

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЕЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ С ПЛОСКИМИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

© 2008 г. П.В. Сыромятников¹, С.В. Ратнер¹

В статье рассматриваются вопросы получения точного численного решения задачи о динамическом поведении слоистой термоэлектродупругой среды с неоднородностями. Представлен новый оптимизированный метод вычисления обратного преобразования Фурье, основанного на анализе особенностей подынтегральной функции. Обсуждаются результаты численного эксперимента.

Различные практические вопросы геофизики, акустоэлектроники, тепловой дефектоскопии и других наук стимулируют исследования динамики упругих тел с учетом сопряженных полей. Математический анализ задач с сопряженными полями позволяет глубже понять механизм деформирования, связанного с термическими и электродинамическими эффектами, и, наоборот, исследовать тепловые и электрические явления, вызываемые механическими деформациями.

В настоящей работе рассматривается крайняя задача для термоэлектродупругих анизотропных слоев с плоскопараллельными границами раздела, содержащими осесимметричные трещины или жесткие включения. Схема их расположения представлена на рис. 1. Задачи

такого рода возникают, например, при моделировании формирования и развития дилатантных зон в геофизике, а также конструировании и исследовании поведения композиционных материалов со сложными физико-механическими свойствами.

Разработан новый экономичный численный метод расчета функций специального вида, представленных двумерными интегралами Фурье, учитывающий специфику подынтегральных функций и являющийся развитием метода, изложенного в [1]. Интегралы данного типа часто возникают при реализации вариационно-разностного метода решения интегральных уравнений динамической теории упругости [2] и требуют разработки специальных приемов с целью сокращения расчетного времени и повышения точности.

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В гармоническом случае поведение термоэлектродупругой среды описывается системой дифференциальных уравнений вида [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_n &= 0, \quad \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial g_j}{\partial x_j} - i\omega T_0 \left(\chi_{nm} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - p_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} + \mu \theta \right) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{ji} = C_{ji}^{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - e_{kji} E_k - \chi_{ji} \theta,$$

Рис. 1. Схема расположения осесимметричных трещин или жестких включений

¹ Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону.

$$D_j = e_{jkn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \varepsilon_{jk} E_k + p_j \theta, \quad E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

$$g_i = -v_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (i, j, k, n = 1, 2, 3),$$

C_{ik}^{nm} – тензор упругих постоянных, e_{jkn} – тензор пьезоэлектрических постоянных, χ_{jk} – тензор температурных коэффициентов механических напряжений, ε_{jk} – тензор диэлектрических проницаемостей, σ_{ij} – тензор напряжений, D_j – вектор электрической индукции, E_i – вектор напряженности электрического поля, ϕ – электрический потенциал, v_{nm} – тензор коэффициентов теплопроводности, p_j – тензор пьезоэлектрических коэффициентов, g_j – вектор теплового потока, u_k – вектор механических смещений, $\theta = T - T_0$ – относительная температура, T – абсолютная температура, T_0 – начальная температура, $\mu = \frac{\rho C_\varepsilon}{T_0}$, C_ε – удельная теплоемкость, ρ – плот-

ность, ω – круговая частота. Заметим, что все материальные константы слоев могут быть различными.

Вектор механических перемещений, значение потенциала и температуры точек среды считается заданным в виде комплексных амплитуд $\mathbf{u}$, при этом действительные значения $\bar{\mathbf{u}} = \text{Re}[\mathbf{u}e^{-i\omega t}]$. Решение соответствующей нестационарной задачи, как известно, может быть построено из решения гармонической задачи по принципу суперпозиции.

