

УДК 539.3

ЗАДАЧА ГОЛОВИНА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2007 г. Л.М. Зубов¹, А.Г. Попов¹

Исследована плоская задача нелинейной теории упругости о чистом изгибе кругового бруса в форме сектора кругового кольца. На величину деформаций не накладывается никаких ограничений. Кроме обычного изгиба, рассмотрен случай выворачивания и выпрямления арки. В случае изотропного несжимаемого материала общего вида задача изгиба арки сведена к нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которого позволяет удовлетворить уравнениям равновесия в каждой точке тела и граничным условиям на криволинейных кромках бруса. Краевые условия на торцах бруса выполняются в интегральном смысле Сен-Венана. В рамках модели полулинейного материала найдено точное решение задачи изгиба и выведена явная формула для зависимости изгибающего момента от кривизны деформированного бруса.

Плоская задача линейной теории упругости о деформации кругового бруса, нагруженного по торцам, впервые была решена Х.С. Головиним [1]. Решение задачи Головина изложено в ряде руководств по линейной теории упругости [2–5]. В настоящей работе представлено обобщение задачи Головина о чистом изгибе кругового бруса на случай больших деформаций.

1. Изгиб и выворачивание кругового бруса из сжимаемого материала. Рассмотрим упругое тело, занимающее в отсчетной конфигурации область в виде сектора полого кругового цилиндра $r_1 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, $0 \leq z \leq l$, где r , φ , z – круговые цилиндрические координаты, r_1 и r_0 – внутренних и внешних радиусов цилиндра, φ_0 – угол раствора сектора. Предположим, что тело испытывает конечную плоскую деформацию, задаваемую соотношениями

$$R = R(r), \quad \Phi = \kappa\varphi, \quad Z = z; \quad \kappa = \text{const}. \quad (1.1)$$

Здесь R , Φ , Z – цилиндрические координаты точек упругого тела в деформированном состоянии. Поскольку рассматривается плоская деформация, длина цилиндра l не играет никакой роли. Очевидно, что при деформации (1.1) любое сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ превращается в сектор кругового кольца с углом раствора $\Phi_0 = \kappa\varphi_0$, т.е. имеет место изгиб кругового бруса.

Подстановка (1.1) была использована ранее [6, 7] при решении задачи о дисклинации в нели-

нейно-упругом теле. Как показано ниже, она позволяет свести задачу сильного изгиба арки к обыкновенному дифференциальному уравнению.

При $\kappa > 0$ кривизна оси кругового бруса сохраняет знак. Случай $\kappa < 0$ описывает деформацию изгиба, при которой происходит выворачивание арки, т.е. имеет место неравенство $R(r_1) > R(r_0)$. Значение $\kappa = 0$ соответствует выпрямлению арки, т.е. превращению сектора кругового кольца в прямоугольник. Указанные три случая следует рассматривать по отдельности.

Градиент деформации (градиент места), отвечающий преобразованию (1.1), вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes (R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_Z) = \\ &= R'(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{\kappa R(r)}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$R' = \frac{dR}{dr},$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{e}_Z$ – ортонормированные базисы соответственно лагранжевых и эйлеровых цилиндрических координат. Физически реализуемая деформация сплошной среды в каждой точке должна удовлетворять условию $\det \mathbf{C} > 0$, которое в применении к (1.2) дает ограничение

$$\kappa R' > 0. \quad (1.3)$$

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону.

