого тела; R , Φ , Z – цилиндрические координаты в пространстве; κ – положительная постоянная.

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

Преобразование (1) описывает [11] распределение перемещений в круговом цилиндре с клиновой дисклинацией. При $\kappa < 1$ в цилиндр, предварительно разрезанный полуплоскостью $\varphi = 0$, вводится клин с углом раствора $2\pi(1 - \kappa)$. Если $\kappa > 1$, то из цилиндра извлекается сектор $2\pi\kappa^{-1} < \varphi < 2\pi$, края соединяются. Радиальные перемещения точек цилиндра описываются функцией $R(r)$.

Геометрические характеристики деформации (градиент деформации $\mathbf{C}$, мера деформации Коши–Грина $\mathbf{G}$, левый тензор искажений $\mathbf{U}$ [10]), соответствующие преобразованию (1), определяются выражениями

$$\mathbf{C} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \frac{\kappa R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z; \quad (2)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = R'^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left(\frac{\kappa R}{r}\right)^2 \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z; \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{1/2} = R' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\kappa R}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ – орты цилиндрических координат в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно; штрих здесь и ниже обозначает дифференцирование по переменной r .

Рассмотрим функционал удельной (на единицу длины цилиндра) потенциальной энергии деформации

$$\Pi = 2\pi \int_0^{\eta} r W(r, R, R') dr, \quad (5)$$

где $W = W(\mathbf{C})$ – упругий потенциал, зависящий от градиента деформации $\mathbf{C}$, r_1 – радиус недеформированного цилиндра.

Поскольку внешние силы отсутствуют, то, согласно вариационному принципу Лагранжа, истинное поле перемещений доставляет функционалу Π стационарное значение. Выберем в качестве возможных функции, удовлетворяющие условию несжимаемости

$$\det \mathbf{C} = 1, \quad (6)$$

т.е. функции вида

$$R(r) = \frac{\sqrt{r^2 + A^2}}{\sqrt{\kappa}}. \quad (7)$$

В этом случае функционал (5) превращается в функцию одной вещественной переменной A , а задача отыскания функции $R(r)$ сводится к задаче о стационарных значениях функции $\Pi(A)$.

Для производной $\frac{\partial \Pi}{\partial A}$ получаем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \int_0^{\eta} r \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \circ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial A} dr.$$

Обозначая производную $\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}$ через $\mathbf{S}$ и учитывая (2), для подынтегрального выражения получаем

$$r \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \circ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial A} = r \frac{\partial R'}{\partial A} S_{rR} + \kappa \frac{\partial R}{\partial A} S_{\varphi\varphi}.$$

Вычисляя $\frac{\partial R}{\partial A}$ и $\frac{\partial R'}{\partial A}$ с помощью (7), получаем, что условие стационарности функции $\Pi(A)$ принимает вид

$$2\pi\sqrt{\kappa}A \int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{r^2 + A^2}} (-R'^2 S_{rR} + S_{\varphi\varphi}) dr = 0.$$

Таким образом, функции вида (7) доставляют экстремальное значение функционалу энергии, если $A = 0$ либо A является решением уравнения

$$\int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{r^2 + A^2}} (-R'^2 S_{rR} + S_{\varphi\varphi}) dr = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) было получено в [4] путем непосредственного анализа краевой задачи равновесия тела с дефектом.

Учет поверхностного натяжения. Учет поверхностной энергии в задаче о кавитации сводится теперь к добавлению к выражению (5) для функционала энергии слагаемого, описывающего энергию новой образовавшейся поверхности. Функционал поверхностной энергии примем в форме [12]

$$\Omega = 2\pi R(0)\sigma,$$

где σ – постоянное поверхностное натяжение, $2\pi R(0)$ – длина окружности – сечения поверхности образовавшейся полости (как и в (5), энергия Ω отнесена к единице длины цилиндра).