Используя формализм работ [1, 4], представим пятикомпонентный вектор $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, состоящий из вектора механических перемещений точек среды $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, электрического потенциала $\phi = u_4$ и температуры $\theta = u_5$, в виде [1]

$$u_m(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) Q_n(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1) \\ m, n = 1, 2, 3, 4, 5,$$

где Q_j – вектор нагрузок на поверхности и/или внутри слоя, $\mathbf{K} = \|K_{mn}\|$ – символ Фурье матрицы Грина многослойной среды

$$K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) = F_{x_1 x_2}[k_{mn}] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{mn}(x_1, x_2) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{k} = \|k_{mn}\|$ – матрица Грина, Γ_1, Γ_2 – контуры интегрирования, частично отклоняющиеся

от вещественных осей при обходе особенностей K_{mn} в соответствии с принципом предельного поглощения [2]. Конкретный вид символа матрицы Грина (2) определяется физической и математической моделью среды и строится таким образом, чтобы избежать трудностей численной реализации, обусловленных наличием растущих экспоненциальных составляющих и возникновением систем больших размерностей. Для однородного полупространства и слоя явный вид матрицы $\mathbf{K}$ приведен в [2]. При зависимости свойств среды от глубины (стратифицированная среда) или пространственных координат (анизотропия), а также в слоистых средах и средах со сложными физико-механическими свойствами (термоупругие, электроупругие, термоэлектроупругие) построение матрицы Грина становится достаточно сложной задачей, которая, однако, успешно решена в работах [3–5]. Наличие систем неоднородностей приводит к существенному возрастанию порядка матрицы Грина (каждая группа неоднородностей увеличивает размерность матрицы на 3–5 единиц в зависимости от наличия связанных полей).

Интегральные представления с использованием матрицы Грина являются основой так называемого интегрального метода, который позволяет строить волновые поля, исследовать излучение энергии в среде, ставить и решать задачу о формировании излучения заданной направленности, а также изучать влияние неоднородностей, в частности резонансные особенности многослойных сред и сред, содержащих системы трещин или включений.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

При решении смешанных задач теории упругости, например, вариационно-разностным методом, методом факторизации и некоторыми другими методами, неизбежно возникает необходимость вычисления типичных двумерных интегралов Фурье. Кроме того, через аналогичные интегралы выражаются оценки решений различных краевых задач в физическом домене. Ниже предлагается удобный для указанных задач метод вычисления обратного преобразования Фурье при заданном векторе нагрузок $\mathbf{Q}$, удовлетворяющем некоторым условиям. Используя формулу (1), перейдем к цилиндрическим координатам

$$x_1 = r \cos \beta, \quad x_2 = r \sin \beta, \quad x_3 = z,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \beta = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma,$$

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Тогда, обозначая через $\tau = \gamma - \beta - \frac{\pi}{2}$, можно получить представление

$$\mathbf{u}(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) \times \\ \times \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha d\alpha d\tau. \quad (3)$$

Большое количество требуемых операций при вычислении матрицы $\mathbf{K}$, сильная осцилляция и особенности подынтегрального выражения существенно затрудняют прямой счет интеграла (3). С помощью подхода, описанного ниже, можно оценить вклад вещественных полюсов и ближайших к вещественной оси комплексных полюсов в интеграл (3) при сравнительно небольших вычислительных затратах. Разобьем интеграл (3) на сумму двух:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{Q} \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha d\alpha d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{Q} \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha d\alpha d\tau \right) \quad (4)$$

При определенных условиях для вычисления интегралов по Γ можно использовать лемму Жордана. Пусть $\mathbf{Q}(\alpha, \gamma) = \mathbf{Q}(\alpha)$, т.е. нагрузка осесимметрична, и, кроме того, будем считать, что возможно представление $\mathbf{Q}$ в виде $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^-$, где $\mathbf{Q}^+$ убывает в верхней полуплоскости, $\mathbf{Q}^-$ – в нижней. Тогда

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{Q} \alpha \exp(i\alpha r \sin \tau) d\alpha d\tau = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^-) d\alpha d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^-) d\alpha d\tau \right) = \\ = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{F} = \mathbf{K} \alpha \exp(i\alpha r \sin \tau).$$

Здесь

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^+ d\alpha d\tau, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^- d\alpha d\tau, \\ \mathbf{I}_3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^+ d\alpha d\tau, \quad \mathbf{I}_4 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^- d\alpha d\tau.$$

При сделанных предположениях для вычисления $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_4$ можно применить лемму Жордана. Контуры можно замкнуть в первом и в четвертом квадранте соответственно, при этом дополнительно появляются интегралы по мнимой оси $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4$.

