

УДК 539.3

ДИСЛОКАЦИИ И ДИСКЛИНАЦИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

© 2008 г. Л.М. Зубов¹

В рамках классической теории Кирхгофа–Лява рассматривается задача о напряженном состоянии тонкой упругой оболочки, содержащей дислокации и дисклинации. Дана постановка задачи о равновесии многосвязной оболочки с дислокациями Вольтерра, характеристики которых заданы. Путем предельного перехода от дискретного набора изолированных дефектов к их непрерывному распределению построена линейная теория оболочек с распределенными дислокациями и дисклинациями. Установлен принцип двойственности теории оболочек, состоящий в математической эквивалентности краевой задачи о напряженном состоянии оболочки, обусловленном непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями и краевой задачи о равновесии оболочки под действием заданных распределенных нагрузок. Сформулирована проблема бесконечно малых изгибов поверхности при наличии распределенных дислокаций. Решена задача об изгибании замкнутой сферы с непрерывно распределенными дислокациями. Найдено нетривиальное гладкое поле поворотов элементарных площадок сферы с дислокациями при ее изометрической деформации.

Ключевые слова: многосвязная оболочка, бесконечно малые изгибы, непрерывно распределенные дефекты.

1. Исходные соотношения. Упругие свойства тонкой оболочки в рамках теории типа Кирхгофа–Лява [1–3] определяются заданием функции удельной (на единицу площади срединной поверхности) потенциальной энергии деформации W ,

$$W = W(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[(\text{grad } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\text{grad } \mathbf{u})^T] - \mathbf{b}w = \\ = \frac{1}{2}[(\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g}(\text{grad } \mathbf{v})^T],$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = -\text{grad } \mathbf{n},$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^T = (\text{grad } \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{b} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T,$$

$$\boldsymbol{\theta} = \text{grad } w + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{grad } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha}, \quad (2)$$

$$\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{r}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к поверхности оболочки σ , $\mathbf{g}$ и $\mathbf{b}$ – первый и второй фундаментальные тензоры на σ [3], $\mathbf{E}$ – трехмерный единичный тензор, $\mathbf{v}$ – векторное поле смещений

поверхности σ , w – нормальный прогиб, $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ – тензоры соответственно тангенциальных и изгибных деформаций оболочки, y^α – гауссовы координаты на σ , $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки поверхности σ , δ_β^α – символ Кронекера, $\Phi(y^1, y^2)$ – некоторое дифференцируемое тензорное поле произвольного ранга, grad – оператор градиента на поверхности [3]. Ниже будут также использоваться операторы дивергенции и ротора на σ :

$$\text{div } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha}, \quad \text{rot } \Phi = \mathbf{r}^\alpha \times \frac{\partial \Phi}{\partial y^\alpha}.$$

Введя в рассмотрение векторное поле поворотов $\boldsymbol{\omega}$ [1–3]

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{u})\mathbf{n}, \quad (3)$$

из (1), (3) получим

$$\text{grad } \mathbf{v} = \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

Если оболочка, рассматриваемая как двумерный континуум, т.е. как материальная поверхность σ , перемещается как абсолютно твердое тело, то поле смещений имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{r}_0$ – постоянные векторы. В этом случае из (1)–(3) получаем соотношения $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\kappa} = 0$,

¹ Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105; тел. 8 (863) 2975-114(110); e-mail: zubov@math.rsu.ru.

$\omega = \omega_0$, разъясняющие геометрический смысл величин ϵ , κ и ω . Вместо тензора κ в качестве меры изгибной деформации можно применять [3, 4] симметричный тензор k ,

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}[(\text{grad } \omega) \cdot e - e \cdot (\text{grad } \omega)^T] = \\ &= \kappa - \frac{1}{2}(b \cdot \epsilon + \epsilon \cdot b), \\ e &= -n \times g, \end{aligned} \quad (5)$$

где e – дискриминантный тензор поверхности.

Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах могут быть представлены [3] в форме одного векторного уравнения относительно симметричного тензора мембранных усилий T и симметричного тензора моментов M :

$$\begin{aligned} \text{div} \left[T + \frac{1}{2}(b \cdot M - M \cdot b) + g \cdot (\text{div } M) \otimes n \right] + \\ + \text{div}(\mu \times n \otimes n) + f = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь f – интенсивность распределенной по поверхности σ внешней силовой нагрузки, μ – интенсивность распределенного по σ внешнего момента. Заметим, что в уравнении равновесия (6) не участвует нормальная составляющая $\mu \cdot n$ внешней моментной нагрузки. Симметричные тензоры усилий и моментов выражаются через деформации оболочки при помощи определяющих соотношений [3, 4]

$$T = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}, \quad M = -\frac{\partial W}{\partial k}. \quad (7)$$

2. Уравнения несовместности. Рассмотрим задачу определения поля перемещений оболочки по заданным полям тензора деформаций ϵ и вектора поворотов ω , которые предполагаются дифференцируемыми функциями координат на поверхности σ . На основании (4) имеем

$$v(r) = \int_{r_0}^r dr \cdot (\epsilon - g \times \omega) + v(r_0), \quad dr_0 = r_\alpha dy^\alpha \quad (8)$$

Если поверхность σ односвязна, то необходимое и достаточное условие независимости интеграла в (8) от пути интегрирования заключается в выполнении равенства

$$\text{div}(e \cdot \epsilon) = \text{div}(e \times \omega). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь некоторый участок σ_0 поверхности оболочки и предположим, что область σ_0 многосвязна и гомеоморфна кругу с круговыми отверстиями, а функции ϵ и ω однозначны в этой многосвязной области. Поле пере-

мещений в этом случае будет, вообще говоря, обладать неоднозначностью, состоящей в том, что при обходе замкнутого контура, охватывающего одно из отверстий, вектор v получает приращение, равное вектору Бюргерса B_s :

$$B_s = \oint_{\gamma_s} dr \cdot (\epsilon - g \times \omega). \quad (10)$$

Вектор B_s не зависит от выбора контура γ_s при условии, что контур охватывает только одно s -е отверстие. При помощи (10) найдем суммарный вектор Бюргерса для системы дислокационных дефектов, расположенных на участке σ_0 поверхности σ :

$$B = \sum_s B_s = \sum_s \oint_{\gamma_s} dr \cdot (\epsilon - g \times \omega). \quad (11)$$

В силу известных свойств криволинейных интегралов и однозначности полей ϵ и ω сумму интегралов в (11) можно заменить одним интегралом по замкнутому контуру γ_0 , охватывающему все отверстия в области σ_0 :

$$B = \oint_{\gamma_0} dr \cdot (\epsilon - g \times \omega). \quad (12)$$

Для перехода от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению диаметры отверстий устремляем к нулю, а поля тензора ϵ и вектора ω считаем дифференцируемыми функциями в области σ_0 , ограниченной контуром γ_0 . Преобразуя контурный интеграл в (12), получим

$$B = \iint_{\sigma_0} \alpha d\sigma, \quad \alpha = \text{div}(e \cdot \epsilon - e \times \omega). \quad (13)$$

Поскольку B – суммарный вектор Бюргерса всех дислокаций, содержащихся в области σ_0 , векторную величину α следует назвать плотностью дислокаций. При $\alpha = 0$ соотношение (13) переходит в уравнение (9).

Далее предположим, что часть оболочки, содержащая непрерывно распределенные дислокации, занимает многосвязную область, и поставим задачу об определении поля поворотов ω в многосвязной области по заданным однозначным и дифференцируемым полям ϵ , κ и α . Теперь мы отказываемся от требования однозначности поворотов. Составим на основании (1), (2), (3), (13) уравнение для определения поля поворотов. Из (1) находим

$$\begin{aligned} (\text{grad } \omega) \cdot n \otimes n &= g \cdot (\gamma - \alpha) \otimes n, \\ \gamma &\equiv \text{div}(e \cdot \epsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Из определения тензора κ (2) имеем

$$(\text{grad } \omega) \cdot e = \kappa - b \cdot \epsilon,$$

откуда и из (5), (14) получаем

$$\text{grad} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L}, \quad (15)$$

$$\mathbf{L} \equiv -\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{g} \cdot (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha}) \otimes \mathbf{n}.$$

Важно отметить, что в правой части уравнения (15) не участвует нормальная составляющая плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}$, соответствующая винтовым дислокациям. Интегрирование уравнения (15) дает

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0). \quad (16)$$

Выполнение условия $\text{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}) = 0$ в односвязной области гарантирует независимость интеграла в (16) от выбора кривой, соединяющей точки $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$.

