

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.51

ОЦЕНКА ИЗОМОРФИЗМА НЕЧЕТКИХ ГРАФОВ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ИНВАРИАНТОВ

© 2005 г. Л.С. Берштейн¹, А.В. Боженюк¹

В данной статье рассматриваются вопросы оценки степени изоморфизма нечетких графов. Определения и свойства нечетких инвариантов нечетких графов также представлены в данной статье. Приведен пример оценки степени изоморфизма нечетких графов на основе оценки их инвариантов.

Одной из важных проблем теории графов является распознавание изоморфизма, или эквивалентности двух графов. Она состоит в том, чтобы между множествами вершин заданных графов определить существование взаимно-однозначного соответствия, сохраняющего отношение смежности вершин [1]. В случае нечетких графов понятие изоморфизма является нечетким.

Рассмотрим нечеткие ориентированные графы [2] $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ и $\tilde{G}_Y = (Y, \tilde{U}_Y)$, где X и Y – множества вершин, а $\tilde{U}_X = \{ \langle \mu_X(x_i, x_j) / (x_i, x_j) \rangle > | (x_i, x_j) \in X^2 \}$, $\tilde{U}_Y = \{ \langle \mu_Y(y_i, y_j) / (y_i, y_j) \rangle > | (y_i, y_j) \in Y^2 \}$ – нечеткие множества ребер с функциями принадлежности соответственно, $\mu_X : X^2 \rightarrow [0,1]$ и $\mu_Y : Y^2 \rightarrow [0,1]$. Пусть число вершин в графах совпадают, т.е. $|X| = |Y| = n$. В работе [3] рассматривалось понятие степени нечеткого изоморфизма нечетких графов в виде $f = \bigwedge_{i=1, n} \bigwedge_{j=1, n} (\mu_X(x_i, x_j) \leftrightarrow \mu_Y(y_i, y_j))$ и решалась задача нахождения (или доказательства его отсутствия) такого взаимно-однозначного соответствия $F : X \rightarrow Y$, при котором величина f достигала некоторого, заранее заданного значения $f_0 \in [0,1]$. Здесь под $\&$ подразумевается операция минимума, а эквивалентность определяется как $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)$, где $\rightarrow$ – операция нечеткой импликации, в частности, определяемая в логике Лукасевича $(a \rightarrow b) \rightarrow = \min\{1, 1 - (a + b)\}$.

Нечеткие графы являются обобщением четких графов, которые в свою очередь можно рас-

сматривать как квазинечеткие, у которых функции принадлежности принимают два значения: 0 и 1 и, следовательно, значение изоморфизма $f \in \{0,1\}$. Если $f = 1$, то четкие графы изоморфны, если $f = 0$, то нет. Четкие графы характеризуются инвариантами, такими как числа внутренней и внешней устойчивости, хроматическое число и пр. [1]. Если четкие графы изоморфны ($f = 1$), то их инварианты совпадают. Если те или иные инварианты рассматриваемых графов совпадают, то это не значит, что графы изоморфны. В этом смысле совпадение инвариантов является необходимым, но не достаточным условием изоморфизма четких графов. Если инварианты не совпадают, то рассматриваемые графы не являются изоморфными. При рассмотрении нечетких графов их инварианты также являются нечеткими величинами. В связи с этим возникает задача оценки влияния нечетких инвариантов на величину возможного изоморфизма f рассматриваемых нечетких графов.

В данной работе рассматривается взаимосвязь между возможной степенью изоморфизма нечетких графов и их нечеткими инвариантами.

Рассмотрим произвольный подграф $\tilde{G}_{X_k} = (X_k, \tilde{U}_{X_k})$ нечеткого графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ на k вершин ($k = \overline{1, n}$).

Степенью внутренней устойчивости $\alpha_{X_k} \in [0,1]$ подграфа $\tilde{G}_{X_k}$ называется величина, определяемая как $\alpha_{X_k} = 1 - \max_{x_i, x_j \in X_k} \mu_X(x_i, x_j)$.