Повторяя теперь приведенные выше выкладки для функционала $\Pi + \Omega$ и учитывая, что

$$R(0) = \frac{A}{\sqrt{\kappa}},$$

приходим к уравнению для определения радиуса образующейся полости при учете поверхностного натяжения

$$\int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{r^2 + A^2}} (-R'^2 S_{rR} + S_{\varphi\varphi}) dr + \frac{\sigma}{\kappa A} = 0. \quad (9)$$

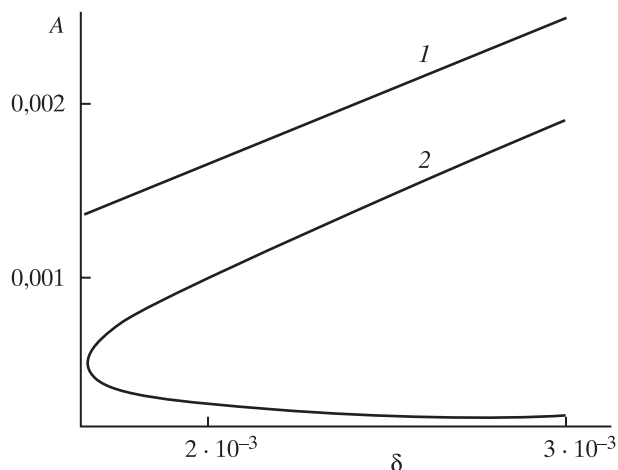


Рис. 1. Материал Зубова–Рудева: зависимость радиуса полости A от параметра дисклинации $\delta = 1 - \chi$ при учете поверхностного натяжения

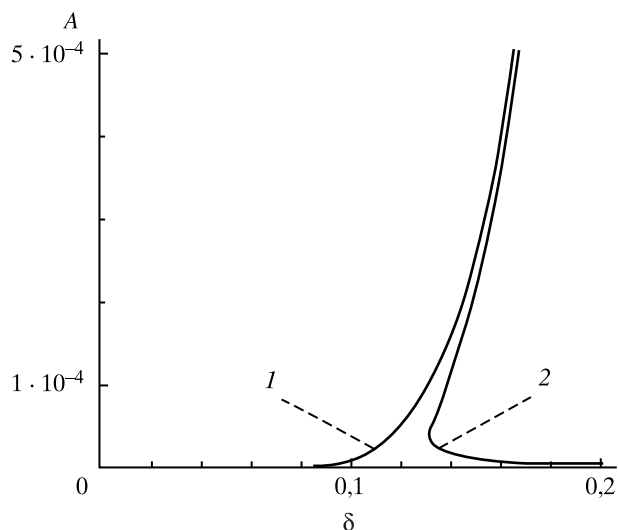


Рис. 2. Материал Бартенева–Хазановича: зависимость радиуса полости A от параметра дисклинации $\delta = 1 - \chi$ при учете поверхностного натяжения

Наличие в (9) дополнительного по сравнению с (8) слагаемого не расширяет описанный в [4] класс упругих потенциалов, допускающих сингулярное решение, поскольку сходимость интеграла (8) по-прежнему остается необходимым условием для существования решений уравнения (9).

В качестве примеров, следуя [4], рассмотрим два случая, когда интеграл в (9) вычисляется аналитически. Для модели материала Зубова–Рудева с упругим потенциалом $W = \mu[\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T) - 3]^{1/2}$ уравнение (9) записывается в виде

$$(\kappa + 1) \ln \left(\frac{1 + \kappa + 2\sqrt{\kappa}}{1 - \kappa} \frac{A}{1 + \sqrt{1 + A^2}} \right) -$$

$$-2\sqrt{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} + \frac{\gamma}{A} = 0;$$

$$\gamma = \frac{\sigma}{\mu r_1}.$$

Зависимость константы A/r_1 от параметра дисклинации $\delta = 1 - \chi$ приведена на рис. 1. Кривая 1 соответствует случаю $\gamma = 0$, кривая 2 – случаю $\gamma = 0,001$.

