

УДК 539.3

ОБ УСЛОВИЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН УСКОРЕНИЯ В ТЕРМОУПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ

© 2007 г. В.А. Еремеев¹

Получены условия распространения волн ускорения (волн слабого разрыва) в термоупругой микрополярной среде.

Распространение нелинейных волн в твердых телах представляет собой достаточно сложный процесс. Решение описывающих его краевых задач в аналитической форме удается провести в редких случаях. Одним из таких случаев являются волны ускорения, или волны слабого разрыва. Они представляют собой разрывные решения уравнений движения среды, для которых происходит нарушение непрерывности вторых производных рассматриваемых полей на некоторых сингулярных поверхностях. Детальный анализ условий существования таких решений для нелинейно-упругих, термоупругих и сред с памятью проведен в работах [1, 2]. Некоторые обобщения этих результатов на случай более общей модели среды – среды с моментными напряжениями (микрополярного континуума) – даны в [3, 4]. В работе [3] рассмотрены волны ускорения в упругих и вязкоупругих микрополярных средах. В [4] установлена связь существования волн ускорения в упругой микрополярной среде с выполнением условия сильной эллиптичности уравнений равновесия. В случае двумерной микрополярной среды (для микрополярных оболочек) волны ускорения изучались в [5–7].

Здесь анализ, изложенный в работе [4], обобщен на случай термоупругой микрополярной среды. Получено условие существования слабых разрывных решений уравнений движения и уравнения теплопроводности. Доказано утверждение, аналогичное теореме Френеля–Адамара–Дюгема в нелинейной механике простых материалов [1, 2]. Показано, что при естественных предположениях о виде закона теплопроводности условие существования волны ускорения аналогично случаю упругой среды без температурных напряжений.

В микрополярной среде (континууме Коссера) каждая частица наделена шестью степенями свободы абсолютно твердого тела, возможен учет вращательного взаимодействия частиц среды. При этом наряду с обычными существуют также и моментные напряжения (см., например, [8–23]). Модель Коссера используется для описания гранулированных, порошкообразных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов и наноструктур, магнитных жидкостей, также она нашла применение при построении неклассических моделей стержней, пластин и оболочек. В частности, исследования волновых процессов в микрополярных средах проводились в работах [8–11].

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КОНТИНУУМА КОССЕРА

Уравнения движения микрополярной среды, выражающие баланс импульса и момента импульса для произвольной части тела, имеют вид [8–23]

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{M} + (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{T})_x + \rho \mathbf{m} = \rho \gamma \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \quad (1)$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{R}$ – градиент деформации, div и grad – операторы дивергенции и градиента в лагранжевых координатах, ρ – плотность среды в отсчетной конфигурации, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{m}$ – векторы массовой силы и массового момента, $\rho \gamma$ – скалярная мера вращательной инерции частиц континуума, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ – вектор скорости частиц, радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ задает положение частиц микрополярной среды в момент времени t ,

¹ Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону.

собственно ортогональный тензор микроповорота $\mathbf{H}(t)$ определяет ее ориентацию, $\mathbf{w}$ – вектор угловой скорости микровращения, $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \cdot \mathbf{H}^T \right)_+$, $\frac{d}{dt}$ – материальная производная по времени, которая также будет обозначаться точкой вверху, индекс $\times$ обозначает векторный инвариант тензора второго ранга [24].

При учете теплопереноса уравнения движения (1) дополняются уравнением теплопроводности [1, 2, 24]

$$\rho \theta \frac{d}{dt} \eta = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho c. \quad (2)$$

Здесь θ – температура, η – энтропия, $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла типа Пиолы, c – плотность внутренних источников тепла.