Подмножество $X_k \subseteq X$ называется максимальным нечетким внутренне устойчивым множеством со степенью внутренней устойчивости $\alpha_{X_k}^0$, если справедливо неравенство $(\forall X' \supseteq X_k)(\alpha_{X'} < \alpha_{X_k}^0)$.

¹ Таганрогский государственный радиотехнический университет, г. Таганрог.

Пусть $\tau_k = \{X_{K_1}, X_{K_2}, \dots, X_{K_l}\}$ – семейство максимальных нечетких внутренне устойчивых k вершинных множеств со степенями внутренней устойчивости $\alpha_{X_{K_1}}^0, \alpha_{X_{K_2}}^0, \dots, \alpha_{X_{K_l}}^0$ соответственно.

Обозначим через $\alpha_{X_k}^{\max} = \max\{\alpha_{X_{K_1}}^0, \alpha_{X_{K_2}}^0, \dots, \alpha_{X_{K_l}}^0\}$.

Если семейство $\tau_k = \emptyset$, то положим $\alpha_{X_k}^{\max} = \alpha_{X_{k-1}}^{\max}$.

Величина $\alpha_{X_k}^{\max}$ означает, что в графе $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ существует подграф на k вершин со степенью внутренней устойчивости $\alpha_{X_k}^{\max}$ и не существует никакого другого подграфа с k вершинами, чья степень внутренней устойчивости была бы больше величины $\alpha_{X_k}^{\max}$.

Множество $\tilde{A}_X = \{\langle \alpha_{X_1}^{\max}/1 \rangle, \langle \alpha_{X_2}^{\max}/2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{X_n}^{\max}/n \rangle\}$ называется нечетким множеством внутренней устойчивости нечеткого графа $\tilde{G}_X$.

Свойство 1. Для нечеткого множества внутренней устойчивости справедливо неравенство: $1 \geq \alpha_{X_1}^{\max} \geq \alpha_{X_2}^{\max} \geq \dots \geq \alpha_{X_n}^{\max} \geq 0$.

Величина $\alpha_{X_1}^{\max}$ равна 1, если в графе существует хотя бы одна вершина без петли, а величина $\alpha_{X_n}^{\max}$ равна 0, если в графе существует хотя бы одно ребро со степенью 1.

Степенью внешней устойчивости $\beta_{X_k} \in [0,1]$ подграфа $\tilde{G}_{X_k}$ называется величина, определяемая как $\beta_{X_k} = \min_{\forall x_j \in X \setminus X_k} \max_{\forall x_i \in X_k} \mu_X(x_j, x_i)$.

Подмножество $X_k \subseteq X$ является минимальным нечетким внешне устойчивым множеством со степенью внешней устойчивости $\beta_{X_k}^0$, если справедливо неравенство $(\forall X' \subset X_k)(\beta_{X'} < \beta_{X_k}^0)$.

Обозначим через $\beta_k^{\max} = \max\{\beta_{X_{K_1}}^0, \beta_{X_{K_2}}^0, \dots, \beta_{X_{K_l}}^0\}$,

где $\beta_{X_{K_1}}^0, \beta_{X_{K_2}}^0, \dots, \beta_{X_{K_l}}^0$ – степени внешней устойчивости минимальных нечетких внешне устойчивых множеств $X_{K_1}, X_{K_2}, \dots, X_{K_l}$, имеющих ровно k элементов. Величина $\beta_k^{\max}$ означает, что в графе $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ существует подграф на k вершин со степенью внешней устойчивости $\beta_k^{\max}$ и не существует никакого другого подграфа с k вершинами,

чья степень внутренней устойчивости была бы больше величины $\beta_k^{\min}$.

Множество $\tilde{T}_X = \{\langle \beta_{X_1}^{\max}/1 \rangle, \langle \beta_{X_2}^{\max}/2 \rangle, \dots, \langle \beta_{X_n}^{\max}/n \rangle\}$ называется нечетким множеством внешней устойчивости нечеткого графа $\tilde{G}_X$.