В многосвязной области поле поворотов, задаваемое формулой (16), вообще говоря, неоднозначно. При обходе замкнутого контура, охватывающего одно из отверстий, вектор $\boldsymbol{\omega}$ получает приращение, равное вектору Франка

$$\mathbf{Q}_k = \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}.$$

Отличие от нуля постоянных $\mathbf{Q}_k$ означает существование изолированных дисклинаций в многосвязной оболочке с непрерывно распределенными дислокациями. Суммарный вектор Франка дискретного набора дисклинаций выражается формулой

$$\mathbf{Q} = \sum_k \mathbf{Q}_k = \sum_k \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \oint_{\gamma_0} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}. \quad (17)$$

Рассуждая аналогично предыдущему, перейдем от дискретного набора дисклинаций к их непрерывному распределению с векторной плотностью $\boldsymbol{\beta}$, для которой получается выражение

$$\boldsymbol{\beta} = \text{div}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{L}). \quad (18)$$

Считая плотности дислокаций и дисклинаций заданными функциями координат на поверхности, из (15) и (18) приходим к уравнению несовместности теории оболочек

$$\begin{aligned} \text{div} \left[\mathbf{k}' + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' - \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{g} \cdot (\text{div} \boldsymbol{\epsilon}') \otimes \mathbf{n} \right] + \\ + \text{div}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \boldsymbol{\beta} = 0, \quad (19) \\ \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда дисклинации отсутствуют ($\boldsymbol{\beta} = 0$), уравнение (19) было выведено ранее [5]. При $\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\boldsymbol{\beta} = 0$ оно переходит в из-

вестное [4, 5] уравнение совместности (неразрывности) теории оболочек типа Кирхгофа–Лява.

Заметим, что, поскольку нормальная составляющая вектора плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}$ не входит в уравнение несовместности (19), двумерная модель оболочки типа Кирхгофа–Лява не позволяет рассматривать непрерывное распределение винтовых дислокаций. Учет непрерывно распределенных винтовых дислокаций возможен в рамках двумерной теории оболочек типа Коссера [6].

Между уравнениями равновесия (6) и уравнениями несовместности (19) обнаруживается статико-геометрическая аналогия, согласно которой эти уравнения переходят друг в друга при заменах $\mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{k}'$, $\mathbf{M} \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}'$, $\boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{f} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}$.

Ранее статико-геометрическая аналогия была известна [1, 2, 4] для оболочки без дислокаций, дисклинаций и поверхностных нагрузок.

В случае изотропного материала уравнения состояния оболочки имеют вид [3]

$$\mathbf{T} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\boldsymbol{\epsilon} + \nu \mathbf{g} \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}], \quad (20)$$

$$\mathbf{M} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)\mathbf{k} + \nu \mathbf{g} \text{tr} \mathbf{k}],$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки.

3. Принцип двойственности. Рассмотрим краевую задачу о равновесии оболочки с заданными плотностями дислокаций и дисклинаций. Нагрузки, распределенную по поверхности оболочки $\boldsymbol{\sigma}$, будем считать отсутствующей. Исходя из статико-геометрической аналогии, легко заметить, что уравнениям равновесия (6) при $\mathbf{f} = \boldsymbol{\mu} = 0$ можно тождественно удовлетворить, положив

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} [\mathbf{g} \cdot (\text{grad} \boldsymbol{\chi})^T \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot (\text{grad} \boldsymbol{\chi}) \cdot \mathbf{g}],$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{e} \cdot [\text{grad}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}] + \frac{1}{2} \mathbf{n} \text{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\lambda}), \quad (21)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} [\mathbf{e} \cdot (\text{grad} \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\text{grad} \boldsymbol{\lambda})^T \cdot \mathbf{e}].$$

Векторнозначную функцию $\boldsymbol{\lambda}$ будем называть вектором функций напряжений.

Предположим, что граница оболочки Γ состоит из двух связных участков: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На Γ_1 заданы внешние контурные нагрузки. Это приводит к условиям на контурные значения тензоров усилий $\mathbf{T}$ и моментов $\mathbf{M}$, приведенным в [3]. При

помощи (21) данные граничные условия можно записать через функцию напряжений λ . На Γ_2 поставлены деформационные [2] краевые условия. При отсутствии распределенных дислокаций и дисклинаций деформационные условия эквивалентны кинематическим условиям, когда на Γ_2 задаются значения векторного поля смещений $\mathbf{v}$ и угол поворота края $\frac{\partial w}{\partial m}$, где символ $\frac{\partial}{\partial m}$ оз-

начает нормальную производную, т.е. производную по направлению нормали $\mathbf{m}$ к границе Γ , такой, что $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. При наличии распределенных дефектов поле смещений оболочки $\mathbf{v}$ не существует, и роль кинематических краевых условий переходит к деформационным условиям.