Возможность применения леммы при вычислении $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ зависит от поведения $\mathbf{F}(\alpha), \mathbf{Q}^{\pm}(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и величины $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. В дальнейшем

будем считать, что $\mathbf{Q}^{\pm}(\alpha) = \tilde{\mathbf{Q}}^{\pm}(\alpha) e^{\pm i\alpha}$, где $\tilde{\mathbf{Q}}^{\pm}(\alpha)$, по крайней мере, ограниченная функция при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Рассмотрим в качестве типичного примера осесимметричную функцию, часто используемую при реализации вариационно-разностного метода [2]:

$$q(r) = \begin{cases} \frac{m+1}{\pi} (1-r^2)^m, & r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Для целого m

$$\mathbf{Q}(\alpha) = 2\pi \int_0^1 \frac{m+1}{\pi} r (1-r^2)^m J_0(\alpha r) dr = \\ = 2^{m+1} (m+1)! \frac{J_{m+1}(\alpha)}{\alpha^{m+1}} = \\ = \frac{2^m (m+1)!}{\alpha^{m+1}} (H_{m+1}^{(1)}(\alpha) + H_{m+1}^{(2)}(\alpha)).$$

Для $m = 1$ получаем

$$\mathbf{Q}(\alpha) = 2\pi \int_0^1 \frac{2}{\pi} r (1-r^2) J_0(\alpha r) dr = \\ = 2^3 \frac{J_2(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{2^2}{\alpha^2} (H_2^{(1)}(\alpha) + H_2^{(2)}(\alpha)). \quad (5)$$

Представим функции Ханкеля H в виде

$$H_n^{(1)}(\alpha) = e^{i\alpha} \tilde{H}_n^{(1)}(\alpha), \quad H_n^{(2)}(\alpha) = e^{-i\alpha} \tilde{H}_n^{(2)}(\alpha),$$

где нормированные на экспоненты функции $\tilde{H}_n^{(1)}(\alpha), \tilde{H}_n^{(2)}(\alpha)$ убывают как $\alpha^{-0.5}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим интеграл $\mathbf{I}_2$. Если в показателе экспоненты $\sin \tau > \frac{1}{r}$, то контур для $\mathbf{I}_2$ можно замкнуть вверх в первом квадранте. Пусть $\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{r}$, тогда

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{\varphi_0} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^- d\alpha d\tau + \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^- d\alpha d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\pi-\varphi_0}^{\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{F} \mathbf{Q}^- d\alpha d\tau \right) = \mathbf{I}_2^{(1)} + \mathbf{I}_2^{(2)} + \mathbf{I}_2^{(3)},$$

$$\mathbf{i}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{\varphi_0} \int_{-i\infty}^0 \mathbf{FQ}^- d\alpha d\tau + \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \int_{i\infty}^0 \mathbf{FQ}^- d\alpha d\tau + \int_{\pi-\varphi_0}^{\pi} \int_{-i\infty}^0 \mathbf{FQ}^- d\alpha d\tau \right) = \mathbf{i}_2^{(1)} + \mathbf{i}_2^{(2)} + \mathbf{i}_2^{(3)}.$$

Когда $0 \leq \tau \leq \varphi_0$ или $\pi - \varphi_0 \leq \tau \leq \pi$, контур можно замкнуть вниз, так как $r \sin \tau - 1 < 0$, а $\mathbf{Q}^-$ убывает в нижней полуплоскости.