Свойство 2. Для нечеткого множества внешней устойчивости справедливо неравенство

$$0 \leq \beta_1^{\max} \leq \beta_2^{\max} \leq \dots \leq \beta_n^{\max} = 1.$$

Подмножество вершин $X' \subseteq X$ называется нечеткой кликой со степенью $\delta_{X'} = \min_{\forall x_i \in X'} \max_{\substack{\forall x_j \in X' \\ x_j \neq x_i}} (\mu_U(x_i, x_j) \vee \mu_U(x_j, x_i))$.

Подмножество вершин $X' \subseteq X$ является максимальной кликой со степенью $\delta_{X'} \in [0,1]$, если справедливо выражение $(\forall X'' \subseteq X)(X'' \supset X' \rightarrow \delta_{X''} < \delta_{X'})$, иначе говоря, если любое подмножество X'' , включающее в себя подмножество X' , является кликой со степенью меньшей величины $\delta_{X'}$.

Как и для внутренне устойчивых множеств, рассмотрим семейство всех максимальных нечетких клик $\tau_k = \{X_{K_1}, X_{K_2}, \dots, X_{K_l}\}$, содержащих ровно

k вершин со степенями $\delta_{X_{K_1}}^0, \delta_{X_{K_2}}^0, \dots, \delta_{X_{K_l}}^0$

соответственно. Обозначим через $\delta_{X_k}^{\max} =$

$$\max\{\delta_{X_{K_1}}^0, \delta_{X_{K_2}}^0, \dots, \delta_{X_{K_l}}^0\}.$$

Если семейство $\tau_k = \emptyset$, то положим $\delta_{X_k}^{\max} = \delta_{X_{k-1}}^{\max}$.

Величина $\delta_{X_k}^{\max}$ означает, что в графе $\tilde{G}_X$ существует k -вершинный подграф, в котором между любыми двумя вершинами существует ребро со степенью не менее $\delta_{X_k}^{\max}$ и не существует никакого другого подграфа с k вершинами, чья степень была бы больше величины $\delta_{X_k}^{\max}$.

Множество $\tilde{K} = \{\langle \delta_{X_1}^{\max}/1 \rangle, \langle \delta_{X_2}^{\max}/2 \rangle, \dots, \langle \delta_{X_n}^{\max}/n \rangle\}$ называется нечетким множеством клик нечеткого графа $\tilde{G}_X$.

Свойство 3. Для нечеткого множества клик справедливо неравенство

$$1 = \delta_{X_1}^{\max} \geq \delta_{X_2}^{\max} \geq \dots \geq \delta_{X_n}^{\max} = 0.$$

Величина $\delta_{X_1}^{\max}$ равна 0, если любой k -вершинный подграф содержит хотя бы одну пару вер-

шин, например (x_i, x_j) , между которыми нет никакого ребра, т.е. $\mu_U(x_i, x_j) = \mu_U(x_j, x_i) = 0$.

Построим дополнительный неориентированный нечеткий граф $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}')$, для которого справедливо $(\forall x_i, x_j \in X) (\mu_U(x_i, x_j) = \mu_U(x_j, x_i) = \min\{1 - \mu_U(x_i, x_j), 1 - \mu_U(x_j, x_i)\})$.

Свойство 4. Семейство максимальных нечетких клик исходного графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U})$ совпадает с семейством максимальных нечетких внутренне устойчивых множеств дополнительного графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}')$.

Данное свойство непосредственно вытекает из определений максимальной нечеткой клики и максимального нечеткого внутренне устойчивого множества. Из свойства 4 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие. Нечеткое множество клик нечеткого графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ совпадает с нечетким множеством внутренней устойчивости дополнительного графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}')$.

Подмножество $X_k \subseteq X$ является нечеткой базой со степенью $b \in [0, 1]$, если любая вершина $x_* \in X \setminus X_k$ достижима из некоторой вершины $x_0 \in X_k$ со степенью b и существует вершина $x'_* \in X \setminus X_k$, недостижимая из любой вершины $x_0 \in X_k$ со степенью $b' > b$.