При использовании модели материала Бартенева–Хазановича с удельной потенциальной энергией $W = 2\mu \text{tr}[\mathbf{U} - \mathbf{I}]$ уравнение для определения радиуса полости с учетом (4) принимает вид

$$(\kappa - 1) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + A^2}}{A} + \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} + \frac{\gamma}{2A} = 0. \quad (10)$$

На рис. 2 приведены результаты численного решения уравнения (10) при значении параметра $\gamma = 0,0001$. Кривая 1 соответствует отсутствию поверхностного натяжения $\gamma = 0$. Кривая 2 состоит из двух частей, поскольку при любом значении параметра дисклинации $\delta = 1 - \chi$, превосходящего некоторое критическое значение, уравнение (10) имеет два корня. Причина появления второго корня может быть выяснена при анализе зависимости функции энергии Π и ее производной $\frac{\partial \Pi}{\partial A}$ от параметра A , которая схематически представлена на рис. 3.

Из приведенной схемы видно, что при фиксированном значении параметра дисклинации появление и увеличение поверхностного натяжения ($\gamma_2 > \gamma_1 > \gamma_0$) приводит к сближению корней $A = 0$ и $A = A_0$, а затем к их исчезновению. Вместе с тем видно, что меньший корень соответствует неустойчивому состоянию, поскольку энергия Π в этом случае имеет максимум.

Из приведенных на рис. 1, 2 графиков видно, что при учете поверхностной энергии образование полости возможно лишь при достижении параметром дисклинации δ некоторого критического значения δ_* , называемого критической мощностью дисклинации. В случае материала Бартенева–Хазановича эта величина может быть найдена по формуле

$$\delta_* = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + A_0^2}} + \frac{\gamma}{2A_0} \right) \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 + A_0^2}}{A_0} \right)^{-1},$$

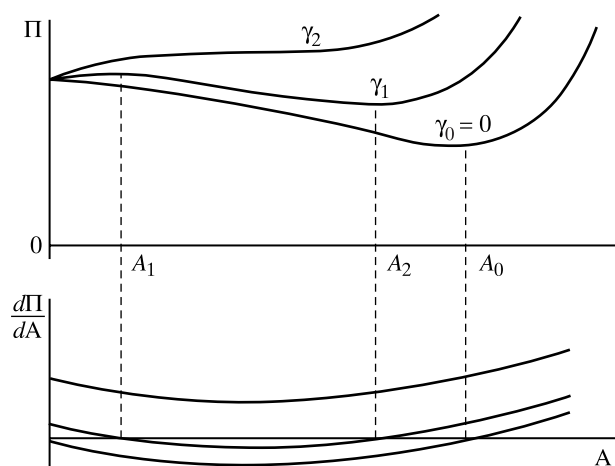


Рис. 3. Влияние поверхностного натяжения γ на зависимость энергии от радиуса полости A

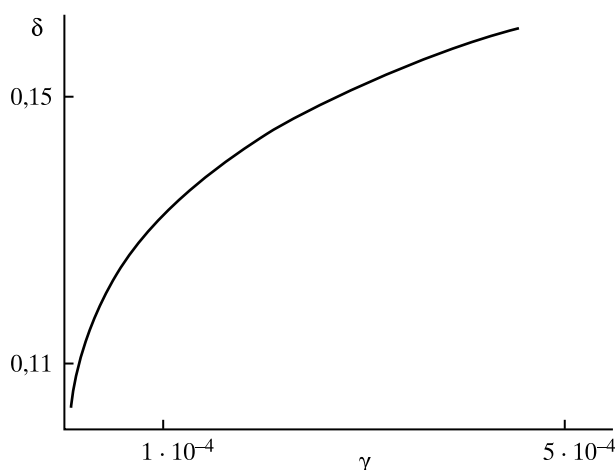


Рис. 4. Зависимости критической мощности дисклинации δ от коэффициента поверхностного натяжения γ

где A_0 – решение уравнения

$$\begin{aligned} & (A^4\gamma + (2\sqrt{1+A^2} + 2)A^3 + 2A^2\gamma + \\ & + (A^2 + 1)^{3/2}\gamma + \gamma) \ln \frac{1 + \sqrt{1+A^2}}{A} + \\ & + (2\sqrt{1+A^2} - 2)A^3 - A^2\gamma - \\ & - 2(2 + (A^2 + 1)^{3/2}A - \\ & - (A^2 + 1)^{3/2}\gamma - \gamma = 0. \end{aligned}$$

На рис. 4 приведен график зависимости критической мощности дисклинации от параметра γ .