Относительно $\mathbf{I}_3$ картина выглядит симметричным образом. Если $\sin \tau > \frac{1}{r}$, то контур для $\mathbf{I}_3$ можно замкнуть вниз в четвертом квадранте:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\pi}^{\pi+\varphi_0} \int_{\Gamma} \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau + \int_{\pi+\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \int_{\Gamma} \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau + \int_{2\pi-\varphi_0}^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau \right) = \mathbf{I}_3^{(1)} + \mathbf{I}_3^{(2)} + \mathbf{I}_3^{(3)},$$

$$\mathbf{i}_3 = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\pi}^{\pi+\varphi_0} \int_{i\infty}^0 \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau + \int_{\pi+\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \int_{i\infty}^0 \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau + \int_{2\pi-\varphi_0}^{2\pi} \int_{i\infty}^0 \mathbf{FQ}^+ d\alpha d\tau \right) = \mathbf{i}_3^{(1)} + \mathbf{i}_3^{(2)} + \mathbf{i}_3^{(3)}.$$

Когда $\pi \leq \tau \leq \pi + \varphi_0$ или $2\pi - \varphi_0 \leq \tau \leq 2\pi$, контур можно замкнуть вверх, так как $r \sin \tau + 1 > 0$, а $\mathbf{Q}^+$ убывает в верхней полуплоскости. Другими словами, контуры в $\mathbf{I}_3^{(1)}, \mathbf{I}_3^{(3)}$ замыкаются вверх, в $\mathbf{I}_3^{(2)}$ – вниз.

Соберем члены, принадлежащие соответствующим квадрантам, и введем в рассмотрение функции $\mathbf{Q}^{(\pm)}$

$$\mathbf{Q}^{(\pm)}(\alpha, \tau) = \begin{cases} \mathbf{Q}^{\pm}(\alpha), & \tau \in [0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0] \cup [2\pi - \varphi_0, 2\pi], \\ \mathbf{Q}^+(\alpha) + \mathbf{Q}^-(\alpha), & \tau \in (\psi^+ + \varphi_0, \psi^+ + \pi - \varphi_0), \\ 0, & \tau \in (\pi - \psi^+ + \varphi_0, 2\pi - \psi^+ - \varphi_0) \end{cases}$$

$$\psi^+ = 0, \quad \psi^- = \pi, \quad r > 1.$$

Для нашего случая

$$\mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^- = 8 \frac{J_2(\alpha)}{\alpha^2},$$

$$\mathbf{Q}^+(\alpha) = \frac{4H_2^{(1)}(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{4\tilde{H}_2^{(1)}(\alpha)e^{i\alpha}}{\alpha^2},$$

$$\mathbf{Q}^-(\alpha) = \frac{4H_2^{(2)}(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{4\tilde{H}_2^{(2)}(\alpha)e^{-i\alpha}}{\alpha^2}.$$

Используя данные функции, сумму 16 интегралов $\mathbf{I}_n^{(m)}, \mathbf{i}_n^{(m)}$ можно записать компактно:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^+ + \mathbf{I}^- + \mathbf{i}^+ + \mathbf{i}^-, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{I}^{\pm} = \frac{\pm i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm) \operatorname{res} K_{jm}(\alpha, \gamma) \times \quad (7)$$

$$\times Q_m^{(\pm)}(\alpha, \tau) \alpha \exp(i\alpha r \sin \tau) |_{\alpha=\alpha_n(\gamma)} d\tau,$$

$$\mathbf{i}^{\pm} = \frac{\pm 1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\pm a}^{\pm b} K_{jm}(\alpha, \gamma) \times$$

$$\times Q_m^{(\pm)}(\alpha, \tau) \alpha \exp(i\alpha r \sin \tau) d\alpha d\tau, \quad (8)$$

$$a^+ = 0, \quad a^- = -i\infty, \quad b^+ = +i\infty, \quad b^- = 0.$$

Здесь знак плюс соответствует первому квадранту, знак минус – четвертому. Регулярные вещественные полюса относятся к первому квадранту, нерегулярные – к четвертому.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В модельных расчетах рассматривался пространственный слой единичной толщины, в срединной плоскости которого расположена плоская круглая трещина единичного радиуса. На поверхности слоя также в окрестности единичного радиуса заданы поверхностные механические, электрические и тепловые нагрузки.