Мера деформации Коши $\mathbf{G}$ согласно (1.2) имеет вид

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T = R^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\kappa^2 R^2}{r^2} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (1.4)$$

Определяющее соотношение изотропного упругого тела для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ можно представить в форме [8]

$$\mathbf{D} = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - \mathbf{E} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{G} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{G}^{-1} \right] \cdot \mathbf{C}, \quad (1.5)$$

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}^2 \mathbf{G} - \text{tr} \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}.$$

Здесь I_1, I_2, I_3 – инварианты меры деформации Коши, $W(I_1, I_2, I_3)$ – удельная потенциальная энергия деформации, $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Из (1.2), (1.4), (1.5) следует, что при деформации (1.1) тензор напряжений Пиолы имеет представление

$$\mathbf{D}(r, \varphi) = D_1(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_2(r) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_3(r) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (1.6)$$

В силу (1.6) векторное уравнение равновесия упругой среды при отсутствии массовых сил

$$\mathbf{e}_r \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dr} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{d\mathbf{D}}{r d\varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dz} = 0$$

приводится к одному скалярному

$$\frac{dD_1}{dr} + \frac{D_1 - \kappa D_2}{r} = 0. \quad (1.7)$$

Согласно (1.2), (1.4), напряжения D_1, D_2 выражаются через функцию $R(r)$ и ее производную. Поэтому уравнение (1.7) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, граничными условиями для которого служат требования

$$D_1(r_1) = 0, \quad D_1(r_0) = 0, \quad (1.8)$$

выражающие отсутствие внешней нагрузки на криволинейных краях бруса.

Для того чтобы удовлетворить краевым условиям на торцах бруса $\varphi = 0, \varphi = \varphi_0$ в интегральном смысле Сен-Венана, определим главный вектор $\mathbf{F}$ и главный момент $\mathbf{M}$ сил, действующих в сечении кольца $\varphi = \text{const}$ при деформации вида (1.1). На основании (1.6) имеем

$$\mathbf{F} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D} dr = \mathbf{e}_\varphi \int_{\eta_1}^{\eta_2} D_2(r) dr. \quad (1.9)$$

Следствием уравнения равновесия (1.7) является равенство

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d}{dr} (r D_1) dr = \kappa \int_{\eta_1}^{\eta_2} D_2(r) dr,$$

из которого в силу (1.9) и граничных условий (1.8) вытекает, что $\mathbf{F} = 0$. Поскольку главный вектор равен нулю, главный момент не зависит от точки приведения. Выбирая за полюс точку $R = 0$, получим

$$\mathbf{M} = - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{D} \times R \mathbf{e}_r dr = M \mathbf{e}_z, \quad (1.10)$$

$$M = \int_{\eta_1}^{\eta_2} D_2(r) R(r) dr.$$

Таким образом, показано, что задача чистого изгиба кривого бруса при больших деформациях для любого изотропного упругого материала приводится к нелинейной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

В дальнейшем будем использовать модель популинейного материала, упругий потенциал которого имеет вид [8]

$$W = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2 (\mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E}) + \mu \text{tr} (\mathbf{G}^{1/2} - \mathbf{E})^2. \quad (1.11)$$

Здесь λ, μ – материальные постоянные, $\mathbf{G}^{1/2}$ – положительно определенный квадратный корень из меры деформации Коши (тензор растяжения). Тензор напряжений Пиолы, соответствующий упругому потенциалу (1.11), записывается так:

$$\mathbf{D} = 2\mu \left(\frac{\nu s_1}{1-2\nu} - 1 \right) \mathbf{G}^{-1/2} \cdot \mathbf{C} + 2\mu \mathbf{C}, \quad (1.12)$$

$$s_1 = \text{tr} \mathbf{G}^{1/2} - 3, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Вследствие (1.3) при $\kappa > 0$ тензор растяжения имеет представление

$$\mathbf{G}^{1/2} = R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\kappa R}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (1.13)$$

