

УДК 517.968.21+517.518.23+621.3.014.4

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОРРЕКТНОСТИ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ

© 2005 г. Я.А. Науменко¹

Рассмотрен локальный признак корректности интегрального уравнения первого рода для плотности вихревых токов, распределенных на плоской многосвязной идеально-проводящей поверхности. Показано, что достаточным условием корректности является принадлежность компонент свободного члена уравнения некоторому пространству Бесова. Предложен численный метод решения уравнения. Приведены примеры расчетов.

Существует обширный класс задач, в которых необходим расчет стационарных магнитных полей в присутствии идеально-проводящих тел. Для численных расчетов магнитных полей в присутствии массивных идеальных проводников применимы известные интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода, которые на настоящий момент хорошо изучены. Возможно и применение метода конечных элементов (МКЭ). Значительные трудности вызывает моделирование магнитного поля в присутствии тонкослойных идеальных проводников с краем. Их толщина обычно столь мала по сравнению с остальными геометрическими размерами, что естественно считать их бесконечно тонкими, то есть поверхностями. К указанной задаче сводится обширный класс технических проблем, например, моделирование крейсерского режима движения высокоскоростного наземного транспорта, проектирование экранов для защиты персонала и высокочувствительного оборудования и т.д. Основной трудностью численного моделирования магнитного поля в присутствии идеально-проводящих поверхностей произвольной формы с краем является то, что известные интегральные уравнения второго рода либо теряют смысл на разомкнутых поверхностях, либо обладают весьма сложными и неудобными для численной реализации ядрами, что делает проблематичным их практическое применение. Использование МКЭ для таких задач приводит к системам линейных алгебраических уравнений колоссальной размерности, которые являются при этом плохо обусловленными. В данной работе предлагается математическая модель на основе векторного

интегрального уравнения типа Фредгольма первого рода для поверхностных токов.

Рассмотрим стационарное магнитное поле индукции $\vec{B}$ в присутствии конечной идеально-проводящей плоской многосвязной поверхности S . Как известно, магнитное поле в идеальный проводник не проникает, поэтому условие идеальной проводимости можно записать в виде

$$\vec{B}\vec{n} = 0 \text{ на } S, \quad (1)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к S .

В терминах потенциала $\vec{A}$: $\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$, $\text{div}\vec{A} = 0$, который без ограничения общности считаем имеющим на S лишь касательную компоненту, условие (1) выглядит как $\text{rot}_n \vec{A} = 0$ на S , то есть

$$\vec{A} = \vec{C} \text{ на } S, \quad (2)$$

где $\vec{C}$ – некоторое поле, такое что $\text{rot}_n \vec{C} = 0$.

Если исходить из интегрального представления потенциала в линейной однородной среде [1]

$$\vec{A}(M) = \vec{A}^0(M) + \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{\sigma}(N)}{r_{NM}} dS_N,$$

где $\vec{A}^0(M)$ – потенциал невозмущенного магнитного поля внешних (заданных) источников; μ – магнитная проницаемость; $\vec{\sigma}$ – плотность поверхностных токов; r_{NM} – расстояние между точками N, M , то (2) будет означать

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{\sigma}(N)}{r_{NM}} dS_N = -\frac{\vec{A}^0(M)}{\mu} + \frac{\vec{C}(M)}{\mu}, \quad M \in S \quad (3)$$

и, таким образом, расчет результирующего поля сведется к решению уравнения (3) для $\vec{\sigma}$.

¹ Лаборатория энергетики и электротехники Южного научного центра РАН, г. Новочеркасск

Неизвестное поле $\bar{C}$ подчиним требованию разрешимости уравнения (3) в классе соленоидальных полей, замыкающихся в пределах S , то есть

$$\operatorname{div} \bar{C} = 0 \text{ на } S, \quad \bar{C} \bar{\nu} = 0 \text{ на } l, \quad (4)$$

где l – край поверхности S , $\bar{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали к l , лежащий в касательной к S плоскости. В случае, когда S является многосвязной, необходимо добавить условие

$$\oint_{l_i} \bar{C} d\bar{l} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где l_i – граница отверстия i ; m – число отверстий. Требование (5) означает отсутствие магнитного потока через отверстия.

