НАУКА ЮГА РОССИИ 2018 Т. 14 № 4 С. 14–20
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2018 VOL. 14 No 4 P. 14–20

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640180402

БИФУРКАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

© 2018 г. Д.Н. Шейдаков[1], И.Б. Михайлова[1]

Аннотация. Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. Вследствие развития современных технологий большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости при учете различных поверхностных явлений. Настоящая работа посвящена изучению бифуркации равновесия нелинейно-упругих шаров с поверхностными напряжениями. В рамках модели Гертина – Мердока при нагружении равномерно распределенными внутренним и внешним давлениями исследована потеря устойчивости полого шара, на внешней и внутренней поверхностях которого действуют поверхностные напряжения. Предполагалось, что упругие свойства шара в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Модель Гертина – Мердока с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхность которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений при этом может рассматриваться как тензор усилий, действующий в данной мембране. Для произвольного изотропного сжимаемого материала получены точные уравнения нейтрального равновесия, описывающие поведение однородных и неоднородных шаров с поверхностными напряжениями в возмущенном состоянии. Исследование устойчивости в общем случае сведено к решению линейной однородной краевой задачи для системы трех дифференциальных уравнений в частных производных. В случае осесимметричных возмущений для анализа устойчивости достаточно решить упрощенную линеаризованную краевую задачу для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел, поверхностные напряжения, модель Гертина – Мердока, полый шар.

EQUILIBRIUM BIFURCATION OF NONLINEARLY ELASTIC HOLLOW BALL WITH SURFACE STRESSES

D.N. Sheydakov[1], I.B. Mikhailova[1]

Abstract. The problem of equilibrium stability for deformable bodies is of major importance both from theoretical and practical points of view. Due to the development of modern technologies, the problem of stability analysis while taking into account the various surface phenomena becomes relevant. The present research is dedicated to the buckling analysis of nonlinearly elastic balls with surface stresses. In the framework of Gurtin-Murdoch model, we have studied the stability of a hollow ball under internal and external hydrostatic pressure. It was assumed that the surface stresses are acting on the external and internal surfaces, and the bulk elastic properties of the ball are either constant or vary along the radius. From the mechanical point of view, the Gurtin-Murdoch model is equivalent to a deformable body with a glued elastic membrane. In this case, the stress resultant tensor acting in the membrane can be interpreted as surface stresses. For an arbitrary isotropic compressible material the exact neutral equilibrium equations are derived, which describe the behavior of homogeneous and heterogeneous balls with surface stresses in the perturbed state. The study of stability is generally reduced to the solution of a linear homogeneous boundary value problem for a system of three partial differential equations. It was also shown that in the case of axisymmetric perturbations for the stability analysis it is sufficient to solve the simplified linearized boundary value problem for a system of three ordinary differential equations.

Keywords: nonlinear elasticity, stability of deformable bodies, surface stresses, Gurtin-Murdoch model, hollow ball.

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

Вследствие развития современных технологий и появления новых материалов большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости равновесия деформируемых тел с учетом различных поверхностных явлений [1]. Например, характер деформирования тел при микро- и наноразмерах часто существенно отличается от их поведения при макроразмерах, что может быть объяснено поверхностными эффектами [2]. Кроме того, данные эффекты могут играть значительную роль в механике тел, на поверхность которых нанесено покрытие, или произведена некоторая обработка поверхности, изменяющая ее свойства. В последние десятилетия для моделирования поверхностных явлений, особенно в наномеханике [3; 4], получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект [5–7].