Краевая задача о равновесии оболочки с распределенными дислокациями и дисклинациями имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{div}(\lambda \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \beta = 0; \quad (22)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{k}' + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{g} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}') \otimes \mathbf{n},$$

$$\mathbf{k}' = f_1(\mathbf{T}, \mathbf{M}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = f_2(\mathbf{T}, \mathbf{M}); \quad (23)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} \cdot (\operatorname{grad} \lambda)^T \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}, \quad \varphi = \operatorname{grad}(\lambda \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{b} \cdot \lambda, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2}[(\operatorname{grad} \lambda) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\operatorname{grad} \lambda)^T];$$

на Γ_1 :

$$\lambda = \lambda_0(s), \quad \mathbf{m} \cdot \varphi = \varphi_0(s); \quad (25)$$

на Γ_2 :

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \mathbf{m} = q(s), \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}'_m \mathbf{n}) = \mathbf{p}(s) \quad (26)$$

и состоит из уравнений несовместности (22), определяющих соотношений (23), выражений тензоров усилий и моментов через вектор функций напряжений (24), силовых граничных условий, записанных через функции напряжений (25) и деформационных граничных условий (26). Через s обозначена текущая длина дуги на кривой Γ ; λ_0 , φ_0 , q , $\mathbf{p}$ – заданные на этой кривой функции. Выражения (24) усилий и моментов через функции напряжений по форме отличаются от (21), но эквивалентны им.

Теперь рассмотрим вторую задачу статики оболочки, в которой отсутствуют распределенные дислокации и дисклинации, но присутствуют

распределенные по поверхности σ силовая $\mathbf{f}$ и моментная $\boldsymbol{\mu}$ нагрузки. Вторая краевая задача имеет вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \mathbf{f} = 0; \quad (27)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{T} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{g} \cdot (\operatorname{div} \mathbf{M}) \otimes \mathbf{n},$$

$$\mathbf{T} = f_1^*(\mathbf{k}', \boldsymbol{\varepsilon}'), \quad \mathbf{M} = f_2^*(\mathbf{k}', \boldsymbol{\varepsilon}'); \quad (28)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \theta \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{e} - \frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}, \quad \theta = \operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}, \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}[(\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T];$$

на Γ_1 :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(s), \quad \mathbf{m} \cdot \theta = \theta_0(s); \quad (30)$$

на Γ_2 :

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{m} = d(s), \quad \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\partial}{\partial s}(M_m \mathbf{n}) = \mathbf{a}(s) \quad (31)$$

и состоит из уравнений равновесия (27) в усилиях и моментах, определяющих соотношений (28), выражений тензоров метрических и изгибных деформаций через поле перемещений (29), кинематических граничных условий (30) и силовых граничных условий (31) [3]. Функции $\mathbf{v}_0(s)$, $\theta_0(s)$, $d(s)$, $\mathbf{a}(s)$ считаются заданными.

Будем считать, что уравнения и граничные условия первой и второй краевых задач приведены к безразмерному виду, т.е. представляют собой соотношения между безразмерными величинами. Если функции f_1 и f_2 совпадают с функциями f_1^* и f_2^* соответственно, то материалы двух оболочек назовем сопряженными.

Из сравнения краевых задач (22)–(26) и (27)–(31) вытекает следующий принцип двойственности классической теории оболочек.

Краевая задача о равновесии упругой оболочки с заданными плотностями дислокаций и дисклинаций при отсутствии поверхностных нагрузок, с граничными условиями для функций напряжений на части границы Γ_1 и деформационными граничными условиями на другой части границы Γ_2 математически эквивалентна краевой задаче о равновесии оболочки из сопряженного материала с заданными поверхностными нагрузками при отсутствии дислокаций и дисклинаций, с кинематическими граничными условиями на Γ_1 и с заданными контурными нагрузками на Γ_2 .

Плотности дислокаций и дисклинаций, как и плотности внешних нагрузок, можно считать обобщенными функциями. Это позволяет рассматривать случай сосредоточенных дефектов. Отсюда ясно, что двойственность краевых задач равновесия оболочки справедлива и для сосредоточенных дислокаций и дисклинаций. Например, задача о сосредоточенной дисклинации, расположенной в некоторой точке оболочки с границей, свободной от внешних нагрузок, математически тождественна задаче о деформации оболочки из сопряженного материала с защемленной границей сосредоточенной силой, приложенной в той же точке.