При наличии так называемых “вмороженных потоков” условие (5) не выполняется и с каждым отверстием в S связан заданный магнитный поток. Прибавив к невозмущенному магнитному полю дополнительный член вида

$$\bar{A}^*(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \Phi_i \operatorname{rot} \oint_{l_i} \frac{d\bar{l}_N}{r_{NM}}, \quad M \in S,$$

получим эквивалентное уравнение, для которого условие (5) выполняется. Здесь $L_1, L_2, \dots, L_m$ – система контуров, проходящих через соответствующие отверстия в поверхности S и замыкающиеся вне ее; Φ_i – заданный магнитный поток через i -е отверстие.

Уравнение (3) в случае плоской односвязной S подробно исследовано в [2]. В работе [3] результаты [2] обобщены на криволинейные поверхности с отверстиями. Существенно, что невозмущенное магнитное поле задавалось в [2, 3] своими источниками в трехмерном пространстве R^3 . В данной работе свободный член рассматривается локально – заданным непосредственно на поверхности S . Мы не требуем, чтобы он являлся следом функции, принадлежащей к конкретному функциональному пространству в R^3 .

Будем далее полагать, что l удовлетворяет условиям Липшица [4].

Исследование уравнения (3), нагруженного условиями (4, 5), выполним вариационным методом [5]. Для этого сначала рассмотрим $L_2(S)$ – пространство всевозможных вещественных функций $\{\bar{a}_k\}$ на S , суммируемых с квадратом. Скалярное произведение и норма в $L_2(S)$ имеют вид*

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2)_{L_2} = \iint_S \bar{a}_1 \bar{a}_2 dS, \quad \|\bar{a}\| = (\bar{a}, \bar{a})_{L_2}^{1/2}. \quad (6)$$

* Интегралы здесь и ниже понимаются в смысле Лебега

Согласно [6], векторное пространство $L_2(S)$ допускает на S разложение в прямую сумму трех ортогональных подпространств: $L_2(S) = L_2^{(n)}(S) \oplus L_2^{(r)}(S) \oplus L_2^{(c)}(S)$, где $L_2^{(n)}(S)$ состоит из обобщенных по Вейлю потенциальных, $L_2^{(c)}(S)$ – соленоидальных, а $L_2^{(r)}(S)$ – гармонических полей. При этом пространство $L_2^{(r)}$ является конечномерным, размерность которого на единицу меньше связности поверхности S . В частности, в случае, когда S односвязная, имеем $L_2^{(r)} = \emptyset$.

Введем обозначение $\mathcal{L}(S) = L_2^{(r)}(S) \oplus L_2^{(c)}(S)$. Принадлежность поля $\bar{b} \in \mathcal{L}(S)$ можно понимать в смысле выполнения равенства

$$\iint_S \bar{b} \operatorname{grad} \varphi dS = 0. \quad (7)$$

для любой непрерывной и непрерывно-дифференцируемой на S однозначной функции φ . А если $\bar{b}$ непрерывна в $S \cup l$, условие (7) означает: $\operatorname{div} \bar{b} = 0$ на S , $\bar{b} \bar{\nu} = 0$ на l , поэтому элементы $\mathcal{L}(S)$ еще называют полностью соленоидальными. В соответствии с (4, 5) роль исходного пространства следует отвести $\mathcal{L}(S)$.