Уравнения состояния термоупругого континуума Коссера можно записать при помощи массовой плотности свободной энергии $\psi = \psi(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \rho \psi_{,\mathbf{E}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{M} = \rho \psi_{,\mathbf{K}} \cdot \mathbf{H}, \\ \eta &= -\psi_{,\theta}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{E}, \mathbf{K}, \theta, \operatorname{grad} \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T$, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{I} = -(\operatorname{grad} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^T$, $\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \leq 0$, где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$ – меры метрической и изгибной деформации, $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Здесь и далее ψ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой, использованы обозначения вида $\psi_{,\mathbf{E}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$ и т.д., а вектор-функция $\mathbf{q}$ один раз непрерывно дифференцируема.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН УСКОРЕНИЯ

Рассмотрим такое движение среды, при котором возможны нарушения непрерывности кинематических и динамических величин на некоторой гладкой поверхности $S(t)$, которую будем называть сингулярной. При этом предполагается существование предельных значений этих величин на S , вообще говоря, разных по разные стороны от S . Скачок поля $\mathbf{A}$ на S будем обозначать двойными квадратными скобками: $[[\mathbf{A}]] = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$.

Волна ускорения (волна слабого разрыва или сингулярная поверхность второго порядка) представляет собой движущуюся сингулярную поверхность, на которой терпят разрывы вторые производные (по пространственным координатам и по времени) от радиуса-вектора положения $\mathbf{R}$ и тензора микроповорота $\mathbf{H}$, в то время

как сами величины и их первые производные непрерывны, т.е. на S выполняются равенства

$$[[\mathbf{F}]] = 0, \quad [[\operatorname{grad} \mathbf{H}]] = 0, \quad [[\mathbf{v}]] = 0, \quad [[\mathbf{w}]] = 0. \quad (4)$$

Также предположим, что поле температуры и его производные непрерывны в окрестности S :

$$[[\theta]] = 0, \quad [[\dot{\theta}]] = 0, \quad [[\operatorname{grad} \theta]] = 0. \quad (5)$$

Из (4), (5) следует непрерывность в окрестности S мер деформации $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$, а с учетом уравнений состояния (3) также и отсутствие скачков у тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$. Кроме того, из (4), (5) также вытекает, что поля вектора теплового потока и энтропии непрерывны:

$$[[\eta]] = 0, \quad [[\mathbf{q}]] = 0.$$

Далее воспользуемся теоремой Максвелла [1, 2]: если поле $\mathbf{A}$ является непрерывным и кусочно-дифференцируемым везде, кроме некоторой поверхности S , и при этом существуют предельные значения производных $\mathbf{A}$ на S , то скачки производных связаны соотношениями

$$[[\dot{\mathbf{A}}]] = -V\mathbf{z}, \quad [[\operatorname{grad} \mathbf{A}]] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{z},$$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к S , V – скорость движения поверхности S в направлении $\mathbf{n}$. Величина $\mathbf{z}$ называется амплитудой скачка поля $\mathbf{A}$ и является тензором того же ранга, что и $\mathbf{A}$.

Эти два уравнения позволяют установить соотношения, связывающие скачки поля $\mathbf{A}$ на сингулярной поверхности вида

$$V[[\operatorname{grad} \mathbf{A}]] = -\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{A}}]].$$

Применение теоремы Максвелла [1, 2] к непрерывным полям скоростей $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, напряжений и моментных напряжений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ позволяет получить систему уравнений, связывающих скачки их производных по пространственным координатам и времени [4]

$$[[\dot{\mathbf{v}}]] = -V\mathbf{a}, \quad [[\dot{\mathbf{w}}]] = -V\mathbf{b},$$

$$[[\operatorname{grad} \mathbf{v}]] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{a}, \quad [[\operatorname{grad} \mathbf{w}]] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{b}, \quad (6)$$

$$V[[\operatorname{div} \mathbf{T}]] = -\mathbf{n} \cdot [[\dot{\mathbf{T}}]], \quad V[[\operatorname{div} \mathbf{M}]] = -\mathbf{n} \cdot [[\dot{\mathbf{M}}]],$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – векторные амплитуды скачков линейного и углового ускорений.