Подмножество $X_k^{\min} \subseteq X$ является минимальной нечеткой базой со степенью b , если оно является минимальным в том смысле, что не существует подмножества $X' \subset X_k^{\min}$, обладающего таким же свойством достижимости.

Пусть $\tau_{X_k} = \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_l}\}$ – семейство нечетких баз, состоящих из k вершин со степенями $b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_l}$. Обозначим через $b_{X_k}^{\max} = \max\{b_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_{k_l}\}$. Величина $b_{X_k}^{\max}$ означает, что в графе $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ существует подмножество, состоящее из k вершин, из которого достижимы все оставшиеся вершины со степенью не менее $b_{X_k}^{\max}$ и не существует подмножества, состоящего из k вершин, из которого достижимы все оставшиеся вершины со степенью более $b_{X_k}^{\max}$. Если семейство $\tau_{X_k} = \emptyset$, то определим $b_{X_k}^{\max} = b_{X_{k-1}}^{\max}$.

Множество $\tilde{B}_X = \{\langle b_{X_1}^{\max}/1 \rangle, \langle b_{X_2}^{\max}/2, \dots,$

$\langle b_{X_n}^{\max}/n \rangle\}$ называется нечетким множеством баз нечеткого графа $\tilde{G}_X$.

Аналогично понятиям нечеткой базы, нечеткого множества баз рассмотрим понятия нечеткой антибазы и нечеткого множества антибаз.

Подмножество $X_k \subseteq X$ является нечеткой антибазой со степенью $\bar{b} \in [0, 1]$, если из любой вершины $x_* \in X \setminus X_k$ достижима некоторая вершина $x_0 \in X_k$ со степенью $\bar{b}$ и существует вершина $x'_* \in X \setminus X_k$, из которой не достижима никакая вершина $x_0 \in X_k$ со степенью $\bar{b}' > \bar{b}$.

Подмножество $X_k^{\min} \subseteq X$ является минимальной нечеткой антибазой со степенью $\bar{b}$, если оно минимально в том смысле, что не существует подмножества $X' \subset X_k^{\min}$, обладающего таким же свойством достижимости.

Пусть $\tau_{X_k} = \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_l}\}$ – семейство нечетких антибаз, состоящих из k вершин со степенями $\bar{b}_{k_1}, \bar{b}_{k_2}, \dots, \bar{b}_{k_l}$. Обозначим через $\bar{b}_{X_k}^{\max} = \max\{\bar{b}_{k_1}, \bar{b}_{k_2}, \dots, \bar{b}_{k_l}\}$. Величина $\bar{b}_{X_k}^{\max}$ означает, что в графе $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$ существует подмножество, состоящее из k вершин, достижимое из всех оставшихся вершин со степенью не менее $\bar{b}_{X_k}^{\max}$ и не существует подмножества, состоящего из k вершин, достижимого из всех оставшихся вершин со степенью более $\bar{b}_{X_k}^{\max}$. Если семейство $\tau_{X_k} = \emptyset$, то также, как и для нечетких баз, определим $\bar{b}_{X_k}^{\max} = \bar{b}_{X_{k-1}}^{\max}$.

Множество $\tilde{B}_X^- = \{\langle \bar{b}_{X_1}^{\max}/1 \rangle, \langle \bar{b}_{X_2}^{\max}/2, \dots, \langle \bar{b}_{X_n}^{\max}/n \rangle\}$ называется нечетким множеством антибаз нечеткого графа $\tilde{G}_X = (X, \tilde{U}_X)$.

Свойство 5. Из определений нечеткого множества баз и антибаз непосредственно вытекают неравенства: $0 \leq b_{X_1}^{\max} \leq b_{X_2}^{\max} \leq \dots \leq b_{X_n}^{\max} = 1$ и $0 \leq \bar{b}_{X_1}^{\max} \leq \bar{b}_{X_2}^{\max} \leq \dots \leq \bar{b}_{X_n}^{\max} = 1$.

Окрасим каждую вершину $x \in X$ в один из k цветов ($1 \leq k \leq n$) и рассмотрим подграф $\tilde{G}_i = (X_i, \tilde{U}_i)$.