Для использования основного вариационного принципа [5] преобразуем уравнение (3) так, чтобы обеспечить принадлежность свободного члена выбранному исходному пространству. А именно, обозначим через $P^{\mathcal{L}}$ оператор ортогонального проектирования $L_2(S)$ на $\mathcal{L}(S)$. Существование такого оператора следует из его определения [7]. Далее подействуем им на обе части равенства в (3) и результат запишем в виде

$$T \bar{C} = \bar{f}, \quad (8)$$

где

$$T = P^{\mathcal{L}} \Gamma, \quad \Gamma \bar{a}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\bar{a}(N)}{r_{NM}} dS_N,$$

$$\bar{f} = -\frac{1}{\mu} P^{\mathcal{L}} \bar{A}^0, \quad (9)$$

а также учтено, что согласно условию (5) $\bar{C} \perp L_2^{(r)}(S)$ и что $P^{\mathcal{L}}$ всякое потенциальное поле аннулирует, то есть $P^{\mathcal{L}} \bar{g} = 0$ для $\forall \bar{g} \in L_2^{(n)}(S)$.

Теорема 1. Уравнение (3) с условиями (4, 5) и уравнение (8) эквивалентны.

Доказательство. Ясно, что любое решение уравнения (3) удовлетворит (8). Нетрудно прове-

речь, что и решение последнего из $\mathcal{Q}^{**}$ удовлетворяет задаче (3-5), то есть для эквивалентности (3-5) и (8) в $\mathcal{Q}$ достаточно принадлежности $\bar{A}^0$ к $L_2(S)$. Действительно, пусть $\bar{\sigma}$ – решение уравнения (8) из $\mathcal{Q}$ и, таким образом, условия (4,5) в обобщенном смысле (7) выполняются. Воспользовавшись определением оператора T из (9) и свойством

$$P^{\mathcal{Q}} \bar{a} + P^{(\Pi)} \bar{a} = \bar{a} \text{ для } \forall \bar{a} \in L_2(S),$$

где $P^{(\Pi)}$ – оператор ортогонального проектирования $L_2(S)$ на $L_2^{(\Pi)}(S)$, перепишем (8) в виде

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\bar{\sigma}(N)}{r_{NM}} dS_N = -\frac{1}{\mu} \bar{A}^0 + \frac{1}{\mu} P^{(\Pi)} (\bar{A}^0 + \Gamma \bar{\sigma}),$$

откуда видно, что при данном $\bar{\sigma}$ и поле

$\bar{C} = P^{(\Pi)} P^{(S)} (\bar{A}^0 + \Gamma \bar{\sigma})$, уравнение (3) удовлетворяется.

Лемма 1. Оператор T линейен, самосопряжен и положителен в $\mathcal{Q}$.

Доказательство. Очевидно, T – линейный оператор, а $\mathcal{Q}$ может служить областью его определения. Убедимся, что он также самосопряжен и положителен в $\mathcal{Q}$. Имеем

$$\begin{aligned} (T \bar{b}_1, \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}} &= (P^{\mathcal{Q}} P^S \Gamma \bar{b}_1, \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}} = (\Gamma \bar{b}_1, \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}} = \\ &= (\bar{b}_1, \Gamma \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}} = (P^{\mathcal{Q}} \bar{b}_1, \Gamma \bar{b}_2)_{L_2} = (\bar{b}_1, P^{\mathcal{Q}} P^S \Gamma \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}} = \\ &= (\bar{b}_1, T \bar{b}_2)_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

На основании теоремы о скачке нормальной производной потенциала простого слоя [8] и первого тождества Грина выполним***:

$$\begin{aligned} (T \bar{b}, \bar{b})_{\mathcal{Q}} &= (\Gamma \bar{b}, \bar{b})_{\mathcal{Q}} = \\ &= \iint_S \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\bar{b}(N)}{r_{NM}} dS_N \bar{b}(M) dS_M = \\ &= \iint_S \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\bar{b}(N)}{r_{NM}} dS_N \bar{b}(M) dS_M = \\ &= \iiint_{\Omega} (|\text{grad} \varphi_x|^2 + |\text{grad} \varphi_y|^2 + |\text{grad} \varphi_z|^2) d\Omega > 0, \\ \forall \bar{b} \in \mathcal{Q}, \quad \|\bar{b}\|_{\mathcal{Q}} &\neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

** Здесь и далее для сокращения записи будем вместо $\mathcal{Q}(S)$ писать просто $\mathcal{Q}$.

*** Производные здесь и далее понимаются в смысле Соболева.

Здесь функция $\bar{b}$ доопределена нулем вне S на $\hat{S}$ – замкнутой гладкой поверхности, т.е. $S \subset \hat{S}$; через b_x, b_y, b_z обозначены декартовы координаты $\bar{b}$, через $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – поверхностные потенциалы простого слоя с плотностями, соответственно, b_x, b_y, b_z , распределенными на $\hat{S}$, а также учтено, что в пространстве $L_2(S)$ множество бесконечно гладких финитных полей является плотным множеством, а всякое соленоидальное на $\hat{S}$ векторное поле имеет нулевое среднее значение.