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно-упругих шаров с поверхностными напряжениями. Для учета влияния последних используется модель Гертина – Мердока [8], которая с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхность которого приклеена упругая мембрана.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Как показано ранее [9; 10], в рамках модели Гертина – Мердока система уравнений статики нелинейно-упругого тела с поверхностными напряжениями при отсутствии массовых сил состоит из уравнений равновесия в объеме

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0\,, \tag{1}$$

условий равновесия на части поверхности тела Ω_s, где действуют поверхностные напряжения

$$\left.\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}-\overset{\circ}{\nabla}_s\cdot\mathbf{D}_s\right)\right|_{\Omega_s}=\mathbf{t}\,, \tag{2}$$

уравнений состояния

$$\begin{gathered}\mathbf{D}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{C},\quad \mathbf{P}=2\frac{\partial W(\mathbf{G})}{\partial\mathbf{G}},\\ \mathbf{D}_s=\mathbf{P}_s\cdot\mathbf{C}_s,\quad \mathbf{P}_s=2\frac{\partial W_s(\mathbf{G}_s)}{\partial\mathbf{G}_s}\end{gathered} \tag{3}$$

и геометрических соотношений

$$\begin{gathered}\mathbf{G}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{C}=\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}\\ \mathbf{G}_s=\mathbf{C}_s\cdot\mathbf{C}_s^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{C}_s=\overset{\circ}{\nabla}_s\mathbf{R}\Big|_{\Omega_s}\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{P}$ – тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно, $\overset{\circ}{\nabla}$ – трехмерный набла-оператор в лагранжевых координатах, $\overset{\circ}{\nabla}_s$ – поверхностный набла-оператор, $\mathbf{D}_s$ и $\mathbf{P}_s$ – тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы и типа Кирхгофа, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности недеформированного тела, $\mathbf{t}$ – вектор поверхностной нагрузки, W и W_s – плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации соответственно, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_s$ – меры деформации Коши – Грина в объеме и на поверхности, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}_s$ – градиенты деформации, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, определяющий положение частиц тела в деформированном состоянии.

С учетом (3) в случае изотропного тела для тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}$ справедливы следующие соотношения [11]:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}=\sum_{k=1}^{3}\chi_k\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k,\qquad \chi_k=2\frac{\partial W(G_1,G_2,G_3)}{\partial G_k},\\ \mathbf{G}=\sum_{k=1}^{3}G_k\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k,\end{gathered} \tag{5}$$

где G_k, $\mathbf{d}_k$ (k = 1,2,3) – собственные значения и собственные векторы меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}$. В то же время выражение тензора поверхностных напряжений типа Кирхгофа $\mathbf{P}_s$ имеет вид [12]:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_s=\kappa_1\mathbf{I}_s+2\kappa_2\mathbf{G}_s,\quad \kappa_\alpha=2\frac{\partial W_s(j_1,j_2)}{\partial j_\alpha},\quad \alpha=1,2,\\ j_1=\mathrm{tr}\mathbf{G}_s,\qquad j_2=\mathrm{tr}\mathbf{G}_s^2.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь j_1, j_2 – инварианты меры поверхностной деформации типа Коши – Грина $\mathbf{G}_s$, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ – трехмерный и поверхностный единичные тензоры соответственно.

ШАР С ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассмотрим полый шар, на внешней $\Omega_+(r = r_+)$ и внутренней $\Omega_-(r = r_-)$ поверхностях которого действуют поверхностные напряжения, то есть $\Omega_s = \Omega_+ \cup \Omega_-$. В случае его нагружения равномерно распределенными внутренним и внешним давлениями радиус-вектор $\mathbf{R}$ определяется следующими соотношениями [11]:

$$\mathbf{R} = f(r)\mathbf{e}_R$$
$$R = f(r), \qquad \Theta = \theta, \qquad \Phi = \varphi, \tag{7}$$
$$r_- \le r \le r_+, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

где r, θ, φ – сферические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Θ, Φ – эйлеровы сферические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_\Phi\}$ – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат соответственно, $f(r)$ – некоторая неизвестная функция, характеризующая радиальную деформацию шара.

Согласно выражениям (4), (7) градиенты деформации в объеме и на поверхности равны:

$$\mathbf{C} = f'(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \frac{f(r)}{r}\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi\right)$$
$$\mathbf{C}_\pm = \frac{R_\pm}{r_\pm}\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi\right), \qquad R_\pm = f(r_\pm). \tag{8}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по r, индексами «+» и «–» отмечены поверхностные величины, относящиеся к внешней и внутренней поверхностям полого шара соответственно.

