

УДК 532.5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ УЧЕТЕ МИКРОСТРУКТУРЫ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ

© 2007 г. К.Л. Белов¹

Представлены результаты исследований распространения капиллярных волн в плоском слое жидкости при учете микроструктуры приповерхностного слоя.

Капиллярные волны представляют собой хорошо известный случай поверхностных волн, существование которых вызвано наличием поверхностного натяжения и которые достаточно хорошо изучены в случае постоянного поверхностного натяжения [1, 2]. Вместе с тем известно, что многие поверхностно-активные вещества, растворенные в воде, приводят к проявлению неклассических свойств жидкости. Примером моделей неклассических жидкостей являются нематические жидкие кристаллы [3] или микрополярные жидкости [4–7]. Гидродинамика микрополярных жидкостей основана на определяющих соотношениях континуума Коссера, т.е. среды с моментными напряжениями, каждая частица которой имеет степени свободы абсолютно твердого тела [4–7].

В данной работе рассматриваются капиллярные волны в случае, когда поверхностное натяжение зависит от ориентации частиц поверхностного слоя жидкости, а сам поверхностный слой моделируется пленкой упругой микрополярной жидкости.

Рассмотрим плоский слой жидкости толщины H со свободной границей (рис. 1). Уравнения движения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости имеют вид [1, 2]

$$-\nabla p + \rho g \mathbf{i}_2 = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right), \quad (1)$$

где ∇ – оператор градиента в эйлеровых координатах, p – давление, ρ – плотность среды, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, в случае плоской задачи $\mathbf{v} = v_1(x, y, t)\mathbf{i}_1 + v_2(x, y, t)\mathbf{i}_2$, x и y – декартовы координаты, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ – координатные орты.

На нижней границе слоя (при $y = 0$) обращается в нуль нормальная компонента скорости, т.е. $v_2 = 0$.

Уравнение свободной границы имеет вид $y = \eta(x, t)$, где $\eta(x, t)$ – подлежащая определению функция, описывающая отклонение свободной поверхности от горизонтальной плоскости. Будем считать, что свободная поверхность обладает поверхностным натяжением W . В рамках предлагаемой модели поверхностная энергия W зависит от ориентации частиц поверхностного слоя жидкости. Такой вид поверхностной энергии встречается, например, в теории жидких кристаллов [3]. В рамках модели микрополярного континуума ориентация частиц тела задается при помощи тройки ортонормированных векторов – директоров $\mathbf{D}_k$. Это позволяет ввести не только линейную скорость частиц $\mathbf{v}$, но и учесть микровращение частиц путем введения независимой от $\mathbf{v}$ угловой скорости вращения частиц $\mathbf{w}$ [4–7]. В данной работе примем, что W зависит от поворотов частиц, лежащих в окрестности поверхности жидкости [7]. Таким образом, поверхностный слой моделируется двумерной микрополярной жидкой пленкой.

Используя [8], уравнения движения микрополярной пленки, выражающие баланс импульса и момента импульса для произвольной ее части, можно представить в виде

$$\text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho_s \frac{d}{dt} \mathbf{v}_s, \quad \text{Div } \mathbf{M} + \mathbf{T}_x = \rho_s \gamma \frac{d}{dt} \mathbf{w}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ – тензоры усилий и моментов типа Коши, Div – поверхностный оператор дивергенции в эйлеровых координатах, ρ_s – поверхностная плотность, $\mathbf{v}_s$ – линейная скорость пленки, $\mathbf{f}$ – главный вектор сил, действующих на пленку со стороны жидкости и внешней среды, γ – скалярная мера вращательной инерции частиц пленки, символ $\mathbf{T}_x$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{T}$.