Если массовые силы и моменты непрерывны, то из уравнений движения (1) следуют соотношения

$$[[\operatorname{div} \mathbf{T}]] = -\rho[[\dot{\mathbf{v}}]], \quad [[\operatorname{div} \mathbf{M}]] = -\rho\gamma[[\dot{\mathbf{w}}]]. \quad (7)$$

Дифференцируя уравнения состояния (3)₁, (3)₂ и используя (6)₅, (6)₆, можно уравнения (7) преоб-

разовать к виду, содержащему только векторные амплитуды $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ [4]:

$$A(\mathbf{n}) \cdot \xi = V^2 B \cdot \xi \quad (8)$$

где $\xi = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in \mathbb{R}^6$, $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{H}^T$, $\mathbf{b}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}^T$, $A(\mathbf{n})$ и B – матрицы с тензорными элементами,

$$A(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \psi_{,EE}(\mathbf{n}) & \psi_{,EK}(\mathbf{n}) \\ \psi_{,KE}(\mathbf{n}) & \psi_{,KK}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

и использовано обозначение [4] $\mathbf{G}(\mathbf{n}) = G_{klmn} n_k n_m i_l i_n$ для любого тензора четвертого ранга $\mathbf{G}$ и любого вектора $\mathbf{n}$, представленных разложениями в произвольном декартовом базисе $i_k (k = 1, 2, 3)$. Симметричность матрицы $A(\mathbf{n})$ следует из существования функции свободной энергии ψ , что обеспечивает вещественность квадратов скоростей волн ускорения в упругой микрополярной среде. Требование положительной определенности $A(\mathbf{n})$, необходимой для существования волн ускорения, совпадает с условием сильной эллиптичности уравнений равновесия упругой микрополярной среды [4].

Рассмотрим далее влияние поля температуры на существование волны ускорения. Следующее из (2) уравнение баланса на слабой сингулярной поверхности S $\rho \theta V[\dot{\eta}] = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{q}]$ для волны ускорения удовлетворяется тождественно. Применяя теорему Максвелла к полю вектора потока тепла $\mathbf{q}$ и к градиенту температуры, получим

$$V[\operatorname{div} \mathbf{q}] = -\mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{q}}],$$

$$[\operatorname{grad} \operatorname{grad} \theta] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}, \quad [(\operatorname{grad} \theta)^*] = -V\mathbf{g}, \quad (9)$$

где $\mathbf{g}$ – векторная амплитуда скачка второго градиента температуры.

Аналогично (7), из уравнения теплопроводности (2) следует соотношение

$$[\operatorname{div} \mathbf{q}] = -\rho \theta [\dot{\eta}]. \quad (10)$$

Из уравнений (9), (10) получается равенство

$$\mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{q}}] = \rho \theta V[\dot{\eta}]. \quad (11)$$

Далее ограничимся рассмотрением уравнения состояния для вектора потока тепла $\mathbf{q}$ в форме закона Фурье:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}(\theta) \cdot \operatorname{grad} \theta, \quad \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}(\theta) \cdot \mathbf{h} > 0, \quad \forall \mathbf{h} \neq 0, \quad (12)$$

где $\mathbf{k}(\theta)$ – положительно-определенный тензор теплопроводности. Продифференцировав уравнения состояния (3)₃ и (12) по времени, из (11) получим равенство

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}(\theta) \cdot \mathbf{g} = \rho \theta (\mathbf{n} \cdot \psi_{, \theta E} \cdot \mathbf{a}' + \mathbf{n} \cdot \psi_{, \theta K} \cdot \mathbf{b}'). \quad (13)$$

Уравнения (8) и (13) могут быть записаны вместе с использованием матричных обозначений

$$A_\theta(\mathbf{n}) \cdot \zeta = V^2 B_\theta \cdot \zeta, \quad (14)$$

где $\zeta = (\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{g}) \in \mathbb{R}^9$, $A_\theta(\mathbf{n})$ и B_θ – матрицы с тензорными элементами,

$$A_\theta(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \psi_{,EE}(\mathbf{n}) & \psi_{,EK}(\mathbf{n}) & \mathbf{0} \\ \psi_{,KE}(\mathbf{n}) & \psi_{,KK}(\mathbf{n}) & \mathbf{0} \\ -\rho \theta \mathbf{n} \cdot \psi_{, \theta E} & -\rho \theta \mathbf{n} \cdot \psi_{, \theta K} & \mathbf{k}(\theta) \end{pmatrix},$$