На поверхности слоя при $z = 0$, $\mathbf{q}(x, y) = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3, g_3\}$ $(x, y) \in \Omega$; $\mathbf{q}(x, y) = 0$, $(x, y) \notin \Omega$. В основании слоя при $z = -1$ смещения, электрический потенциал и относительная температура считаются равными нулю $\mathbf{u} = \varphi = \theta = 0$. В срединной плоскости при $z = -0,5$ заданы скачки перемещений $\delta u_1 = u_1^+ - u_1^-$, потенциала $\delta \varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ и температуры $\delta \theta = \theta^+ - \theta^-$, вектор нагрузок имеет вид $\mathbf{q}(x, y) = \{\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3, \delta \varphi_1, \delta \theta_1\}$, $(x, y) \in \Omega$; $\mathbf{q}(x, y) = 0$, $(x, y) \notin \Omega$. Слой имеет свойства танталата лития [6] (тригональная сингония, класс $3m$): упругие модули $C_{11} = 2,03$, $C_{13} = 0,53$, $C_{14} = 0,75$, $C_{33} = 0,09$, $C_{44} = 2,45$, $C_{66} = 0,6$ (10^{11} Н/м²), пьезоэлектрические модули $e_{15} = 3,7$, $e_{22} = -2,5$, $e_{31} = 0,2$, $e_{33} = 1,3$ (1 Кл/м²), диэлектрические проницаемости $\epsilon_{11} = 38,9$, $\epsilon_{22} = 25,7$ (10^{-12} Ф/м), плотность $\rho = 0,47$ (10^4 кг/м³), удельная теплоемкость $C_e = 8,092$ (10^{-4} Дж/(кг · К)), коэффициенты теплопроводности $\nu_m = \nu = 4,6$ (Вт/(м · К)), температурные коэффициенты механических напряжений $\chi_m = \chi = 2$ (Н/(м² · КГ)), пироэлектрические коэффициенты $p_n = p = 0,2$ (10^{-4} Кл/(м² · К)). В качестве характерных величин были использованы следующие значения: $t_0 = 10^{-3}$ м, $t_0 = 10^{-6}$ с,

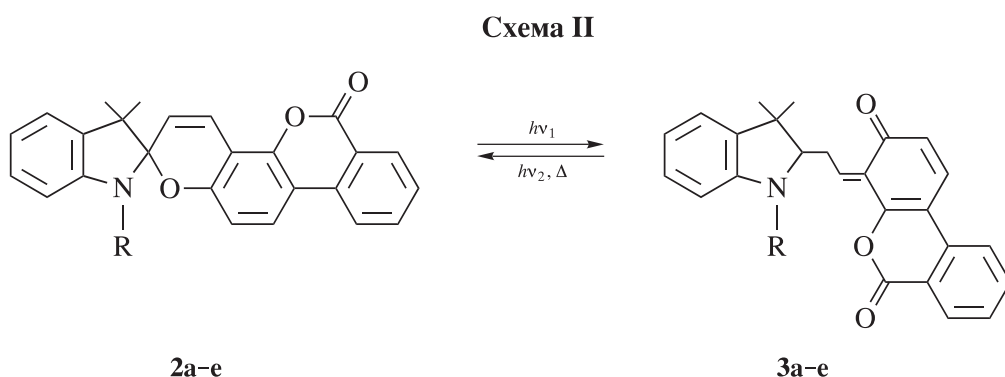


Рис. 2. Амплитуды вертикальных перемещений на поверхности слоя $|\mathbf{u}_3(x, y)|_{z=0}$, вызванные механическими нагрузками $Q = Q_3$ вида (5)

$m_0 = 10^4$ кг, $\varphi_0 = 10^8$ В, $\theta_0 = 10^7$ К, $T_0 = 300$ К. Из-за отсутствия справочных данных тензорам ν , χ , ρ были приданы физически допустимые модельные значения.

Для приведенной частоты $\omega = 2,7$ на рис. 2–4 показаны в ближней зоне от источника функции – компоненты вектора $\mathbf{u}(x, y)|_{z=0}$, представляемые интегралами вида (7). Рисунки верхнего ряда соответствуют нагрузке, заданной на поверхности слоя, нижний ряд соответствует нагрузкам, заданным на берегах трещины. Заметим, что размерности нагрузок на поверхности и внутри слоя различны. Так, на поверхности задаются вектор механических напряжений $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$, плотность поверхностных зарядов Q_4 и нормаль-

ная компонента вектора теплового потока Q_5 , соответственно на границах трещины – скачки перемещений $Q_j = \delta U_j$ ($j = 1, 2, 3$), электрического потенциала $Q_4 = \delta \Phi$ и температуры $Q_5 = \delta \Theta$.