Из (1.2), (1.12), (1.13) следуют выражения для напряжений Пиолы

$$D_1 = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu) R' + \frac{\nu \kappa R}{r} - 1 \right],$$

$$D_2 = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[\nu R' + \frac{\kappa(1-\nu) R}{r} - 1 \right], \quad (1.14)$$

$$D_3 = \frac{2\mu \nu}{1-2\nu} \left[R' + \frac{\kappa R}{r} - 2 \right].$$

Подставляя (1.14) в (1.7), получим дифференциальное уравнение относительно $R(r)$, справедливое в случае полуминерального материала

$$r^2 R'' + rR' - \kappa^2 R = \frac{1-\kappa}{1-\nu} r. \quad (1.15)$$

Решение уравнения (1.15), удовлетворяющее условиям (1.8), имеет вид

$$R(r) = a_1 r^\kappa + a_2 r^{-\kappa} + \frac{r}{(1-\nu)(1+\kappa)},$$

$$a_1 = \frac{(1-2\nu)(r_0^{\kappa+1} - r_1^{\kappa+1})}{(1-\nu)(1+\kappa)(r_0^{2\kappa} - r_1^{2\kappa})}, \quad (1.16)$$

$$a_2 = \frac{r_0^{-\kappa+1} - r_1^{-\kappa+1}}{(1-\nu)(1+\kappa)(r_1^{-2\kappa} - r_0^{-2\kappa})}.$$

При помощи (1.10), (1.14), (1.16) найдем явное выражение изгибающего момента ($\rho_1 = r_1/r_0$)

$$M(\kappa) = \frac{2\mu r_0^2}{(1-\nu)(1+\kappa)(1-\rho_1^{2\kappa})^2} \times$$

$$\times \left[\frac{3\kappa - 2\nu\kappa + 2\nu - 1}{2(1+\kappa)} (1-\rho_1^{\kappa+1})^2 (1-\rho_1^{2\kappa}) - \right.$$

$$- \frac{1}{2} (1-\rho_1^{-\kappa+1})^2 (1-\rho_1^{2\kappa}) \rho_1^{2\kappa} - \frac{1}{2} (1-\rho_1^2) (1-\rho_1^{2\kappa})^2 -$$

$$- 2\kappa(1-\nu)\rho_1^{2\kappa}(1+\rho_1^2) \ln \rho_1 +$$

$$\left. + 2\kappa(1-\nu)\rho_1^{\kappa+1}(1+\rho_1^{2\kappa}) \ln \rho_1 \right]. \quad (1.17)$$

В задаче об изгибе арки с выворачиванием, когда $\kappa < 0$, функция $R(r)$ в силу (1.3) должна удовлетворять ограничению $R'(r) < 0$, что приводит к таким выражениям для тензора растяжения и напряжений Пиолы:

$$G^{1/2} = -R'e_r \otimes e_r - \frac{\kappa R}{r} e_\phi \otimes e_\phi + e_z \otimes e_z.$$

$$D_1 = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu)R' + \frac{\nu\kappa R}{r} + 1 \right],$$

$$D_2 = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[\nu R' + \frac{\kappa(1-\nu)R}{r} + 1 \right], \quad (1.18)$$

$$D_3 = \frac{-2\mu\nu}{1-2\nu} \left[R' + \frac{\kappa R}{r} + 2 \right].$$

Уравнение для функции $R(r)$ при $\kappa < 0$ отличается от (1.15) и имеет вид

$$r^2 R'' + rR' - \kappa^2 R = -\frac{1-\kappa}{1-\nu} r. \quad (1.19)$$

Решением уравнения (1.19), удовлетворяющим краевым условиям (1.8), служит функция

$$R(r) = b_1 r^\kappa + b_2 r^{-\kappa} - \frac{r}{(1-\nu)(1+\kappa)}, \quad (1.20)$$

$$b_1 = -(1-2\nu) \left[\frac{r_1^{-\kappa+1}}{(1-\nu)(1+\kappa)} - b_2 r_1^{-2\kappa} \right],$$

$$b_2 = \frac{r_1^{-\kappa+1} - r_0^{-\kappa+1}}{(1-\nu)(1+\kappa)(r_1^{-2\kappa} - r_0^{-2\kappa})}.$$

Несмотря на то что функция $R(r)$ при $\kappa < 0$ отличается от таковой при $\kappa > 0$, можно проверить, что зависимость $M(\kappa)$ в случае $\kappa < 0$ также описывается формулой (1.17). Таким образом, выражение (1.17) охватывает оба случая: $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$.