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача о распространении волны ускорения в термоупругой микрополярной среде в случае закона Фурье для вектора потока тепла сведена к спектральной задаче (14). Нетрудно видеть, что симметричность матрицы $A_\theta(\mathbf{n})$ здесь нарушена, а B_θ не является положительно-определенной. Тем не менее спектральная задача распадается на две, а именно на (8) и (13). Спектральная задача (8) исследовалась в [4]. Поскольку матрицы $A(\mathbf{n})$ и B симметричны, то собственные числа обобщенной задачи на собственные значения (8) вещественны. При невырожденном тензоре теплопроводности уравнение (13) также однозначно разрешимо относительно $\mathbf{g}$. Невырожденность $\mathbf{k}(\theta)$ гарантируется неравенством (12). Таким образом, при тех же предположениях, что и в [4], дополненным условием положительной определенности $\mathbf{k}(\theta)$, спектральная задача (14) разрешима однозначно относительно V^2 . При этом скачок $\mathbf{g}$ однозначно определяется по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Это позволяет сформулировать аналог теоремы Френеля–Адамара–Дюгема для термоупругих микрополярных сред:

Теорема 1. Квадраты скоростей распространения волн ускорения в микрополярной упругой среде являются вещественными для произвольных направлений движения, задаваемых вектором $\mathbf{n}$.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия положительной определенности тензора теплопроводности $\mathbf{k}(\theta)$ необходимым и достаточным условием для того, чтобы скорость волны V была вещественной, служит положительная определенность матрицы $A(\mathbf{n})$, которая является дополнительным ограничением, налагаемым на определяющие соотношения (3). Тем самым в этих предположениях верна аналогичная [4] теорема.

Теорема 2. Условие существования волны ускорения в микрополярной термоупругой среде

эквивалентно условию сильной эллиптичности уравнений равновесия.

Заметим, что положительная определенность $k(\theta)$ также совпадает с условием сильной эллиптичности стационарного уравнения теплопроводности.

Нарушение условий положительной определенности $A(n)$ и/или $k(\theta)$ означает возможность существования негладких решений уравнений равновесия или стационарного уравнения теплопроводности.

Таким образом, учет теплопроводности в рамках закона Фурье (12) не влияет на условия существования волн ускорения, которые фактически совпадают с результатами для упругой микрополярной среды [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки отечественной науки и РФФИ (гранты 07-01-00525, 07-08-13589-офи_ц).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. Truesdell C. Rational Thermodynamics / 2nd ed. New York et al.: Springer, 1984. 579 p.
3. Maugin G.A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // Int. J. Engin. Sci. 1974. V. 12. P. 143–157.
4. Еремеев В.А. Волны ускорения в упругих микрополярных средах // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 5. С. 623–625.
5. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Общая нелинейная теория упругих микрополярных оболочек // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелинейн. пробл. механ. сплошных сред. С. 124–169.
6. Eremeyev V.A. Nonlinear micropolar shells: theory and applications // Shell Structures: Theory and Applications. W. Pietraszkiewicz and C. Szymczak (eds.). London et al.: Taylor & Francis, 2005. P. 11–18.
7. Eremeyev V.A., Zubov L.M. On Constitutive Inequalities in Nonlinear Theory of Elastic Shells // ZAMM. 2007. V. 87. № 2. P. 94–101.
8. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford et al.: Pergamon Press, 1986. 383 p.
9. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: МГУ, 1999. 328 с.
10. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2005. № 4. С. 116–124.
11. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2007. № 1. Т. 48. С. 143–150.
12. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris, 1909. vi+226 p. (Appendix, P. 953–1173 of Chwolson's Traite de Physique. 2nd ed., Paris) (English translation: NASA TT F-11, 561, NASA, Washington D.C. 1968).
13. Аэро Э.Л., Кувишинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. № 7. С. 1399–1409.
14. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
15. Koiter W.T. Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I/II // Proc. Koninkl. Netherland. Akad. Wetensch. 1964. V. B 67. № 1. P. 17–44.
16. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
17. Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
18. Шкутин Л.И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
19. Зубов Л.М. Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно-упругих тел с моментными напряжениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 10–16.
20. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.
21. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 801–815.
22. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin et al.: Springer, 1997. 205 p.
23. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Berlin et al.: Springer, 1999. 325 p.
24. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