Из соотношений (4), (8) получим выражения для соответствующих мер деформации Коши – Грина:

$$\mathbf{G} = f'^{\,2}\,\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f^2}{r^2}\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right),$$
$$\mathbf{G}_\pm = \frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right). \tag{9}$$

Очевидно, что в случае рассмотренной начальной деформации собственные векторы $\mathbf{d}_k$ $(k = 1,2,3)$ меры деформации Коши – Грина совпадают с векторным базисом лагранжевых сферических координат, то есть $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_\varphi$, а собственные значения G_k равны:

$$G_1 = f'^{\,2}, \qquad G_2 = G_3 = \frac{f^2}{r^2}.$$

Тогда с учетом (5), (6) для тензоров напряжений Кирхгофа справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P} = \chi_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \chi_2\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \chi_3\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi,$$
$$\mathbf{P}_\pm = \left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right)\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right). \tag{10}$$

Подставляя полученные выражения в (3), найдем представления тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}$ и тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+$ и $\mathbf{D}_-$ в случае радиально симметричной деформации (7) полого шара:

$$\mathbf{D} = f'\,\chi_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \frac{f}{r}\chi_2\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\Theta + \frac{f}{r}\chi_3\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi,$$
$$\mathbf{D}_\pm = \frac{R_\pm}{r_\pm}\left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right)\left(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi\right). \tag{11}$$

Будем полагать, что упругие свойства шара в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Тогда с учетом (11) из уравнения равновесия (1) следует, что $\chi_2 = \chi_3$, а само оно приводится к виду:

$$\left(f'' + \frac{2f'}{r}\right)\chi_1 + f'\,\chi_1' - \frac{2f}{r^2}\chi_2 = 0. \tag{12}$$

Согласно (2), (11) условия равновесия на внешней Ω_+ и внутренней Ω_- поверхностях полого шара при действии равномерно распределенных давлений p_+ и p_- (рассчитанных на единицу площади деформированной конфигурации) запишутся следующим образом:

$$f'(r_\pm)\chi_1(r_\pm) + \frac{2R_\pm}{r_\pm^2}\left(\kappa_1^\pm + 2\frac{R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm\right) = -\frac{p_\pm R_\pm^2}{r_\pm^2}. \tag{13}$$

В результате неизвестная функция $f(r)$ находится путем решения краевой задачи (12), (13) при заданных плотностях W, W_+, W_- объемной и поверхностной потенциальной энергии деформации.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим малое возмущение описанного выше начального деформированного состояния. Будем полагать, что возмущенное состояние равновесия полого шара существует при тех же самых внешних нагрузках и определяется радиус-вектором $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \eta\mathbf{v}$. Здесь η – малый параметр, $\mathbf{v}$ – вектор добавочных перемещений.

Линеаризованные уравнения равновесия нелинейно-упругой среды имеют вид [11]:

$$\overset{\circ}{\nabla}\cdot\mathbf{D}^\bullet = 0, \qquad \mathbf{D}^\bullet = \left[\frac{d}{d\eta}\mathbf{D}(\mathbf{R}+\eta\mathbf{v})\right]_{\eta=0}, \quad (14)$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \mathbf{P}^\bullet\cdot\mathbf{C} + \mathbf{P}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v} \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{P}^\bullet$ – линеаризованные тензоры напряжений Пиолы и Кирхгофа соответственно. Чтобы найти выражение последнего, проведем линеаризацию определяющих соотношений (5) [9; 10]:

$$\mathbf{P}^\bullet = \sum_{k=1}^{3}\left(\chi_k^\bullet\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k + \chi_k\mathbf{d}_k^\bullet\mathbf{d}_k + \chi_k\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k^\bullet\right),$$
$$\mathbf{G}^\bullet = \sum_{k=1}^{3}\left(G_k^\bullet\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k + G_k\mathbf{d}_k^\bullet\mathbf{d}_k + G_k\mathbf{d}_k\mathbf{d}_k^\bullet\right). \quad (16)$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{d}_k$ и $\mathbf{d}^\bullet_k$ взаимноортогональны, то есть $\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{d}^\bullet_k = 0$, из (16) получим ($k,l,m = 1,2,3$; $k \neq l \neq m$):

$$\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{P}^\bullet\cdot\mathbf{d}_k = \chi_k^\bullet,$$
$$\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{P}^\bullet\cdot\mathbf{d}_m = B_l\,\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{G}^\bullet\cdot\mathbf{d}_m, \quad B_l = \frac{\chi_k-\chi_m}{G_k-G_m}, \quad (17)$$