Установленных в лемме 1 свойств оператора T в $\mathcal{Q}$ достаточно, чтобы была справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Уравнение (8) и вариационная задача

$$F(\bar{\sigma}) = (T \bar{\sigma}, \bar{\sigma})_{L_2} - 2 \text{Re}(\bar{f}, \bar{\sigma})_{L_2} \rightarrow \min \tag{11}$$

эквивалентны в энергетическом пространстве оператора T в $\mathcal{Q}$.

Обозначим это пространство через $\mathcal{Q}_T$, тогда

$$(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)_{\mathcal{Q}_T} = (T \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)_{\mathcal{Q}}, \quad \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{Q}_T} = (\bar{\sigma}, \bar{\sigma})_{\mathcal{Q}_T}^{1/2}, \tag{12}$$

а поскольку $\mathcal{Q}_T$ в рамках вариационного метода получается у нас замыканием по норме (12) пространства $\mathcal{Q}$, то эквивалентность уравнения (8) и задачи (3-5) сохраняется в $\mathcal{Q}_T$. Существенно, что входящий в T ортопроектор $P^{\mathcal{Q}}$ при вычислении скалярных произведений в (11, 12) можно опустить, то есть использовать представления

$$\begin{aligned} F(\bar{\sigma}) &= (\Gamma \bar{\sigma}, \bar{\sigma})_{L_2} - \frac{2}{\mu} \text{Re}(\bar{A}^0, \bar{\sigma})_{L_2} \rightarrow \min, \\ \bar{\sigma} &\in \mathcal{Q}_T; \end{aligned} \tag{13}$$

$$(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)_{\mathcal{Q}_T} = (\Gamma \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)_{L_2}, \quad \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \in \mathcal{Q}_T, \tag{14}$$

удобные для численной реализации.

Потребуем от компонент потенциала $\bar{A}^0$, определенных на S , принадлежности к пространству Бесова $B_2^{1/2}(S)$ [4]. Норма в нем может быть задана в виде

$$\|g\|_{B_2^{1/2}(S)} = \|g\|_{L_2(S)} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\|\Delta_i(h, S)g\|_{L_2(S)}}{h^{1/2}} \right]^2 \frac{dh}{h} \right\}^{1/2}.$$

Здесь

$$\Delta_i(h, S)g = \begin{cases} g(x + he_i) - g(x), [x, x + he_i] \subset S, \\ 0, [x, x + he_i] \not\subset S, \end{cases}$$

а $x = (x_1, x_2) \in S$.

Лемма 2. Справедливо вложение

$$B_2^{1/2}(S) \rightarrow B_2^{1/2}(\hat{S}) \quad (15)$$

Доказательство. В силу того, что граница S является липшицевой, элементы пространства $B_2^{1/2}(S)$ могут быть продолжены на всю плоскость линейным ограниченным образом [9], т.е. $B_2^{1/2}(S) \rightarrow B_2^{1/2}(R^2)^{****}$. В свою очередь, по [4], $B_2^{1/2}(R^2) \rightarrow W_2^1(R^3)$. Наконец, согласно [4], имеет место $W_2^1(R^3) \rightarrow B_2^{1/2}(\hat{S})$. Отсюда непосредственно следует (15).

Существенно, что (15) позволяет продолжить компоненты $\bar{A}^0$ с S на $\hat{S}$ с сохранением класса.