Нормированные амплитуды вертикальных перемещений на поверхности слоя $u_3 =$

$$= \frac{1}{l_0} |\mathbf{u}_3(x, y)|_{z=0}, \text{ вызванные механическими на-}$$

грузками $Q = Q_3$ вида (5), показаны на рис. 2, здесь $z = 0$, $-5 \leq x, y \leq 5$, пространственные координаты x, y на всех рисунках также нормированы: $x = \frac{x_1}{l_0}$, $y = \frac{x_2}{l_0}$. Нормированные амплитуды

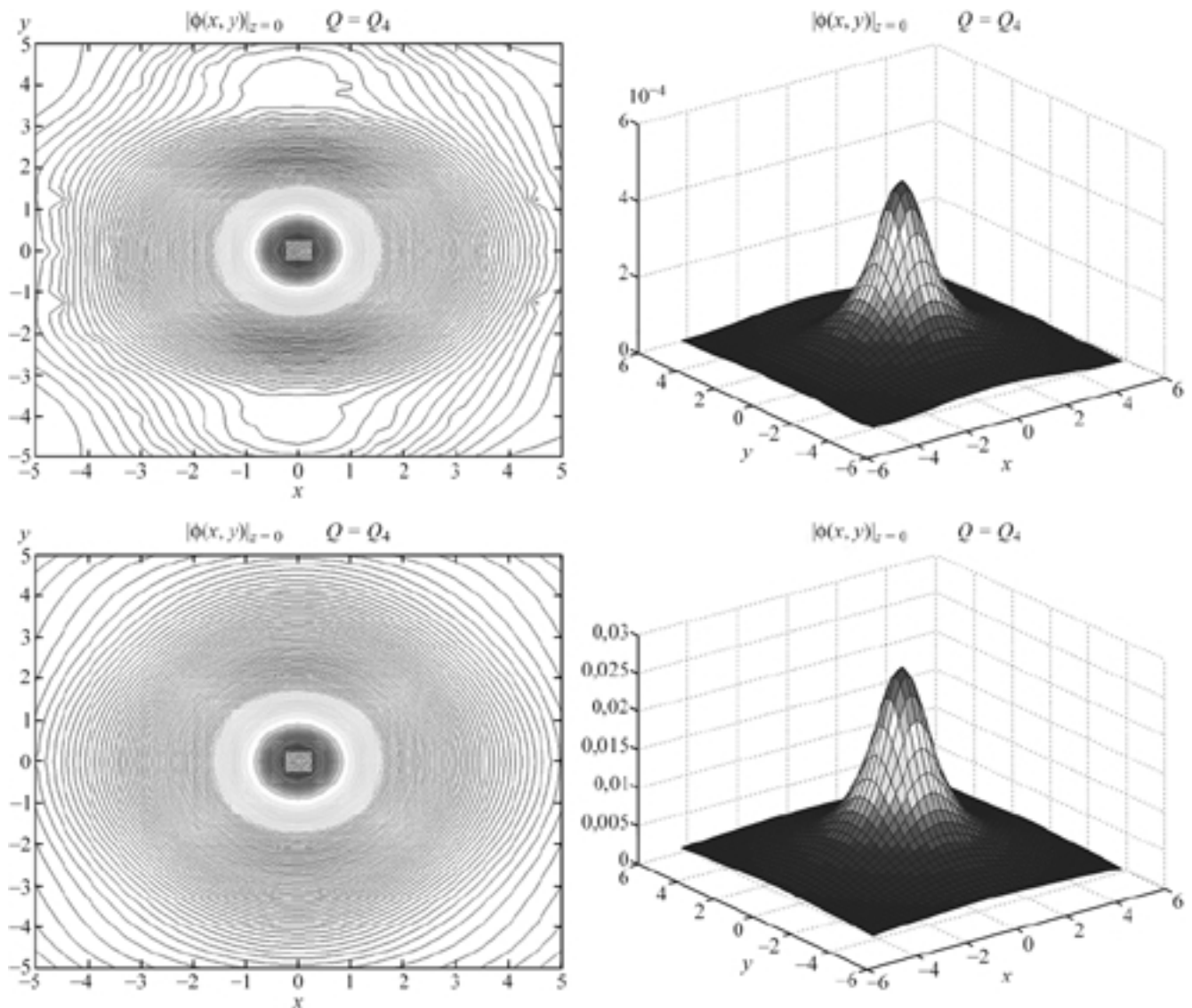


Рис. 3. Амплитуды электрического потенциала $|\phi(x, y)|_{z=0}$, вызванные электрическими нагрузками $Q = Q_4$ вида (5)

электрического потенциала $\phi = \frac{1}{\phi_0} |\phi(x, y)|_{z=0}$, вызванные электрическими нагрузками $Q = Q_4$ вида (5), приведены на рис. 3. Нормированные относительные температуры $t = \frac{1}{\theta_0} |\theta(x, y)|_{z=0}$,

вызванные тепловыми нагрузками $Q = Q_5$ того же вида (5), показаны на рис. 4.

Вклад интегралов $i^\pm$ (8) в сумму I (6) для данного материала обычно не превышал 0,1%.

ВЫВОДЫ

Предложенный метод позволяет оценить вклад вещественных полюсов и ближайших к

вещественной оси комплексных полюсов в интеграл при сравнительно небольших вычислительных затратах. На основе данного алгоритма разработаны два программных комплекса на языке FORTRAN 90, среда MS FORTRAN PowerStation 4.0.

Во всех проведенных расчетах графики обладают осевой симметрией относительно оси Oz и, кроме того, в данном случае – зеркальной симметрией относительно плоскостей xOz , yOz , соответствующей симметрии выбранного среза кристалла. Поскольку в рассматриваемом случае все поля связаны, то любая нагрузка может вызывать изменения механических, электрических и тепловых величин.