УЧЕТ МИКРОСТРУКТУРЫ

Структура материала в окрестности ядра дисклинации будет учитываться при помощи среды Коссера. В модели континуума Коссера [6, 7] каждая частица сплошной среды имеет степени свободы абсолютно твердого тела. Положение частицы в деформированной конфигурации определяется радиусом-вектором R и собственно ортогональным тензором $\mathbf{H}$, называемым тензором микроповорота. Упругий потенциал W является функцией двух тензоров второго ранга – мерой деформации $\mathbf{Y}$ и тензора изгибной деформации $\mathbf{L}$. Тензоры $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{L}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T \quad (11)$$

$$\mathring{\nabla} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = -\mathbf{L} \times \mathbf{I}. \quad (12)$$

Уравнения равновесия в континууме Коссера имеют вид

$$\mathring{\nabla} \cdot (\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H}) = 0; \quad (13)$$

$$\mathring{\nabla} \cdot (\mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H}) + \left(\mathring{\nabla} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{H} \right)_{\times} = 0; \quad (14)$$

$$\mathbf{T}^* = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{Y}}, \quad \mathbf{M}^* = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}},$$

$\mathbf{I}$ – единичный тензор.

На свободной боковой поверхности цилиндра кроме силовых должны выполняться и моментные граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (15)$$

Псевдоконтинуум Коссера предполагает наличие связи [7]

$$\mathbf{Y}_{\times} = 0,$$

означающей совпадение собственных поворотов частиц сплошной среды с их поворотами вследствие деформации тела.

Полуобратное представление деформации среды определяется (1). Поскольку деформация является плоской, справедливо следующее полуобратное представление для тензора микроповорота $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \cos \chi(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\Phi) + \\ & + \sin \chi(r)(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\Phi - \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_R) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\chi(r)$ – функция, задающая собственный поворот частицы среды (вокруг вектора $\mathbf{e}_z$), не связанный с деформацией. С помощью (2), (11), (12), (16)

определяем $\mathbf{Y}$, $\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= R' \cos \chi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\kappa R}{r} \cos \chi \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \\ &+ \frac{\kappa R}{r} \sin \chi \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r - R' \sin \chi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{L} &= \chi' \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z + \frac{\kappa - 1}{r} \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Функции $R(r)$, $\chi(r)$ определяются из уравнений равновесия (13), (14). В случае несжимаемого материала $R(r)$ определяется соотношением (7), которое следует из (6).

В псевдоконтинууме Коссера вследствие выполнения условия (15)

$$\chi(r) = 0,$$

тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z,$$

$$\mathbf{Y} = R' \cos \chi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\kappa R}{r} \cos \chi \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z.$$

Ограничиваясь нелинейно-упругими потенциалами вида

$$W = W_Y(\mathbf{Y}) + W_L(\mathbf{L}), \quad (17)$$

получаем, что для несжимаемого псевдоконтинуума Коссера учет моментных напряжений в задаче о дисклинации не приводит к качественно новым результатам. Возможность или невозможность порообразования определяется первым слагаемым в (17), а зависимость радиуса полости от параметра дисклинации находится из (8).

Переходя к общему случаю, рассмотрим шестиконстантный потенциал несжимаемой среды Коссера

$$\begin{aligned}W &= \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2 \mathbf{E} + \frac{\mu + \alpha}{2} \text{tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T) + \frac{\mu - \alpha}{2} \text{tr} \mathbf{E}^2 + \\ &+ \frac{\delta}{2} \text{tr}^2 \mathbf{L} + \frac{\gamma + \eta}{2} \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} \text{tr} \mathbf{L}^2, \quad (18)\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{I}.$$

Предположение $\chi(r) = 0$ позволяет тождественно удовлетворить моментным уравнениям равновесия и граничным условиям. Как и в случае псевдоконтинуума, оказывается, что «моментные» слагаемые в (18) не влияют на возможность образования полости, так как не входят в соотношение (8).