Для изотропной оболочки с определяющими соотношениями (20) можно проверить, что переход к сопряженному материалу состоит в замене v на $-v$.

Если поверхность оболочки σ замкнута, т.е. не имеет границы, то необходимое условие разрешимости второй краевой задачи состоит в равенстве нулю главного вектора и главного момента поверхностных нагрузок

$$\iint_{\sigma} \mathbf{f} d\sigma = 0, \quad \iint_{\sigma} (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{r} \times \mathbf{f}) d\sigma = 0. \quad (32)$$

Исходя из принципа двойственности, можно заключить, что необходимое условие разрешимости первой краевой задачи для замкнутой оболочки состоит в следующих ограничениях на плотности дислокаций и дисклинаций:

$$\iint_{\sigma} \boldsymbol{\beta} d\sigma = 0, \quad \iint_{\sigma} (\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}) d\sigma = 0. \quad (33)$$

4. Многосвязная оболочка с дислокациями Вольтерра. В этом разделе рассмотрим равновесие многосвязной оболочки с дислокациями Вольтерра, т.е. изолированными дефектами. Рассматривая задачу об определении поля перемещений $\mathbf{v}$ и поля поворотов $\boldsymbol{\omega}$ по заданным в многосвязной области однозначным полям метрических и изгибных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{k}$, получим, что перемещения и повороты при пересечении перегородок, превращающих область в односвязную, вообще говоря, испытывают скачок вида

$$\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_- = \mathbf{B}_k + \mathbf{Q}_k \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega}_+ - \boldsymbol{\omega}_- = \mathbf{Q}_k. \quad (34)$$

Здесь $\mathbf{B}_k$ и $\mathbf{Q}_k$ – соответственно вектор Бюргерса и вектор Франка изолированного дефекта, отвечающего k -му отверстию. Эти характеристики дислокации Вольтерра выражаются через тензорные поля $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\mathbf{k}$ следующим образом:

$$\mathbf{Q}_k = \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}, \quad \mathbf{B}_k = \oint_{\gamma_k} d\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{L} \times \mathbf{r}), \quad (35)$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{g} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \mathbf{n} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}.$$

Если края отверстий свободны от нагрузок, то можно показать, что вектор функций напряжений будет однозначным в многосвязной области и удовлетворяет на контуре k -го отверстия условиям

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}_k \times \mathbf{r} + \mathbf{D}_k, \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{e}, \quad (36)$$

где $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{D}_k$ – векторные постоянные, которые определяются из интегральных соотношений (35).

При решении задачи равновесия оболочки с изолированными дефектами к соотношениям (35), (36) необходимо присоединить уравнение совместности деформаций $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, записанное через функции напряжений и краевые условия на внешнем контуре многосвязной оболочки Γ . Краевые условия на контурах отверстий имеют вид (36).

5. Распределенные дефекты в замкнутой сферической оболочке. Рассмотрим некоторые простые задачи о равновесии упругих оболочек с непрерывно распределенными дефектами. Пусть в замкнутой сферической оболочке радиуса r_0 дислокации отсутствуют ($\boldsymbol{\alpha} = 0$), а вектор плотности дисклинаций равен $\beta_0 \mathbf{n}$ ($\beta_0 = \text{const}$), что соответствует равномерному распределению клиновых дисклинаций. Внешние нагрузки отсутствуют. Легко проверить, что система уравнений (6), (19), (20), описывающая равновесие оболочки, имеет решение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{k} = \frac{\beta_0 r_0}{2} \mathbf{g}, \quad \mathbf{M} = -\frac{E h^3 \beta_0 r_0}{24(1-\nu)} \mathbf{g}. \quad (37)$$

Предположим теперь, что толщина оболочки весьма мала, вследствие чего она не сопротивляется изгибу, т.е. $\mathbf{M} \equiv 0$. Будем разыскивать изометрические деформации оболочки, когда $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv 0$. В этом случае в силу (20) имеем $\mathbf{T} \equiv 0$ и уравнения равновесия (6) при отсутствии внешних нагрузок тождественно удовлетворяются. Возникает чисто геометрическая задача об изгибании поверхности, которая сводится к решению уравнения (19). В случае $\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\boldsymbol{\beta} = 0$ это классическая и хорошо исследованная проблема бесконечно малых изгибов поверхности (см., например, [7]). Как известно, замкнутая сфера – это жесткая поверхность, т.е. она не допускает гладких изгибов. Однако при наличии распределенных дислокаций, как показано ниже, сфера может стать изгибаемой.