Уравнения состояния двумерной упругой микрополярной жидкости имеют вид [8, 9]

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{T} = -p_s \mathbf{O} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^T, \quad (3)$$

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

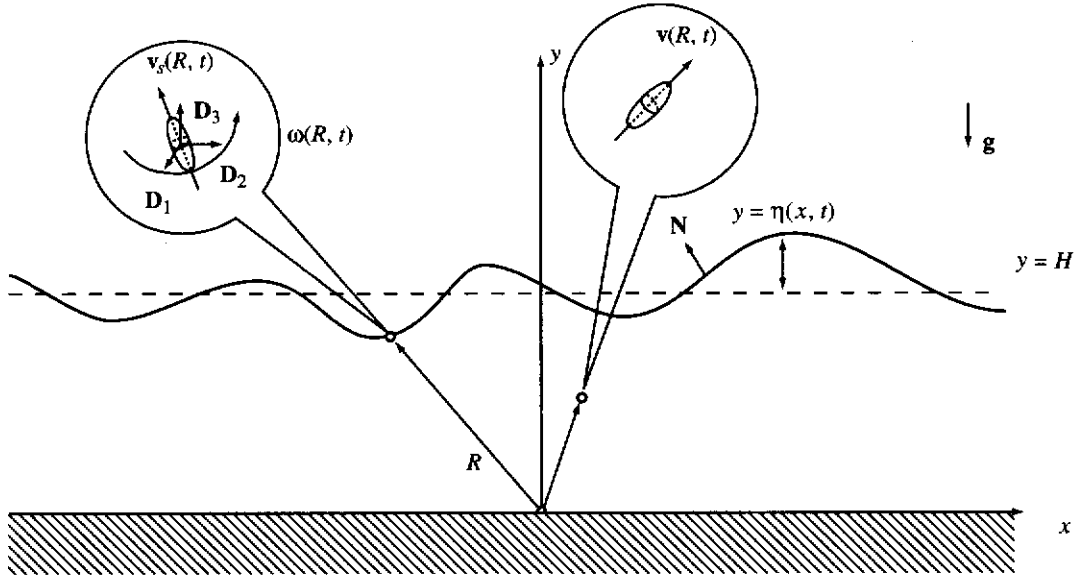


Рис. 1. Слой жидкости с микрополярной пленкой

где W – плотность поверхностной энергии, отнесенная к единице площади поверхности в отсчетной конфигурации, p_s – двумерное давление, $\mathbf{O}$ – единичный тензор на поверхности, $\mathbf{B}$ – тензор кривизны микроструктуры в текущей конфигурации. Функцию W примем в виде одноконстантного приближения

$$W = \frac{1}{2} v \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T) + \sigma_0 J. \quad (4)$$

Здесь v – упругая постоянная, имеющая величину и размерность как у постоянных Франка для нематиков [3], σ_0 – постоянный коэффициент поверхностного натяжения, J описывает изменение площади поверхности участка пленки [8, 9].

Условия совместности на границе раздела пленки и жидкости состоят в совпадении нормальных скоростей пленки и жидкости и в кинематическом условии на свободной поверхности [1], выражающем совпадение нормальных скоростей движения поверхности и частиц пленки,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_1^s \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_2^s. \quad (5)$$

Главный вектор сил $\mathbf{f}$, действующих на пленку, состоит из веса пленки и реакции со стороны идеальной жидкости:

$$\mathbf{f} = -\rho_s g \mathbf{i}_2 + p \mathbf{N}. \quad (6)$$

С учетом (6) уравнения движения пленки (2) можно рассматривать как динамическое условие

совместности, аналогичное уравнению Лапласа в теории капиллярности.

Рассмотрим движение микрополярной жидкости в плоском слое со свободной границей в случае бесконечно малых движений. В случае плоской задачи ориентация частиц микрополярной жидкости определяется одним параметром – углом поворота α триады $\mathbf{D}_k$ вокруг некоторой оси, для определенности совпадающей с направлением $\mathbf{D}_3 = \mathbf{i}_3$, $\mathbf{w} = \omega \mathbf{i}_3$. Тогда $\mathbf{B} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3$ [7].