ON THE CONDITIONS OF PROPAGATION OF ACCELERATION WAVES IN THERMOELASTIC MICROPOLAR CONTINUUM

V.A. Eremeyev

The conditions of propagation of acceleration waves (weak singular waves) in thermoelastic micropolar media have been obtained.

REFERENCES

1. Truesdell C.A. 1977. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York, Academic Press: 295 p.
2. Truesdell C.A. 1984. *Rational Thermodynamics*. 2nd edition. New York, Springer-Verlag: 579 p.
3. Maugin G.A. 1974. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials. *International Journal of Engineering Science*. 12: 143–157.
4. Eremeyev V.A. 2005. Acceleration waves in micropolar elastic media. *Doklady Physics*. 50(4): 204–206.
5. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2003. [General nonlinear theory of elastic micropolar shells]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*. (Spetsvypusk): 124–169. (In Russian).
6. Eremeev V.A. 2005. Nonlinear micropolar shells: theory and applications. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. (Eds. W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak). London, Taylor & Francis: 11–18.
7. Eremeyev V.A., Zubov L.M. 2007. On Constitutive Inequalities in Nonlinear Theory of Elastic Shells. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 87(2): 94–101.
8. Nowacki W. 1986. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon-Press: 383 p.
9. Erofeev V.I. 1999. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy*. [Wave processes in solids with microstructure]. Moscow, Moscow State University Publ.: 328 p. (In Russian).
10. Kulesh M.A., Matveenkov V.P., Shardakov I.N. 2005. Construction and Analysis of an Analytical Solution for the Surface Rayleigh Wave within the Framework of the Cosserat Continuum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 46(4): 556–563.
11. Kulesh M.A., Matveenkov V.P., Shardakov I.N. 2007. Constructing an Analytical Solution for Lamb Waves Using the Cosserat Continuum Approach. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(1): 119–125.
12. Cosserat E., Cosserat F. 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A, Hermann et Fils: 242 p.
13. Aero E.L., Kuvshinskiy E.V. 1960. [The basic equations of the theory of elasticity for media with rotational interaction of particles]. *Fizika tverdogo tela*. 2(7): 1399–1409. (In Russian).
14. Pal'mov V.A. 1964. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 28(3): 496–505.
15. Koiter W.T. 1964. Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I-II. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series B*. 67(1): 17–44.
16. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(5): 85–112.
17. Zhilin P.A. 1982. [Fundamental equations of non-classical theory of elastic shells]. *Trudy Leningradskogo politehnicheskogo instituta*. 386: 29–46. (In Russian).
18. Shkutin L.I. 1988. *Mekhanika deformatsiy gibkikh tel*. [Mechanics of deformations of flexible bodies]. Novosibirsk, Nauka Publ.: 127 p. (In Russian).
19. Zubov L.M. 1990. [Variational principles and invariant integrals for nonlinear elastic bodies with couple stresses]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*. (6): 10–16. (In Russian).
20. Eremeyev V.A., Zubov L.M. 1994. On the stability of elastic bodies with couple-stresses. *Mechanics of Solids*. 29(3): 172–181.
21. Eremeev V.A., Zubov L.M. 1999. The theory of elastic and viscoelastic micropolar liquids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 63(5): 755–767.
22. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin, Springer: 205 p.
23. Eringen A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. Berlin, Springer-Verlag: 325 p.
24. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.