Покажем, что в рассматриваемой постановке функционал $\mathfrak{F}(\bar{\sigma}) = (\bar{f}, \bar{\sigma})_{L_2}$ ограничен в $\mathfrak{L}_T$. Это будет означать [5], что вариационная задача имеет и притом единственное решение, а норма последнего равна норме функционала $\mathfrak{F}(\bar{\sigma})$.

Теорема 3. Функционал $\mathfrak{F}(\bar{\sigma}) = (\bar{f}, \bar{\sigma})_{L_2}$ ограничен в $\mathfrak{L}_T$. При этом справедлива оценка:

$$|\mathfrak{F}(\bar{\sigma})| \leq \vartheta \left(\|A_x^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_y^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_z^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 \right)^{1/2} \|\bar{\sigma}\|_{\mathfrak{L}_T},$$

где A_x^0, A_y^0, A_z^0 – декартовы координаты $\bar{A}^0$, а ϑ – некоторая постоянная, не зависящая от $\bar{A}^0$.

Доказательство. Выполним

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}(\bar{\sigma})| &= |(\bar{f}, \bar{\sigma})_{L_2}| = \left| \left(-\frac{1}{\mu} \text{P}^2 \bar{A}^0, \bar{\sigma} \right)_{L_2} \right| = \\ &= \frac{1}{\mu} \left| \left(\bar{A}^0, \text{P}^2 \bar{\sigma} \right)_{L_2} \right| = \frac{1}{\mu} \left| \left(\bar{A}^0, \bar{\sigma} \right)_{L_2} \right| = \\ &= \frac{1}{\mu} \left| \iint_S \bar{A}^0 \bar{\sigma} dS \right| = \\ &= \frac{1}{\mu} \left| \iint_S A_x^0 \sigma_x dS + \iint_S A_y^0 \sigma_y dS + \iint_S A_z^0 \sigma_z dS \right|, \quad (16) \end{aligned}$$

где $\bar{\sigma}$ доопределена на $\hat{S}$ вне S нулем.

**** Здесь и далее обозначение $H \rightarrow G$ подразумевает линейное вложение пространства H в G такое, что $\|g\|_G \leq c \|g\|_H$, $\forall g \in H$, причем постоянная c не зависит от выбора g

Обратная теорема о следах [4] утверждает, что $B_2^{1/2}(\hat{S}) \rightarrow W_2^1(R^3)$. На основе первого тождества Грина и неравенства Коши-Буняковского перепишем (16) в виде

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}(\bar{\sigma})| &= \frac{1}{\mu} \left| \iint_{\Omega} \text{grad} A_x^0 \text{grad} \varphi_x d\Omega + \right. \\ &+ \left. \iint_{\Omega} \text{grad} A_y^0 \text{grad} \varphi_y d\Omega + \iint_{\Omega} \text{grad} A_z^0 \text{grad} \varphi_z d\Omega \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left[\iint_{\Omega} \left(|\text{grad} A_x^0|^2 + |\text{grad} A_y^0|^2 + |\text{grad} A_z^0|^2 \right) d\Omega \times \right. \\ &\times \left. \iint_S \left(|\text{grad} \varphi_x|^2 + |\text{grad} \varphi_y|^2 + |\text{grad} \varphi_z|^2 \right) d\Omega \right]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\|A_x^0\|_{W_2^1(R^3)}^2 + \|A_y^0\|_{W_2^1(R^3)}^2 + \|A_z^0\|_{W_2^1(R^3)}^2 \right)^{1/2} \|\bar{\sigma}\|_{\mathfrak{L}_T}. \end{aligned}$$

На основе вложения (15) окончательно получим искомую оценку, причем постоянная ϑ является произведением постоянных из соответствующих теорем вложения, приводящих к (15), не зависит от $\bar{A}^0$ и определяется лишь геометрией области S .

Как видим, норма функционала $\mathfrak{F}(\bar{\sigma})$ оценивается через нормы компонент свободного члена в пространстве $B_2^{1/2}(S)$. Согласно [5], справедливы следующие следствия из теоремы 3.

Следствие 1. Решение вариационной задачи (11), а значит, и уравнения (8) существует и единственно в $\mathfrak{L}_T$.