где соотношения для $\chi^\bullet_k$ имеют вид:

$$\chi_k^\bullet = \sum_{n=1}^{3}\chi_{kn}G_n^\bullet, \qquad \chi_{kn} = \frac{\partial\chi_k(G_1,G_2,G_3)}{\partial G_n},$$
$$G_n^\bullet = \mathbf{d}_n\cdot\mathbf{G}^\bullet\cdot\mathbf{d}_n.$$

Формулы (17) дают представление всех компонент линеаризованного тензора напряжений Кирхгофа $\mathbf{P}^\bullet$ в базисе $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ через компоненты линеаризованной меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G}^\bullet$, а сам тензор $\mathbf{G}^\bullet$ равен

$$\mathbf{G}^\bullet = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}. \quad (18)$$

Согласно (2) линеаризованные условия равновесия на внешней Ω_+ и внутренней Ω_- поверхностях полого шара, где действуют поверхностные напряжения, имеют вид [1; 12]:

$$\left(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}^\bullet - \overset{\circ}{\nabla}_\pm\cdot\mathbf{D}^\bullet_\pm\right)\Big|_{r=r_\pm} =$$
$$= -p_\pm J\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\left[(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I} - \nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\right]. \quad (19)$$

Здесь $J = \det\mathbf{C}$ – метрический множитель, ∇ – трехмерный набла-оператор в эйлеровых координатах, а $\mathbf{D}^\bullet_+$ и $\mathbf{D}^\bullet_-$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Пиолы, для которых с учетом выражений (3), (6) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{D}^\bullet_\pm = \mathbf{P}^\bullet_\pm\cdot\mathbf{C}_\pm + \mathbf{P}_\pm\cdot\overset{\circ}{\nabla}_\pm\mathbf{v}_\pm,$$
$$\mathbf{P}^\bullet_\pm = \kappa_1^{\pm\bullet}\mathbf{I}_\pm + 2\kappa_2^{\pm\bullet}\mathbf{G}_\pm + 2\kappa_2^{\pm}\mathbf{G}^\bullet_\pm, \quad (20)$$

где

$$\kappa_\alpha^{\pm\bullet} = \sum_{\beta=1}^{2}\kappa^\pm_{\alpha\beta}j_\beta^{\pm\bullet}, \quad \kappa^\pm_{\alpha\beta} = \frac{\partial\kappa^\pm_\alpha(j_1^\pm, j_2^\pm)}{\partial j_\beta^\pm}, \quad \alpha = 1,2,$$
$$j_1^{\pm\bullet} = \mathrm{tr}\mathbf{G}^\bullet_\pm, \qquad j_2^{\pm\bullet} = 2\mathrm{tr}\left(\mathbf{G}_\pm\cdot\mathbf{G}^\bullet_\pm\right), \quad (21)$$
$$\mathbf{G}^\bullet_\pm = \overset{\circ}{\nabla}_\pm\mathbf{v}_\pm\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}_\pm + \mathbf{C}_\pm\cdot\overset{\circ}{\nabla}_\pm\mathbf{v}^{\mathrm{T}}_\pm, \qquad \mathbf{v}_\pm = \mathbf{v}\big|_{r=r_\pm}.$$

Здесь $\mathbf{P}^\bullet_+$ и $\mathbf{P}^\bullet_-$ – линеаризованные тензоры поверхностных напряжений типа Кирхгофа, $\mathbf{G}^\bullet_+$ и $\mathbf{G}^\bullet_-$ – линеаризованные меры поверхностной деформации типа Коши – Грина, а $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ – векторы добавочных перемещений внешней и внутренней поверхностей.