Введем на сфере географические координаты $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (широта) и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (долгота) и допустим, что плотность дисклинаций равна нулю, а вектор плотности дислокаций задан в виде $\alpha = \alpha_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta$, где $\alpha_0 = \text{const}$, а $\mathbf{e}_\theta$ – единичный вектор, касательный к меридиану. Решая уравнение (19) при $\epsilon = 0$, $\beta = 0$, найдем

$$\mathbf{k}' = \frac{1}{3} \alpha_0 \cos \theta (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi), \quad (38)$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ – единичный вектор, касательный к параллели.

При изгибаниях поверхности, как известно [7], каждая элементарная площадка перемещается как абсолютно твердое тело. Поле поворотов элементарных площадок ω можно найти из уравнения (15). В рассматриваемом примере при помощи (38) получаем

$$\omega = \frac{\alpha_0 r_0}{6} [2 \cos^2 \theta \mathbf{e}_\rho + (\sin 2\theta - 4\theta) \mathbf{e}_z] + \Omega_0, \quad (39)$$

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{n} \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta.$$

Здесь Ω_0 – произвольный постоянный вектор, $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор, направленный по оси, соединяющей полюсы сферы.

Таким образом, для замкнутой сферы с распределенными дислокациями в условиях изометричности существует нетривиальное гладкое поле поворотов элементарных площадок.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00380).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. Ч. 2. 395 с.
3. Zubov L.M. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Ростовского университета, 1982. 143 с.
4. Budiansky B., Sanders J.L. On the «best» first-order linear shell theory // Progress in Applied Mechanics (W. Prager Anniv. Vol.). N.Y.: Macmillan Comp., 1963. P. 129–140.
5. Zubov L.M., Филиппова Л.М. Теория оболочек с непрерывно распределенными дислокациями // Доклады РАН. 1995. Т. 344. № 5. С. 619–622.
6. Zubov L.M. Непрерывно распределенные дислокации и дисклинации в упругих оболочках // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 6. С. 102–110.
7. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.

DISLOCATIONS AND DISCLINATIONS IN CLASSICAL THEORY OF SHELLS

L.M. Zubov

The problem of thin elastic shell state of stresses with dislocations and disclinations is considered in within framework of Kirchhoff-Love classical theory. The problem production about multiconnected shell with Volterra dislocations and disclinations under defined characteristics is given. By means of limiting transition from discrete isolated defects set to unremitting set the linear shells theory with dislocations and disclinations is constructed. The principle of theory of shells bifurcation is investigated. It consists of mathematical equivalent of boundary shell stress problem under continuously distributed dislocations and disclinations to the boundary equilibrium problem of shell under defined distributed loads. The problem of infinitesimal surface bending with distributed dislocations is formulated. The problem of reserved sphere bending with continuously distributed dislocations is solved. Nontrivial smooth rotation field of elementary sphere grounds with dislocations under isometric deformation is found.

Key words: multi-connected shell, infinitesimal bendings, continuously distributed defects.

REFERENCES

1. Gol'denveyzer A.L. 1976. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek*. [*Theory of thin elastic shells*]. Moscow, Nauka: 512 p. (In Russian).
2. Chernykh K.F. 1964. *Lineynaya teoriya obolochek. Chast' 2*. [*Linear theory of shells. Part 2*]. Leningrad, LSU Publ.: 395 p. (In Russian).
3. Zubov L.M. 1982. *Metody nelineynoy teorii uprugosti v teorii obolochek*. [*Methods of nonlinear elasticity theory in theory of shells*]. Rostov-on-Don, RSU Publ.: 143 p. (In Russian).
4. Budiansky B., Sanders J.L. 1963. On the “best” first-order linear shell theory. In: *Progress in applied mechanics*. New York, Macmillan Comp.: 129–140.
5. Zubov L.M., Filippova L.M. 1995. [Theory of shells with continuously distributed dislocations]. *Doklady akademii nauk*. 344(5): 619–622. (In Russian).
6. Zubov L.M. 1996. [Continuously distributed dislocations and disclinations in elastic shells]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. (6): 102–110. (In Russian).
7. Vekua I.N. 1959. *Obobshchennye analiticheskie funktsii*. [*Generalized analytic functions*]. Moscow, Fizmatgiz: 628 p. (In Russian).