Рассмотрим несжимаемый континуум Коссера и упругий потенциал

$$W = \mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{I}) + \frac{\gamma + \eta}{2} \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} \text{tr} \mathbf{L}^2$$

и откажемся от предварительного предположения о том, что $\chi(r) = 0$. В этом случае получаем два силовых

$$\begin{aligned}rpRR'' + (rp + 2\mu R((1 - \kappa) \cos \chi - r\chi' \sin \chi))R'^2 - \\ - (p + rp')RR' = 0, \quad (19) \\ (\cos \chi)\chi' + (1 - \kappa) \sin \chi = 0\end{aligned}$$

и одно моментное уравнение равновесия

$$\begin{aligned}(\gamma + \eta) \left(\chi'' + \frac{1}{r} \chi' \right) + (2\mu R' - p \cos \chi) \sin \chi + \\ + 2p \cos \chi \sin \chi - (rp \cos \chi - 2\mu \kappa R) \frac{\sin \chi}{r} = 0. \quad (20)\end{aligned}$$

Решая второе из уравнений (19) относительно $\chi(r)$, получаем

$$\chi(r) = \arcsin(C_1 r^{\kappa-1}). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), после упрощений с учетом выражения (1) для $R(r)$, получаем

$$\begin{aligned}C_1 [r^{\kappa+1} (\kappa - 1)^2 (\gamma + \eta) \sqrt{r^2 + A} - \\ - 2\mu \sqrt{r^2 - C_1 r^{2\kappa}} (-r^{\kappa+1} + \\ + C_1 r^{3\kappa-1}) (r^2 + \kappa(r^2 + A))] = 0. \quad (22)\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках в (22) нельзя сделать тождественно равным нулю ни при каком значении C_1 . Следовательно, единственно возможным условием удовлетворения (22) является равенство C_1 нулю. Это означает, что система уравнений (19) и (20) совместна лишь при $\chi(r) \equiv 0$.

Таким образом, показано, что для широкого класса моделей сред с микроструктурой учет моментных напряжений не влияет на возможность образования полости вдоль оси изолированной дисклинации.

УЧЕТ СЖИМАЕМОСТИ

Для доказательства независимости существования разрывных решений от использованной выше гипотезы несжимаемости рассмотрим задачу о дисклинации при использовании для описания свойств цилиндра упрощенной модели Блейтца и Ко [10] сжимаемого нелинейно-упругого материала. Определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы принимает в этом случае вид

$$\mathbf{D} = \frac{\mu}{I_3} [I_1 \mathbf{I} - \mathbf{G} + (I_3^{3/2} - I_2) \mathbf{G}^{-1}] \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{R}.$$

В силу (2), (3) тензор $\mathbf{D}$ имеет диагональную структуру: тельно получаем

$$\mathbf{D}_{rR} = \mu \left[\kappa \frac{R}{r} - (R')^{-3} \right],$$

$$\mathbf{D}_{\varphi\varphi} = \mu \left[R' - \frac{r^3}{\kappa^3 R^3} \right],$$

$$\mathbf{D}_{zz} = \mu \left[\frac{\kappa R R'}{r} - 1 \right].$$

$$R(r) = \sqrt[4]{\frac{1}{\kappa \beta^3} r_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^\beta}. \quad (28)$$

Подробный анализ полей деформаций и напряжений, соответствующих решению (28), был дан в [13].

3) Квадратурное решение

$$\int \frac{dy}{y[y^3 + \kappa^2(3y - 4)]} = -\frac{1}{3\kappa^2} \xi. \quad (29)$$

С учетом (23) уравнения равновесия $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ сводятся к одному уравнению для функции $R(r)$, имеющему вид

$$3R'' - \frac{1}{r} R' + \frac{r^2 (R')^4}{\kappa^2 R^3} = 0. \quad (24)$$

Условием незагруженности боковой поверхности $r = r_1$ служит соотношение

$$\kappa \frac{R(r_1)}{r_1} = [R'(r_1)]^{-3}. \quad (25)$$

С помощью последовательных замен

$$R(r) = \exp[f(\xi)],$$

$$\xi = \ln r,$$

$$\frac{df}{d\xi} = y(\xi)$$

уравнение (24) приводится к виду

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{1}{3\kappa^2} y[y^3 + \kappa^2(3y - 4)]. \quad (26)$$

Уравнение (26) имеет три различных решения. Рассмотрим каждое из них.