Следствие 2. Справедлива оценка

$$\|\bar{\sigma}\|_{\mathfrak{L}_T} \leq \vartheta \left(\|A_x^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_y^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 + \|A_z^0\|_{B_2^{1/2}(S)}^2 \right)^{1/2}.$$

Следствие 3. Решение уравнения (8) устойчиво.

Отметим, что в силу обратимости использованных теорем вложения, при задании невозмущенного магнитного поля конечной энергии своими источниками, компоненты свободного члена уравнения (8) заведомо принадлежат пространству $B_2^{1/2}(S)$. Таким образом, уравнение (8), корректное в смысле [2], остается корректным и в нашем рассмотрении. В практических расчетах условие принадлежности компонент свободного члена пространству $B_2^{1/2}(S)$ несущественно, так как условие ограниченности энергии невозмущенного магнитного поля (что справедливо, разумеется, для любой физической системы), авто-

матически означает выполнение указанного условия. Это непосредственно следует из обратимости теорем вложения, использованных в лемме 2. Более того, в подавляющем большинстве практических задач компоненты свободного члена уравнения (8) являются бесконечно гладкими функциями. Требование их принадлежности к пространству $B_2^{1/2}(S)$ существенно слабее.

Решение вариационной задачи (11), а следовательно, и уравнения (8) дает последовательность Ритца [5] $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n, \dots$, где $\bar{\sigma}_n(M) = \sum_{k=1}^n C_k^{(n)} \bar{b}_k(M)$, $M \in S$; $\{\bar{b}_k(M)\}_{k=1}^n$ – базис, состоящий из линейно-независимых функций, принадлежащих $\mathcal{Q}_T$; $\{C_k^{(n)}\}$ – решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^n (\Gamma \bar{b}_k, \bar{b}_i)_{L_2} C_k^{(n)} = - \frac{1}{\mu} (\bar{A}, \bar{b}_i)_{L_2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

При выборе базиса учтем, что операция векторного умножения на нормаль $\bar{n}$ к S превращает всякое соленоидальное поле на S в потенциальное поле, а всякое потенциальное, напротив, – в соленоидальное. Поэтому, если в качестве $\bar{b}_k$ взять повернутый на 90° в плоскости S градиент кусочно-линейной функции с локальным носителем, широко применяемой в методе конечных элементов для аппроксимации слабых решений краевых задач, то будем иметь соленоидальную в интегральном смысле кусочно-постоянную функцию, пример которой приведен с фрагментом триангуляции на рисунке 1.

Для областей, допускающих эффективное разбиение на прямоугольники, схожий базис с квадратичной гладкостью предложен в [10] для численного решения двумерной системы уравнений Навье-Стокса. Как показано в [2], введенный базис является полным в $L_2^{(C)}(S)$ в смысле сходимости аппроксимативной последовательности Ритца. Если поверхность S является многосвязной, то полноты базиса в пространстве $L_2^{(C)}(S)$ будет недостаточно для аппроксимации решения уравнения (8).

Рассмотрим множество Δ_Σ треугольников разбиения, имеющих общие точки с границей отверстия. Пример такого множества изображен на рисунке 2. На каждом из треугольников поместим вектор-константу таким образом, чтобы она была параллельна той стороне треугольника, которая совпадает с границей множества Δ_Σ . Откалибровав вектор-константы, получим

соленоидальное базисное поле. Ясно, что построенное подобным образом поле принадлежит пространству $\mathcal{Q}$, причем в нем присутствует компонента из $L_2^{(\Gamma)}$. Действительно, в силу того, что построенное поле является кусочно-постоянным, для него имеет смысл понятие циркуляции, взятой по контуру, охватывающему отверстие и лежащему в Δ_Σ , причем по построению такая циркуляция не равна нулю. Сопоставив каждому отверстию подобный дополнительный базисный элемент, мы получим уже базис, полный в $\mathcal{Q}$. Компоненты произвольного поля, принадлежащие $L_2^{(\Gamma)}$, аппроксимируются с помощью построенных базисных полей, а остаток, принадлежащий пространству $L_2^{(\Gamma)}(S)$, – с помощью основного базиса. Так как пространство $\mathcal{Q}$ является в $\mathcal{Q}_T$ плотным множеством, то справедлива теорема.