Здесь X_i – подмножество вершин, окрашенных в одинаковый i -й цвет. Тогда величина $\alpha_i = 1 - \bigvee_{x, y \in X_i} \mu_G(x, y)$ определит степень внутренней

устойчивости нечеткого подграфа $\tilde{G}_i = (X_i, \tilde{U}_i)$ [3].

$$\text{Величину } L = \bigwedge_{i=1, k} \alpha_i = \bigwedge_{i=1, k} \left(1 - \bigvee_{x, y \in X_i} \mu_G(x, y) \right)$$

назовем степенью разделимости нечеткого графа $\tilde{G}_X$ при его окраске в k цвета.

Нечеткий граф $\tilde{G}_X$ может быть раскрашен в произвольное число красок k и при этом степень разделимости L зависит от их числа. Нечеткому графу $\tilde{G}_X$ поставим в соответствие семейство нечетких множеств $\mathfrak{R} = \{\tilde{A}_G\}$, $\tilde{A}_G =$

$= \{ \langle L_{\tilde{A}}(k) / k \mid k = \overline{1, n} \rangle \}$, где $L_{\tilde{A}}(k)$ определяет степень разделимости графа $\tilde{G}_X$ при его некоторой окраске в k цветов.

Нечеткое множество $\tilde{\gamma} = \{ \langle L_{\tilde{\gamma}}(k) / k \mid k = \overline{1, n} \rangle \}$ является нечетким хроматическим множеством графа $\tilde{G}_X$, если для любого другого множества $\tilde{A}_G \in \mathfrak{R}$ справедливо $\tilde{A}_G \subseteq \tilde{\gamma}$.

Иначе говоря, $(\forall \tilde{A}_G \in \mathfrak{R})(\forall k = \overline{1, n}) [L_{\tilde{A}}(k) \leq L_{\tilde{\gamma}}(k)]$. Или, иными словами, нечеткое хроматическое множество определяет наибольшие степени разделимости графа $\tilde{G}_X$ при его окраске в $1, 2, \dots, n$ цветов.

Отметим ряд свойств, которыми обладает нечеткое хроматическое множество.

Свойство 6. $L_{\tilde{\gamma}}(n) = 1$. Иными словами, при окраске нечеткого графа $\tilde{G}_X$, содержащего n вершин, в n цветов степень разделимости равна 1.

Свойство 7. $L_{\tilde{\gamma}}(1) \geq 0$, причем $(L_{\tilde{\gamma}}(1) = 0) \leftrightarrow (\exists x, y \in X \mid \mu_G(x, y) = 1)$.

Иными словами $\tilde{G}$, при окраске нечеткого графа, содержащего n вершин, в один цвет степень разделимости равна 0, если существует хотя бы одно ребро со степенью 1.

Свойство 8. $(\forall i, j = \overline{1, n}) (i > j \rightarrow L_{\tilde{\gamma}}(i) \geq L_{\tilde{\gamma}}(j))$.

Иными словами, чем большее количество красок используется при окраске нечеткого графа $\tilde{G}_X$, тем больше его оптимальная степень разделимости L .

Свойство 9. $(\forall i, j, k = \overline{1, n}) [(i > k > j) \& (L_{\tilde{\gamma}}(i) = L_{\tilde{\gamma}}(j)) \rightarrow (L(k) = L(i) = L(j))]$.

Иными словами, если при “оптимальной” окраске нечеткого графа $\tilde{G}_X$ в i и j цветов степень разделимости одинаковая, то и при “оптимальной” окраске графа в любое другое количество цветов, лежащее между значениями i и j , степень разделимости не изменится.

Свойство 10. $(L_{\tilde{\gamma}}(i) = 1 \& i \neq n) \rightarrow (\forall k \in \overline{i+1, n}) (L_{\tilde{\gamma}}(k)) = 1$.

Иными словами, если для некоторого числа красок i ($i \neq 1$) существует окраска графа со степенью разделимости, равной 1, то и для любого другого числа красок, большего i , также существует окраска со степенью разделимости, равной 1.