Графики зависимости $\mu^{-1}M(\kappa)$ изгибающего момента от кривизны деформированной арки при $\nu = 0,3$ изображены на рис. 1–3. Рисунок 1 соответствует случаю тонкого бруса ($r_1 = 1$, $r_0 = 1,1$), рис. 2 – случаю бруса средней толщины ($r_1 = 1$, $r_0 = 2$), а рис. 3 – случаю толстого бруса ($r_1 = 1$, $r_0 = 10$). На участках приведенных диаграмм деформирования, расположенных правее точки максимума и левее точки минимума, процесс изгиба арки становится неустойчивым.

Условие осуществимости деформации (1.3) может нарушаться в некоторой области изменения параметра κ . Расчетами установлено, что в случае тонкого бруса, когда $\rho_1 = 0,9$, данное условие выполняется в области $-5 \leq \kappa \leq 5$ при $0 \leq \nu \leq 0,5$. Для бруса средней толщины ($\rho_1 = 0,5$) условие (1.3) выполняется при $0 \leq \nu \leq 0,5$ в области $-1,5 \leq \kappa \leq 5$, а при $0 \leq \nu \leq 0,4$ в области $-5 \leq \kappa \leq 5$. В случае толстого бруса ($\rho_1 = 0,1$) условие (1.3) выполняется при $0 \leq \nu \leq 0,5$ в области $0,6 \leq \kappa \leq 5$, при $0 \leq \nu \leq 0,2$ в области $-0,5 \leq \kappa \leq 5$ и нарушается при всех ν в области $\kappa \leq -1,5$.

2. Выпрямление круговой арки. При $\kappa \rightarrow 0$ угол раствора сектора кольца в деформированном состоянии стремится к нулю. Поскольку в случае $\kappa = 0$ представления (1.1) неприменимы, деформация выпрямления кривого бруса задается при помощи декартовых координат текущей конфигурации X, Y, Z

$$X = X(r), \quad Y = \eta\phi, \quad Z = z. \quad (2.1)$$

Здесь η – положительная постоянная. Градиент деформации, тензор растяжения и тензор напряжений Пиолы записываются так:

$$C = X'e_r \otimes i_1 + \frac{\eta}{r} e_\phi \otimes i_2 + i_3 \otimes i_3,$$

$$\mathbf{G}^{1/2} = X' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\eta}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D} = D_1(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{i}_1 + D_2(r) \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{i}_2 + D_3(r) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3,$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – орты декартовых координат. Компоненты напряжений в случае полулинейного материала даются выражениями

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu)X' + \frac{\nu\eta}{r} - 1 \right], \\ D_2 &= \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[\nu X' + \frac{(1-\nu)\eta}{r} - 1 \right], \\ D_3 &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left[X' + \frac{\nu\eta}{r} - 2 \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение равновесия в данном случае принимает вид

$$rD_1' + D_1 = 0,$$

откуда в силу граничных условий (1.8) имеем $D_1 \equiv 0$, что приводит к уравнению первого порядка для функции $X(r)$

$$(1-\nu)X' + \frac{\nu\eta}{r} - 1 = 0. \quad (2.4)$$

В силу (2.4) продольное напряжение в выпрямленном брус описывается простым выражением

$$D_2 = \frac{2\mu}{1-\nu} \left(\frac{\eta}{r} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Постоянная η определяется по заданной продольной силе

$$P = \int_{\eta}^{\eta_0} D_2(r) dr,$$

приложенной к торцам выпрямленного бруса и направленной вдоль вектора $\mathbf{i}_2$. При помощи (2.5) получим