Теорема 4. Построенный базис полон в пространстве $\mathcal{Q}_T$ в смысле сходимости аппроксимативной последовательности Ритца.

При формировании и численном решении на ЭВМ СЛАУ (17) без ограничений применимы методики оптимизации вычислительного процесса, описанные в работах [2, 11, 12]. Наличие нелокальных базисных полей уменьшает скорость формирования основной матрицы СЛАУ (17) незначительно.

Ранее уже имели место попытки анализа и расчета магнитного поля в присутствии идеально-проводящих поверхностей с краем. Однако

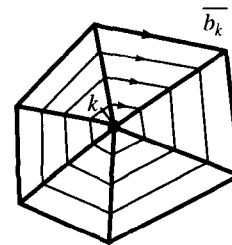


Рис. 1. Пример базисного поля

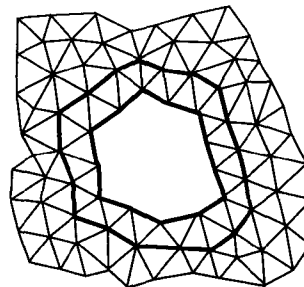


Рис. 2. Множество Δ_Σ

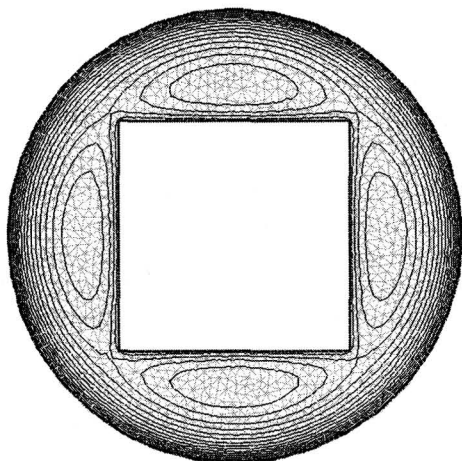


Рис. 3. Пластина в однородном поле

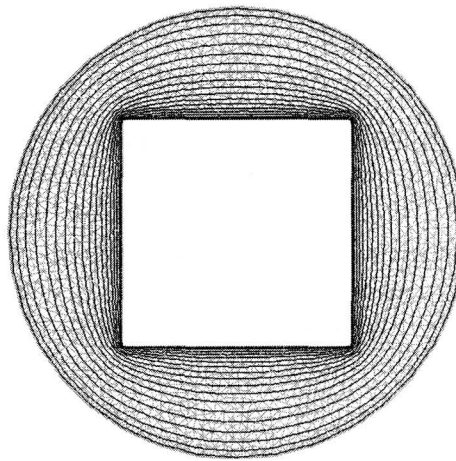


Рис. 4. Пластина с “вмороженным” потоком

полученные до настоящего времени результаты позволяли проводить расчет лишь в частных случаях, таких как плоскопараллельное приближение и/или для поверхностей специальной формы. При этом вопросы разрешимости, единственности и устойчивости решений используемых уравнений практически не рассматривались. Векторная постановка задачи вообще не применялась, так как при ее применении ожидается резкое увеличение вычислительно размерности задачи. Однако использование введенного нами базиса приводит к вычислительной размерности, эквивалентной скалярным постановкам. Вместе с тем, векторная постановка является более естественной для рассматриваемого класса задач и не потребует серьезных модификаций численного метода в случае ее обобщения на криволинейные поверхности высокого топологического рода.