1) $y = 0$. Этому случаю соответствует решение уравнения (24) вида $R(r) = \text{const}$, что, очевидно, не имеет физического смысла. Поэтому данное решение следует отбросить.

2) $y = \beta$, где β – корень уравнения $\beta^3 + \kappa^2(3\beta - 4) = 0$. Это уравнение имеет единственный вещественный корень

$$\beta = \kappa^{2/3} \left(\sqrt[3]{\sqrt{4 + \kappa^2} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{4 + \kappa^2} - 2} \right).$$

Возвращаясь к уравнению (24), получаем, что оно имеет решение вида

$$R(r) = C_1 r^\beta. \quad (27)$$

Решение (27) автоматически удовлетворяет условию сплошности $R(0) = 0$, а константа C_1 может быть найдена из краевого условия (25). Оконча-

Покажем, что решению (29) соответствует решение уравнения (24), не обращающееся в нуль на оси цилиндра при $r = 0$. Для этого, вычисляя неопределенный интеграл и преобразовывая, запишем (29) в виде

$$\omega(y) - \frac{\kappa^2}{\beta} \ln \left| 1 - \frac{\beta}{y} \right| - \frac{\beta}{3} \ln \left| 1 + \frac{x^2}{y^3} (3y - 4) \right| =$$

$$= \frac{4(\beta^2 + \kappa^2)}{3\beta} \xi + C_2;$$

$$\omega(y) = \frac{6\kappa^2 - 4/3\beta^2}{\sqrt{12\kappa^2 + 3\beta^2}} \arctg \frac{2y + \kappa^2 + \beta^2}{\sqrt{12\kappa^2 + 3\beta^2}}, \quad (30)$$

где C_2 – произвольная постоянная. Значению $r = 0$ соответствует значение $\xi = -\infty$, поэтому необходимо определить поведение решения (29) при $\xi \rightarrow -\infty$.

В силу ограниченности $\omega(y)$ из (30) следует, что

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} y(\xi) = 0.$$

Для уточнения этого результата, вводя обозначения

$$\omega_1(y) = \exp[\omega(y)],$$

$$K = \beta^{-\kappa^2/\beta} (4\kappa^2)^{-\beta/3},$$

$$\varepsilon(y) = \left| 1 - \frac{\beta}{y} \right|^{-\kappa^2/\beta} \left| 1 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4\kappa^2}y^3 \right|^{-\beta/3} - 1,$$

$$C_3 = \exp(C_2),$$

преобразуем (30) к виду

$$K\omega_1(y)[1 + \varepsilon(y)]y^{(\kappa^2 + \beta^2)/\beta} =$$

$$= C_3 \exp \left[\frac{4(\kappa^2 + \beta^2)}{3\beta} \xi \right].$$

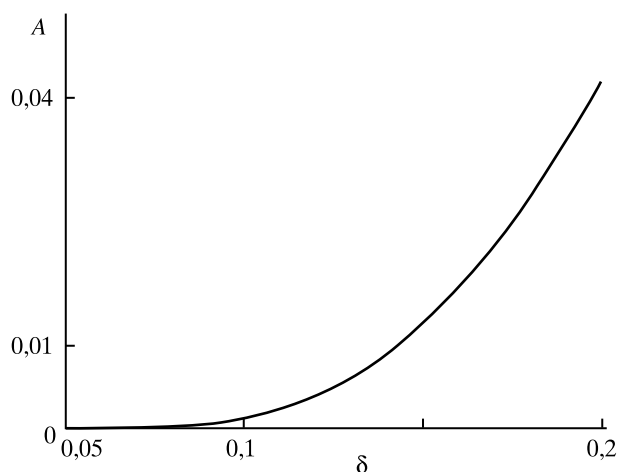


Рис. 5. Зависимость радиуса образующей полости A от параметра дисклинации δ

Учитывая, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \omega_1(y) = \omega_1(0) < \infty,$$

$$\varepsilon(y) \approx \left(\frac{\kappa}{\beta^2} - \frac{\beta}{4} \right) y \text{ при } y \rightarrow 0,$$