Линеаризуя систему уравнений (1) – (6) в окрестности равновесного состояния и, как и в [1, 2], вводя потенциал скоростей $\mathbf{v} = \nabla \phi$, линеаризованную систему уравнений можно привести к системе уравнений и краевых условий относительно ϕ и η , описывающих распространение капиллярных волн:

$$\Delta \phi = 0 \quad (0 < y < H); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \eta - \frac{\sigma_0}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \\ + \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} = 0 \quad (y = H). \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (7), (8) имеет вид $\phi = \Phi_0 \text{ch } ky \exp \cdot (ikx - \Omega t)$, где k – волновое число, Ω – частота, Φ_0 – постоянная интегрирования. При этом должно быть выполнено дисперсионное соотно-

шение, связывающее частоту Ω с волновым числом k :

$$\Omega^2 = gk \tanh kH \frac{1 + \frac{\sigma_0}{\rho} k^2}{1 + \frac{\rho_s}{\rho} \tanh kH}. \quad (10)$$

Сравнивая дисперсионное уравнение (10) с аналогичным уравнением для случая обычной жидкости [1, 2], можно сказать, что влияние микрополярной пленки сводится к проявлению ее инерционных свойств, которые больше всего проявляются для коротких длин волн ($kH \rightarrow \infty$). Микрополярность (величина ν) на распространение капиллярных волн здесь не влияет, ожидать такое влияние следует в случае неоднородной ориентации частиц поверхностного слоя, а также в рамках трехмерной модели приповерхностного слоя.

Полученные результаты могут представлять интерес для разработки ультразвуковых методов экспериментального определения свойств жидкостей с поверхностно-активными веществами.

Автор выражает благодарность В.А. Батищеву и В.А. Еремееву за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
3. Жен де П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1982. 304 с.
4. Eringen C. A unified continuum theory of liquid crystals // ARI. 1997. V. 50. P. 73–84.
5. Мугун Н.П., Прохоренко П.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.
6. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. II. Fluid Media. Berlin, Heidelberg, New York et al: Springer-Verlag, 2001. 325 p.
7. Еремеев В.А., Zubov Л.М. Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.
8. Еремеев В.А., Zubov Л.М. Общая нелинейная теория упругих микрополярных оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 124–169.
9. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. Local symmetry group in the general theory of elastic shells // J. Elasticity. 2006. V. 85. № 2. P. 125–152.

SURFACE WAVES IN FLUIDS ALLOWING FOR MICROSTRUCTURE OF THE NEAR-SURFACE LAYER

K.L. Belov

Within the framework of the theory of micropolar fluids one of the models of the surface waves has been considered. The linearized boundary value problems have been deduced and their solutions have been obtained.

REFERENCES

1. Whitham Gerald. 1977. *Lineynye i nelineynye volny*. [*Linear and nonlinear waves*]. (Translation from English). Moscow, Mir Publ.: 624 p. (In Russian).
2. Lighthill James. 1981. *Volny v zhidkostyakh*. [*Waves in liquids*]. (Translation from English). Moscow, Mir Publ.: 600 p. (In Russian).
3. de Gennes Pierre-Gilles. 1982. *Fizika zhidkikh kristallov*. [*Physics of Liquid Crystals*]. Moscow, Mir Publ.: 304 p. (In Russian).
4. Eringen C. 1997. A unified continuum theory of liquid crystals. *ARI*. 50: 73–84.
5. Migun N.P., Prokhorenko P.P. 1984. *Gidrodinamika i teploobmen gradientnykh techeniy mikrostrukturnoy zhidkosti*. [*Hydrodynamics and heat exchange fluid gradient currents microstructural*]. Minsk, “Nauka i tekhnika” Publ.: 264 p. (In Russian).
6. Eringen A.C. 2001. *Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media*. Berlin, Heidelberg, New-York et al, Springer-Verlag: 325 p.
7. Eremeev V.A., Zubov L.M. 1999. [The theory of elastic and viscoelastic micro polar liquids]. *PMM*. 63(5): 801–815. (In Russian).
8. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2003. [General nonlinear theory of elastic shells micropolar]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. (Spetsvypusk: Nelineynye problemy mekhaniki cploshnykh sred. [Special Issue: Nonlinear Problems of continuum mechanics])*. P. 124–169. (In Russian).
9. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. 2006. Local symmetry group in the general theory of elastic shells. *J. Elasticity*. 85(2): 125–152.