Пример расчета плотности вихревых токов в многосвязной идеально-проводящей пластине, помещенной в однородное поперечное магнитное поле, приведен на рисунке 3. Расчет для той же пластины в отсутствии невозмущенного магнитного поля, но при наличии единичного магнитного потока через отверстие показан на рисунке 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
2. Науменко Я.А., Астахов В.И. // Изв. вузов. Электромеханика, 2003. № 5. С. 11–16.
3. Астахов В.И., Науменко Я.А. // Альтернативные естественно-возобновляющиеся источники энергии и энергосберегающие технологии, экологическая безопасность регионов: Мат-лы выездн. сесс. секции энергетики отд. энергетики, машиностроения и процессов упр. РАН. Ессентуки, 12–15 апреля 2005 г. Ессентуки, 2005. Ч. 1. С. 133–139.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996. 480 с.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
6. Weyl. H. // Duke Math. Journal, 7 (1940). P. 411–444.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.
9. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
10. Griffiths D.F. // Intern. J. Numer. Methods in Fluids, 1981. V. 1. № 4. P. 323–364.
11. Науменко Я.А., Астахов В.И. // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Техн. науки, 2004. Спец. вып. С. 116–117.
12. Науменко Я.А. // Математические методы в физике, технике и экономике: Сб. науч. ст. каф. “Прикладная математика” Южно-Российского гос. техн. ун-та (НПИ). Новочеркасск, 2004. С. 40–42.

LOCAL ATTRIBUTE OF CORRECTNESS AND NUMERICAL COMPUTING OF INTEGRAL EQUATION OF FIRST KIND FOR DENSITY OF EDDY CURRENTS

J.A. Naumenko

The local attribute of a correctness of the integral equation of the first kind for density of the distributed on a multiconnected flat ideally-conducting surface eddy currents is considered. It is proved that the finite norm of components of free member in sense of some Besov's space is enough to correctness. The numerical method for equation solving and examples of its usage are presented.

REFERENCES

1. Tozoni O.V. 1975. *Metod vtorichnykh istochnikov v elektrotekhnike*. [Method of secondary sources in electrical engineering]. Moscow, Energiya Publishers: 296 p. (In Russian).
2. Naumenko Ya.A., Astakhov V.I. 2003. *Izv. vuzov. Elektromekhanika*. (5): 11–16. (In Russian).
3. Astakhov V.I., Naumenko Ya.A. 2005. In: *Al'ternativnye estestvenno-vozobnovlyayushchiesya istochniki energii i energosberegayushchie tekhnologii, ekologicheskaya bezopasnost' regionov: Materialy vyezdnoy sessii seksii energetiki otb. energetiki, mashinostroeniya i protsessov upravleniya RAN. Essentuki, 12–15 aprelya 2005 g.* [Alternative natural renewable energy sources and energy-saving technology, environmental safety regions: Materials assizes section Energy Branch of Energy, Engineering and Process Control Sciences. Essentuki, April 12–15, 2005]. Part 1. Essentuki: 133–139. (In Russian).
4. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skiy S.M. 1996. *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya*. [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publishers: 480 p. (In Russian).
5. Mikhlin S.G. 1977. *Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh*. [Linear partial differential equations]. Moscow, "Vysshaya shkola" Publishers: 432 p. (In Russian).
6. Weyl H. 1940. *Duke Math. Journal*. 7(1940): 411–444.
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. 1981. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza*. [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka Publishers: 544 p. (In Russian).
8. Vladimirov V.S. 1976. *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. [The equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publishers: 528 p. (In Russian).
9. Nikol'skiy S.M. 1977. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*. [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publishers: 456 p. (In Russian).
10. Griffiths D.F. 1981. *Intern. J. Numer. Methods in Fluids*. 1(4): 323–364.
11. Naumenko Ya.A., Astakhov V.I. 2004. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhn. nauki*. (Special Issue): 116–117. (In Russian).
12. Naumenko Ya.A. 2004. In: *Matematicheskie metody v fizike, tekhnike i ekonomike: Sb. nauch. st. kaf. "Prikladnaya matematika" Yuzhno-Rossiyskogo gos. tekhn. un-ta (NPI)*. [Mathematical methods in physics, engineering and economics. Collection of scientific articles of department "Applied Mathematics" of South-Russian State Technical University (NPI)]. Novocherkassk: 40–42. (In Russian).