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{r_0}{\ln \rho_1} \left[1 - \rho_1 + (1-\nu)P^* \right], \\ P^* &= \frac{P}{2\mu r_0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функция $X(r)$ определяется уравнением (2.4) с точностью до произвольной аддитивной постоянной, что означает возможность поступательного смещения бруса в направлении $\mathbf{i}_1$. Поскольку поступательное смещение не влияет на напряженное состояние тела, без потери общнос-

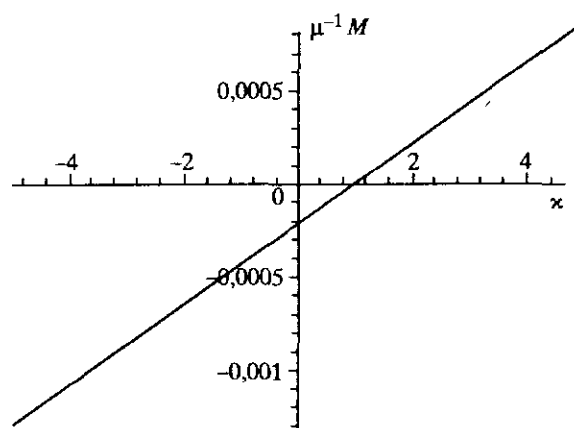


Рис. 1. Зависимость изгибающего момента от кривизны для тонкого бруса

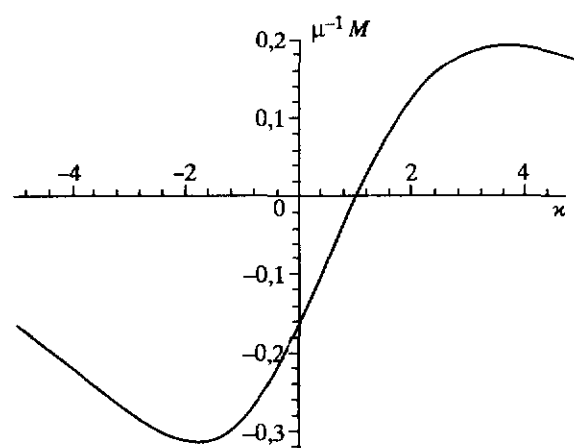


Рис. 2. Зависимость изгибающего момента от кривизны для бруса средней толщины

ти можно положить $X(r_1) = 0$. Тогда решение уравнения (2.4) с учетом (2.6) будет иметь вид ($\rho = r/r_0$)

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{r_0} X(\rho) &= \rho - \rho_1 + \\ &+ \frac{\nu[1 - \rho_1 + (1-\nu)P^*](\ln \rho - \ln \rho_1)}{\ln \rho_1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Изгибающий момент, действующий в каждом сечении бруса, будем вычислять относительно центра деформированного сечения $Y = \text{const}$:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\eta}^{\eta_0} D_2(X - X_0) dr, \\ X_0 &= \frac{1}{2} X(r_0) = \frac{1}{2} (r_0 - r_1) - \frac{\nu r_0 P^*}{2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

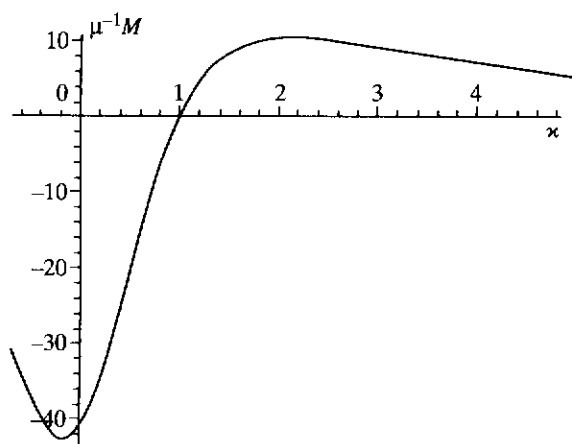


Рис. 3. Зависимость изгибающего момента от кривизны для толстого бруса

Вычисления по формулам (2.5)–(2.8) приводят к следующей зависимости изгибающего момента, необходимого для выпрямления арки, от продольной силы:

$$M = -\frac{2\mu r_0^2}{1-\nu} \left(\frac{1+\rho_1}{2} + \frac{1-\rho_1}{\ln \rho_1} \right) [1-\rho_1 + (1-\nu)P^*]. \quad (2.9)$$