Свойство 11. $(L_{\tilde{\gamma}}(i) = 0 \& i \neq 1) \rightarrow (\forall k \in \overline{1, i-1}) (L_{\tilde{\gamma}}(k) = 0)$.

Иными словами, если для некоторого числа красок i ($i \neq n$) не существует окраски графа со степенью разделимости, отличной от 0, то и для любого другого числа красок, меньшего i , также не существует окраски со степенью разделимости, отличной от 0.

В работах [4–8] были предложены и обоснованы методы нахождения нечетких инвариантов нечеткого графа.

Пусть $\tilde{A}_X = \{ \langle \alpha_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \alpha_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{x_n}^{\max} / n \rangle \}$ и $\tilde{A}_Y = \{ \langle \alpha_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \alpha_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \alpha_{y_n}^{\max} / n \rangle \}$ – нечеткие множества внутренней устойчивости,

$\tilde{T}_X = \{ \langle \beta_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \beta_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \beta_{x_n}^{\max} / n \rangle \}$ и $\tilde{T}_Y = \{ \langle \beta_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \beta_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \beta_{y_n}^{\max} / n \rangle \}$ – нечеткие множества внешней устойчивости,

$\tilde{K}_X = \{ \langle \delta_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \delta_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \delta_{x_n}^{\max} / n \rangle \}$ и $\tilde{K}_Y = \{ \langle \delta_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \delta_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \delta_{y_n}^{\max} / n \rangle \}$ – нечеткие множества клик,

$\tilde{B}_X = \{ \langle b_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle b_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle b_{x_n}^{\max} / n \rangle \}$ и $\tilde{B}_Y = \{ \langle b_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle b_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle b_{y_n}^{\max} / n \rangle \}$ – нечеткие множества баз,

$\tilde{B}_X^- = \{ \langle \bar{b}_{x_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \bar{b}_{x_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \bar{b}_{x_n}^{\max} / n \rangle \}$ и $\tilde{B}_Y^- = \{ \langle \bar{b}_{y_1}^{\max} / 1 \rangle, \langle \bar{b}_{y_2}^{\max} / 2 \rangle, \dots, \langle \bar{b}_{y_n}^{\max} / n \rangle \}$ – нечеткие множества антибаз,

$\tilde{\gamma}_X = \{ \langle L_{x_k} / k \rangle \mid k = \overline{1, n} \}$ и $\tilde{\gamma}_Y = \{ \langle L_{y_k} / k \rangle \mid k = \overline{1, n} \}$ –

нечеткие хроматические множества нечетких графов $\tilde{G}_X$ и $\tilde{G}_Y$ соответственно, а f – степень изоморфизма рассматриваемых графов.

Тогда выполняется следующее свойство.

Свойство 12. Справедливо неравенство

$$f \leq \bigwedge_{k=1, n} (\alpha_{X_k}^{\max} \leftrightarrow \alpha_{Y_k}^{\max}) \& \bigwedge_{k=1, n} (\beta_{X_k}^{\max} \leftrightarrow \beta_{Y_k}^{\max}) \& \\ \& \bigwedge_{k=1, n} (\delta_{X_k}^{\max} \leftrightarrow \delta_{Y_k}^{\max}) \& \\ \& \bigwedge_{k=1, n} (b_{X_k}^{\max} \leftrightarrow b_{Y_k}^{\max}) \& \bigwedge_{k=1, n} (\bar{b}_{X_k}^{\max} \leftrightarrow \bar{b}_{Y_k}^{\max}) \& \\ \& \bigwedge_{k=1, n} (L_{X_k} \leftrightarrow L_{Y_k}).$$

Данное свойство позволяет оценить возможную степень изоморфизма нечетких графов по вычисленным нечетким инвариантам.

Пример. Рассмотрим пример оценки степени изоморфизма нечетких графов $\tilde{G}_X$ и $\tilde{G}_Y$, приведенных на рисунке 1.