получим асимптотическую формулу для $y(\xi)$:

$$y \approx C_4 \exp\left(\frac{4}{3}\xi\right), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где $C_4 = C_3[K\omega_1(0)]^{-\beta/(\beta^2 + \kappa^2)}$ – произвольная постоянная. Отсюда сразу получаем представление для $R(r)$ в окрестности точки $r = 0$:

$$R(r) \approx A \exp(B[r^{4/3} + o(r^{4/3})]), \quad (31)$$

где A и B – произвольные постоянные. Символом $o(r^{4/3})$ обозначены слагаемые, убывающие при $r \rightarrow 0$ быстрее, чем $r^{4/3}$. Константа $A = R(0)$ в (31) не равна нулю, иначе функция $R(r)$ была бы тождественно равна нулю, что не имеет смысла.

Таким образом, уравнение (24) имеет два физически различных решения. Первое удовлетворяет условию сплошности, второе описывает деформацию, сопровождающуюся возникновением полости на оси цилиндра. Заметим, что для данной модели материала задача о винтовой дислокации [14] вообще не имеет решения первого типа.

В качестве краевого условия в точке $r = 0$ для второго решения, как и в [4], будем использовать

условие отсутствия напряжений на поверхности образовавшейся полости

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[\kappa \frac{R(r_0)}{r_0} - (R'(r_0))^{-3} \right] = 0. \quad (32)$$

Подставляя (31) в (32), получаем связь между константами A и B . Представление (31) для $R(r)$ в окрестности нуля принимает вид

$$R(r) \approx A + \frac{3}{4}(\kappa A)^{-1/3} r^{4/3}. \quad (33)$$

Получение следующих членов в асимптотическом разложении (33) не трудно. Зависимость константы A , представляющей собой радиус возникающей полости, от параметра дисклинации была определена численно. Расчеты показали, что решения подобного вида, удовлетворяющие и второму краевому условию, существуют лишь при $\kappa < 1$ (положительная дисклинация). Зависимость радиуса образующей полости от параметра $\delta = \kappa - 1$ изображена на рис. 5.

Для компонент тензора напряжений Коши T , связанного с тензором Пиолы D соотношением $T = \det(C)^{-1} C^T \cdot D$, с учетом асимптотики (30) получаем предельные соотношения вида

$$T_{RR} \rightarrow 0, \quad T_{\Phi\Phi} \rightarrow \mu, \quad T_{ZZ} \rightarrow \mu.$$

Следует подчеркнуть, что найденные решения не являются двумя различными решениями одной нелинейной краевой задачи. Каждое из них удовлетворяет своей задаче равновесия, отличающейся от другой краевым условием в нуле. Можно показать, что оба эти решения устойчивы относительно малых радиальных возмущений.

Выводы о предпочтительности решения, описывающего образование полости, могут быть сделаны на основе сравнения упругих энергий, соответствующих двум состояниям. В случае $\kappa < 1$ вычисления по формуле (5) для решения (28) дают