В полученном решении о выпрямлении кривого бруса сила не может принимать произвольных значений. Одно ограничение вытекает из (2.6) и условия $\eta > 0$, второе ограничение обусловлено требованием $\det C > 0$, откуда $X'(r) > 0$. Считая, что $\nu > 0$ и учитывая (2.4), находим диапазон, в котором может изменяться продольная сила P :

$$0 < 1 - \rho_1 + (1 - \nu)P^* < -\nu^{-1}\rho_1 \ln \rho_1. \quad (2.10)$$

Поскольку $0 < \rho_1 < 1$, правая часть неравенства (2.10) положительна.

Можно проверить, что при отсутствии продольной силы ($P = 0$) выражение изгибающего момента (2.9) является пределом выражения (1.17) при $\kappa \rightarrow 0$.

Приведем еще вытекающую из (2.9) формулу для изгибающего момента, необходимого для выпрямления весьма тонкой арки ($1 - \rho_1 \ll 1$) при отсутствии продольной силы:

$$M = -\frac{\mu r_0^2}{6(1-\nu)} (1-\rho_1)^3. \quad (2.11)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00638).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головин Х.С. Одна из задач статики упругого тела // Изв. СПб. технолог. ин-та за 1880–1881 гг., СПб., 1882.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
4. Timoshenko S.P., Goodier I.N. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill, 1951. 506 p.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
6. Zubov L.M. Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 69–73.
7. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. B.: Springer, 1997. 205 p.
8. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

THE GOLOVIN'S PROBLEM IN THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY

L.M. Zubov, A.G. Popov

The plane problem of nonlinear elasticity theory on pure bending of circular beam in the form of a sector of circular ring is investigated. The value of deformation is unlimited. In addition to an ordinary bending, the cases of eversion and straightening of the arch are investigated. In case of general isotropic incompressible material, the bending problem of the arch is reduced to nonlinear boundary problem for the ordinary differential equation, the solution of which allows to satisfy the equilibrium equation in every point of the body and boundary condition at curvilinear edge of the beam. The boundary conditions at the ends of the beam are satisfied in the Saint-Venant's integral sense. In the context of semi-linear material model exact solution of bending problem is searched out and explicit formula of bending moment dependence on deformed beam curvature is derived.

REFERENCES

1. Golovin Kh.S. 1882. [One of the problems of elastic body statics]. In: *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo prakticheskogo Tekhnologicheskogo instituta. 1880–1881 gg.* [Proceedings of the St. Petersburg practical Institute of Technology. Years 1880–1881]. St. Petersburg: 410 p. (In Russian)
2. Muskhelishvili N.I. 1966. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti.* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka: 707 p. (In Russian).
3. Leybenzon L.S. 1947. *Kurs teorii uprugosti.* [Course of the theory of elasticity]. Moscow, Gostekhizdat: 464 p. (In Russian).
4. Timoshenko S.P., Goodier I.N. 1951. *Theory of Elasticity.* NewYork, McGraw-Hill: 506 p.
5. Lurie A.I. 2005. *Theory of Elasticity.* Berlin, Springer Science & Business Media: 1054 p.
6. Zubov L.M. 1986. [Isolated disclination in nonlinear elastic compressible body]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela.* (1): 69–73. (In Russian).
7. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies.* Berlin, Springer: 205 p.
8. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity.* Amsterdam, North-Holland: 617 p.