Нечеткие инварианты нечетких графов $\tilde{G}_X$ и $\tilde{G}_Y$ определяются как

$$\begin{aligned} \tilde{A}_X &= \{ \langle 1/1 \rangle, \langle 1/2 \rangle, \langle 0,7/3 \rangle, \langle 0/4 \rangle \}, \\ \tilde{A}_Y &= \{ \langle 1/1 \rangle, \langle 0,9/2 \rangle, \langle 0,6/3 \rangle, \langle 0,2/4 \rangle \}, \\ \tilde{T}_X &= \{ \langle 0,1/1 \rangle, \langle 0,5/2 \rangle, \langle 1/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{T}_Y &= \{ \langle 0,1/1 \rangle, \langle 0,3/2 \rangle, \langle 0,7/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{K}_X &= \{ \langle 1/1 \rangle, \langle 1/2 \rangle, \langle 0,3/3 \rangle, \langle 0/4 \rangle \}, \\ \tilde{K}_Y &= \{ \langle 1/1 \rangle, \langle 0,7/2 \rangle, \langle 0,4/3 \rangle, \langle 0,1/4 \rangle \}, \\ \tilde{B}_X &= \{ \langle 0,3/1 \rangle, \langle 0,7/2 \rangle, \langle 1/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{B}_Y &= \{ \langle 0,3/1 \rangle, \langle 0,6/2 \rangle, \langle 0,7/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{B}_X^- &= \{ \langle 0,5/1 \rangle, \langle 0,7/2 \rangle, \langle 1/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{B}_Y^- &= \{ \langle 0,3/1 \rangle, \langle 0,4/2 \rangle, \langle 0,7/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}, \\ \tilde{\gamma}_X &= \{ \langle 0/1 \rangle, \langle 0,5/2 \rangle, \langle 1/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \} \text{ и} \\ \tilde{\gamma}_Y &= \{ \langle 0,3/1 \rangle, \langle 0,6/2 \rangle, \langle 0,9/3 \rangle, \langle 1/4 \rangle \}. \end{aligned}$$

Тогда степень изоморфизма рассматриваемых графов оценится как

$$f \leq \min(1 \leftrightarrow 1; 1 \leftrightarrow 0,9; 0,7 \leftrightarrow 0,6; 0 \leftrightarrow 0,2) \& \\ \& \min(1 \leftrightarrow 1; 1 \leftrightarrow 0,7; 0,3 \leftrightarrow 0,4; 0 \leftrightarrow 0,1) \& \\ \& \dots \& \min(0 \leftrightarrow 0,3; 0,5 \leftrightarrow 0,6; 1 \leftrightarrow 0,9; 1 \leftrightarrow 1) = \\ = 0,8 \& 0,7 \& \dots \& 0,7 = 0,7.$$

Таким образом, степень изоморфизма нечетких графов, приведенных на рисунке 1, не может превышать значения 0,7.