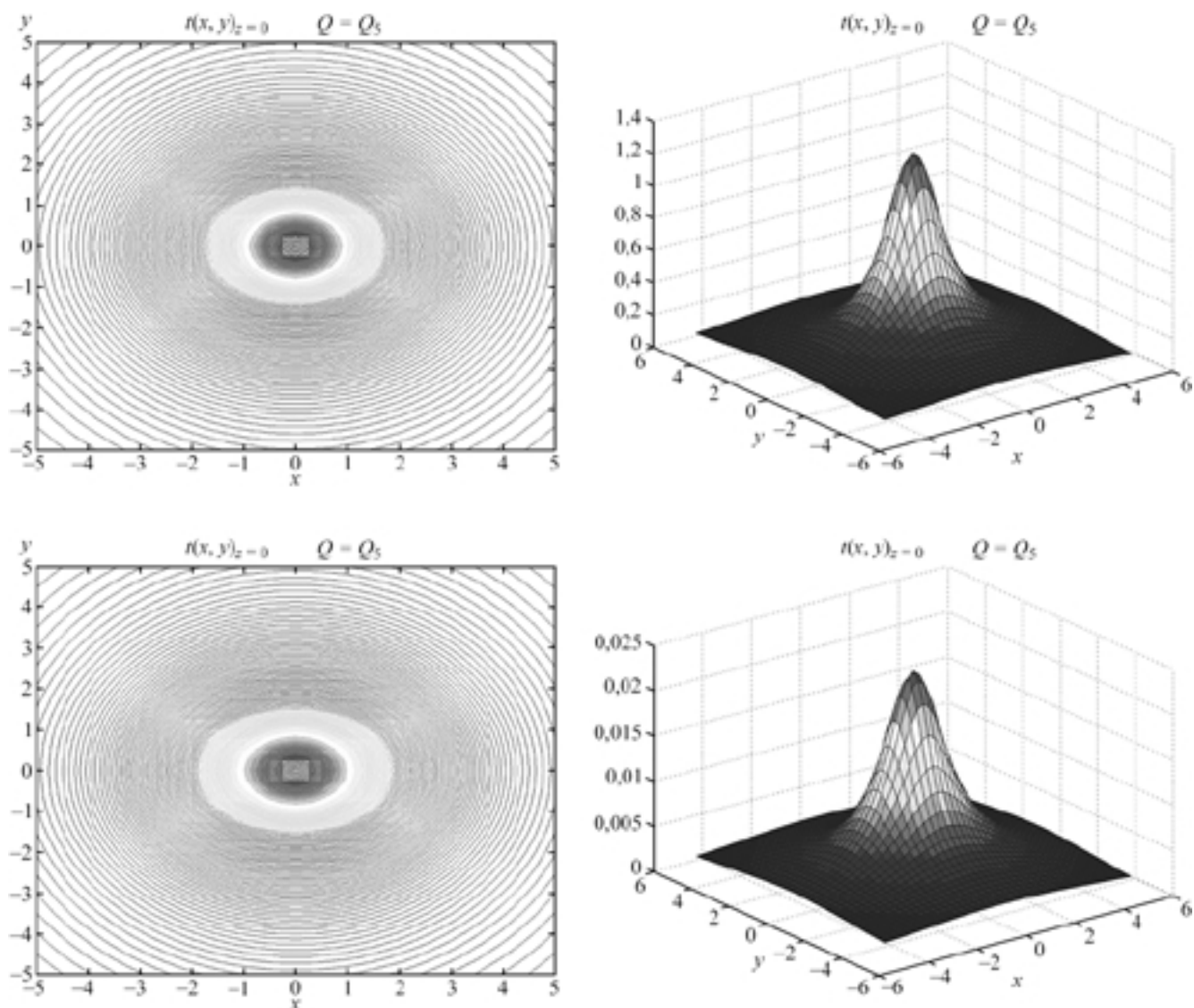


Рис. 4. Относительные температуры $t(x, y)|_{z=0}$, вызванные тепловыми нагрузками $Q = Q_5$ вида (5) (здесь температура θ обозначена буквой t)

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00902, проекта НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ ОЭ-12 и ОЭ-14 и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для термоэлектродупругих сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 1–6.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А., Прякина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
4. Бабешко В.А., Сыромятников П.В. Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 35–47.
5. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Доклады РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
6. Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

INTEGRAL FORM OF THERMOELECTROELASTIC FIELDS IN MULTILAYER MEDIUM WITH PLANE AXISYMMETRIC HETEROGENEITIES

P.V. Syromyatnikov, S.V. Ratner

The problem of obtaining numerical solution of elastodynamic boundary problem for layered medium with coupled fields and heterogeneities is discussed. A new effective method of computation of Fourier inversion, based on analysis of subintegral function is presented. Some numerical results are discussed.

REFERENCES

1. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. 2007. On a Mixed Problems for Thermoelectroelastic Media with Discontinuous Boundary Conditions. *Doklady Physics*. 52(2): 90–95. doi:10.1134/S102833580702005X.
2. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F. 1989. *Dinamika neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred.* [*Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media*]. Moscow, Nauka Publ.: 344 p. (In Russian).
3. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh.* [*Dynamics of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media*]. Moscow, Nauchnyy Mir Publ.: 246 p. (In Russian).
4. Babeshko V.A., Syromyatnikov P.V. 2002. A Method for the Construction of the Fourier Symbol of the Green Matrix for Multi-Layered Electroelastic Half-Space. *Mechanics of Solids*. 37(5): 27–37.
5. Babeshko V.A., Williams R., Pavlova A.V., Ratner S.V. 2002. Solution to the problem on vibration of an elastic solid with inner cavities. *Doklady Physics*. 47(2): 141–144.
6. Shaskol'skaya M.P. (Ed.). 1982. *Akusticheskie kristally. Spravochnik.* [*Acoustic crystals. Hand-book*]. Moscow, Nauka Publ.: 632 p. (In Russian).