$$\Pi = 2\pi\mu_1^2(\kappa^{1/2}\beta^{-3/2} - 1).$$

Упругая энергия цилиндра с полостью определялась численно. Расчеты показали, что как и в случае несжимаемых материалов энергия сплошного цилиндра превосходит энергию первого. Разница в энергиях достаточно мала при значениях параметра κ , близких к единице (0,002% при $\kappa = 0,9$), и быстро возрастает с уменьшением κ (9% при $\kappa = 0,7$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Doyama M., Cotterill R.M.J.* Atomic configuration of disclination by computer simulation // *Phil. Mag. A*. 1984. V. 50. N 4. L7-L10.
2. *Михайлин А.И., Романов А.Е.* Амorfизация ядра дисклинации // *ФТТ*. 1986. Т. 28. Вып. 2. С. 601–603.
3. *Еремеев В.А., Зубов Л.М., Карякин М.И., Чернега Н.Я.* Образование полостей в нелинейно-упругих телах с дислокациями и дисклинациями // *Докл. РАН*. 1992. Т. 326. № 6. С. 968–971.
4. *Карякин М.И., Пустовалова О.Г.* О сингулярных решениях задач нелинейной теории упругих дислокаций // *ПМТФ*. 1995. Т. 36. № 5. С. 173–180.
5. *Charlier J.C., Iijima S.* Growth Mechanisms of Carbon Nanotubes // *Carbon Nanotubes, Topics Appl. Phys.* 80. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. P. 55–81.
6. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // *Механика: Сб. перев.* 1965. № 3(91). С. 89–112.
7. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // *Механика: Сб. перев.* 1965. № 3 (91). С. 113–140.
8. *Шкутин Л.И.* Нелинейные модели деформируемых моментных сред // *ПМТФ*. 1980. № 6. С. 111–117.
9. *Зубов Л.М., Карякин М.И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями // *ПМТФ*. 1990. № 3. С. 160–167.
10. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. *Зубов Л.М.* Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1986. № 1. С. 69–73.
12. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
13. *Карякин М.И.* О напряжениях, создаваемых изолированной дисклинацией в нелинейно-упругом теле // *Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки*. 1988. № 1. С. 58–63.
14. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 205 p.

ON THE CAVITATION ALONG THE WEDGE DISCLINATION LINE IN NONLINEARLY ELASTIC CYLINDER

M.I. Karyakin, O.G. Pustovalova

By means of different models of nonlinear elasticity a problem on cavity formation along the axis of isolated screw disclination was investigated. The models of incompressible media were used and necessary condition for the elastic potential energy function was analyzed. The influence of surface tension and microstructure effects upon the hole formation was studied. With usage of one partial model of compressible material it was shown that the possibility of the hole formation is not consequence of the incompressibility hypothesis.

REFERENCES

1. Doyama M., Cotterill R.M.J. 1984. Atomic configuration of disclination by computer simulation. *Philosophical Magazine A*. 50(4): L7–L10.
2. Mikhaylin A.I., Romanov A.E. 1996. [Amorphization of disclinations core]. *Fizika tverdogo tela*. 28(2): 601–603. (In Russian).
3. Eremeev V.A., Zubov L.M., Karyakin M.I., Chernega N.Ya. 1992. [Formation of cavities in nonlinear elastic bodies with dislocations and disclinations]. *Doklady akademii nauk*. 326(6): 968–971. (In Russian).
4. Karyakin M.I., Pustovalova O.G. 1995. Singular solutions of the problems of the nonlinear theory of elastic dislocations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 36(5): 789–795.
5. Charlier J.C., Iijima S. 2001. Growth Mechanisms of Carbon Nanotubes. In: *Topics in Applied Physics. Vol. 80. Carbon Nanotubes*. Berlin, Springer-Verlag: 55–81.
6. Koiter W.T. 1964. Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I-II. In: *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series B*. 67(1): 17–44.
7. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(5): 85–112.
8. Shkutin L.I. 1980. Nonlinear models of deformable media with couple-stresses. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 21(6): 826–831.
9. Zubov L.M., Karyakin M.I. 1990. Dislocations and disclinations in nonlinear elastic bodies with moment stresses. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 31(3): 493–500.
10. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
11. Zubov L.M. 1986. [Isolated disclination in nonlinear elastic compressible body]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. (1): 69–73. (In Russian).
12. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. 1965. *Dinamika tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'*. [Dynamics of bodies with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka: 440 p. (In Russian).
13. Karyakin M.I. 1988. [Stresses created by isolated disclination in nonlinear elastic body]. *Izvestiya SKNTs VSh. Estestvennye nauki*. (1): 58–63. (In Russian).
14. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin, Springer: 205 p.