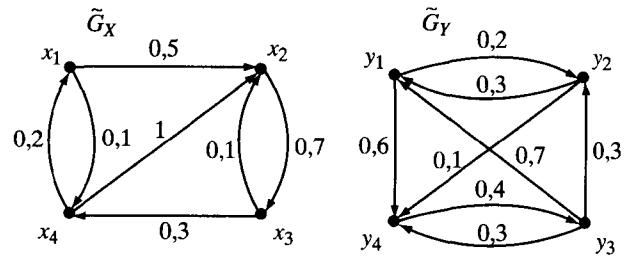


Рис. 1. Пример оцениваемых нечетких графов

Заключение. Нечеткие инварианты не изменяются при изоморфных преобразованиях нечетких графов. В связи с этим они могут быть эффективно использованы при поиске различных морфизмов рассматриваемых нечетких графов. Это, в свою очередь, может оказать существенную помощь при определении аналогии нечетких интеллектуальных систем, заданных в виде сетевых или фреймовых моделей, сводимых к нечетким графам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 342 с.
3. Берштейн Л.С., Карелин В.П., Целых А.Н. Модели и методы принятия решений в интегрированных интеллектуальных системах. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1999. 278 с.
4. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Определение нечетких внутренне устойчивых, внешне устойчивых множеств и ядер нечетких ориентированных графов // Известия РАН. ТиСУ. 1999. № 1. С. 161–165.
5. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Оценка изоморфизма нечетких графов на основе нечетких множеств внешней устойчивости // Труды Международного конгресса "Искусственный интеллект в XXI веке" ICAI'2001. М.: Физматлит, 2001. Т. 2. С. 583–590.
6. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Оценка изоморфизма нечетких графов на основе нечетких множеств внешней устойчивости и клик нечетких графов // Программные продукты и системы, 2002. № 1. С. 12–15.
7. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткая раскраска и оценка степени изоморфизма нечетких графов // Известия РАН. ТиСУ. 2002. № 3. С. 116–122.
8. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. Estimation of Isomorphism Degree of Fuzzy Graphs // Proceedings of Third Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT'2003. University of Applied Sciences at Zittau/Goerliz, Germany, 2003. P. 781–784.

ESTIMATION OF FUZZY GRAPHS ISOMORPHISM ON THE BASIS OF FUZZY INVARIANTS

L.S. Bershtein, A.V. Bozhenyuk

The questions of isomorphism degree estimation of fuzzy graphs are discussed in this paper. The definitions and properties of fuzzy invariants of fuzzy graphs are presented in it. The estimation method of isomorphism degree of fuzzy graphs is suggested and proved. The example of isomorphism degree estimation is considered.

REFERENCES

1. Zykov A.A. 1987. *Osnovy teorii grafov*. [Basics of graph theory]. Moscow, "Nauka" Publ.: 384 p. (In Russian).
2. Kofman A. 1982. *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv*. [Introduction to the theory of fuzzy sets]. Moscow, "Radio i svyaz" Publ.: 342 p. (In Russian).
3. Bershteyn L.S., Karelin V.P., Tselykh A.N. 1999. *Modeli i metody prinyatiya resheniy v integrirovannykh intellektual'nykh sistemakh*. [Models and methods of decision making in the integrated intelligent systems]. Rostov-on-Don, Rostov State University Publ.: 278 p. (In Russian).
4. Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V. 1999. Opredelenie nechetkikh vnutrenne ustoychivyykh, vneshne ustoychivyykh mnozhestv i yader nechetkikh orientirovannykh grafov. [Defining fuzzy stable internally, externally stable sets and fuzzy nuclei oriented graphs]. *Izvestiya RAN. TiSU*. (1): 161–165. (In Russian).
5. Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V. 2001. Otsenka izomorfizma nechetkikh grafov na osnove nechetkikh mnozhestv vneshney ustoychivosti. [Evaluation isomorphism of fuzzy graphs based on fuzzy sets external sustainability]. In: *Trudy Mezhdunarodnogo kongressa "Iskusstvennyy intellekt v XXI veke" ICAI'2001*. [Proceedings of the International Congress "Artificial Intelligence in the XXI century" ICAI'2001]. Vol. 2. Moscow, Fizmatlit Publ.: 583–590. (In Russian).
6. Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V. 2002. Otsenka izomorfizma nechetkikh grafov na osnove nechetkikh mnozhestv vneshney ustoychivosti i klik nechetkikh grafov. [Evaluation isomorphism of fuzzy graphs based on fuzzy sets of external stability and cliques of fuzzy graphs]. *Programmnye produkty i sistemy*. (1): 12–15. (In Russian).
7. Bershteyn L.S., Bozhenyuk A.V. 2002. Nechetkaya raskraska i otsenka stepeni izomorfizma nechetkikh grafov. [Fuzzy coloring and assessment of the isomorphism degree of fuzzy graph]. *Izvestiya RAN. TiSU*. (3): 116–122. (In Russian).
8. Bershtein L.S., Bozhenyuk A.V. 2003. Estimation of Isomorphism Degree of Fussy Graphs. In: *Proceedings of Third Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT'2003*. University of Applied Sciences at Zittau/Goerliz, Germany. P. 781–784.