Запишем представление вектора $\mathbf{v}$ в базисе эйлеровых сферических координат:

$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\Theta\mathbf{e}_\Theta + v_\Phi\mathbf{e}_\Phi. \quad (22)$$

Из существования и неразрывности поля перемещений вытекают следующие ограничения на неизвестные функции v_R, v_Θ, v_Φ:

$$\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}\bigg|_{\theta=0} = \left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi} - v_\Phi\right)\bigg|_{\theta=0} = \left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi} + v_\Theta\right)\bigg|_{\theta=0} = 0,$$
$$\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}\bigg|_{\theta=\pi} = \left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi} + v_\Phi\right)\bigg|_{\theta=\pi} = \left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi} - v_\Theta\right)\bigg|_{\theta=\pi} = 0,$$
$$v_R\big|_{\varphi=0} = v_R\big|_{\varphi=2\pi}, \quad v_\Theta\big|_{\varphi=0} = v_\Theta\big|_{\varphi=2\pi}, \quad v_\Phi\big|_{\varphi=0} = v_\Phi\big|_{\varphi=2\pi}.$$

Принимая во внимание выражения (8), (10), (15), (17), (18), (22) и то, что в рассмотренном невозмущенном состоянии $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}_\varphi$, найдем компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы $\mathbf{D}^\bullet$ в базисе сферических координат:

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_R = \tau_{11}\frac{\partial v_R}{\partial r} + \frac{2(\chi_{12}+\chi_{13})f'f}{r^2}v_R +$$
$$+\frac{2\chi_{12}f'f}{r^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta} + \frac{2\chi_{13}f'f}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi} + v_\Theta\cos\theta\right),$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Theta = \frac{2\chi_{12}f'f}{r}\frac{\partial v_R}{\partial r} + \left(\tau_{22} + \frac{2\chi_{23}f^2}{r^2}\right)\frac{v_R}{r} +$$
$$+\frac{\tau_{22}}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta} + \frac{2\chi_{23}f^2}{r^3\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi} + v_\Theta\cos\theta\right),$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Phi = \frac{2\chi_{13}f'f}{r}\frac{\partial v_R}{\partial r} + \left(\tau_{33}+\frac{2\chi_{23}f^2}{r^2}\right)\frac{v_R}{r} + \frac{2\chi_{23}f^2}{r^3}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta} + \frac{\tau_{33}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi}+v_\Theta\cos\theta\right),$$

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Theta = \frac{B_3 f'f}{r^2}\left(\frac{\partial v_R}{\partial\theta}-v_\Theta\right)+\tau_{12}\frac{\partial v_\Theta}{\partial r},$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_R = \frac{B_3 f'f}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}+\frac{\tau_{21}}{r}\left(\frac{\partial v_R}{\partial\theta}-v_\Theta\right),$$

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Phi = \frac{B_2 f'f}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}-v_\Phi\right)+\tau_{13}\frac{\partial v_\Phi}{\partial r},$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_R = \frac{B_2 f'f}{r}\frac{\partial v_\Phi}{\partial r}+\frac{\tau_{31}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}-v_\Phi\right),$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Phi = \frac{B_1 f^2}{r^3\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi}-v_\Phi\cos\theta\right)+\frac{\tau_{23}}{r}\frac{\partial v_\Phi}{\partial\theta},$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Theta = \frac{B_1 f^2}{r^3}\frac{\partial v_\Phi}{\partial\theta}+\frac{\tau_{32}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi}-v_\Phi\cos\theta\right),$$

$$\begin{array}{l}\tau_{ii}=\chi_i+2\chi_{ii}G_i\\ \tau_{ij}=\chi_i+B_k G_j\end{array},\qquad i,j,k=1,2,3;\quad i\neq j\neq k.$$

Аналогично, согласно соотношениям (8)–(10), (20)–(22), компоненты линеаризованных тензоров поверхностных напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_+^\bullet$ и $\mathbf{D}_-^\bullet$ записываются следующим образом:

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Theta=\frac{\varepsilon_\pm+\gamma_1^\pm-\gamma_2^\pm}{r_\pm\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial\varphi}+v_\Theta^\pm\cos\theta\right)+\frac{\gamma_1^\pm+2\varepsilon_\pm}{r_\pm}v_R^\pm+\frac{\gamma_2^\pm+\varepsilon_\pm}{r_\pm}\frac{\partial v_\Theta^\pm}{\partial\theta},$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Phi=\frac{\gamma_2^\pm+\varepsilon_\pm}{r_\pm\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial\varphi}+v_\Theta^\pm\cos\theta\right)+\frac{\gamma_1^\pm+2\varepsilon_\pm}{r_\pm}v_R^\pm+\frac{\varepsilon_\pm+\gamma_1^\pm-\gamma_2^\pm}{r_\pm}\frac{\partial v_\Theta^\pm}{\partial\theta},$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_R=\frac{\gamma_1^\pm}{r_\pm}\left(\frac{\partial v_R^\pm}{\partial\theta}-v_\Theta^\pm\right),\tag{24}$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_R=\frac{\gamma_1^\pm}{r_\pm}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_R^\pm}{\partial\varphi}-v_\Phi^\pm\right),$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Phi=\frac{\gamma_2^\pm-\gamma_1^\pm}{r_\pm\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Theta^\pm}{\partial\varphi}-v_\Phi^\pm\cos\theta\right)+\frac{\gamma_2^\pm}{r_\pm}\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial\theta},$$

$$\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{D}_\pm^\bullet\cdot\mathbf{e}_\Theta=\frac{\gamma_2^\pm-\gamma_1^\pm}{r_\pm}\frac{\partial v_\Phi^\pm}{\partial\theta}+\frac{\gamma_2^\pm}{r_\pm\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\Theta^\pm}{\partial\varphi}-v_\Phi^\pm\cos\theta\right),$$

$$\gamma_1^\pm=\kappa_1^\pm+\frac{2R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm,\qquad \gamma_2^\pm=\kappa_1^\pm+\frac{4R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_2^\pm,$$

$$\varepsilon_\pm=\frac{2R_\pm^2}{r_\pm^2}\left(\kappa_2^\pm+\kappa_{11}^\pm+\frac{4R_\pm^2}{r_\pm^2}\kappa_{12}^\pm+\frac{4R_\pm^4}{r_\pm^4}\kappa_{22}^\pm\right),$$

$$v_R^\pm=v_R\big|_{r=r_\pm},\quad v_\Theta^\pm=v_\Theta\big|_{r=r_\pm},\quad v_\Phi^\pm=v_\Phi\big|_{r=r_\pm}.$$

Учитывая соотношения (23), выпишем уравнения нейтрального равновесия (14), описывающие возмущенное состояние полого шара, в скалярном виде:

$$\begin{gathered}\tau_{11}\frac{\partial^2 v_R}{\partial r^2}+\frac{\tau_{21}}{r^2}\frac{\partial^2 v_R}{\partial\theta^2}+\frac{\tau_{31}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_R}{\partial\varphi^2}+\frac{\tau_{21}\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}+\\ +\left(\chi_1'+2f'\left[\chi_{11}'f'+2\chi_{11}f''\right]+\frac{2\tau_{11}}{r}\right)\frac{\partial v_R}{\partial r}+\\ +\frac{\zeta_2+\zeta_3}{r^2}v_R+\frac{(B_3+2\chi_{12})f'f}{r^2}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial r\partial\theta}+\\ +\frac{(B_3+2\chi_{13})f'f\,\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}+\frac{(B_2+2\chi_{13})f'f}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial r\partial\varphi}+\\ +\frac{\zeta_2-\tau_{21}}{r^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta}+\frac{(\zeta_3-\tau_{21})\mathrm{ctg}\theta}{r^2}v_\Theta+\frac{\zeta_3-\tau_{31}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi}=0,\\ \frac{(B_3+2\chi_{12})f'f}{r^2}\frac{\partial^2 v_R}{\partial r\partial\theta}+\frac{2(\chi_{12}-\chi_{13})f'f\,\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_R}{\partial r}+\\ +\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}(\tau_{22}-\tau_{33})v_R+\frac{\psi_{23}+\tau_{22}}{r^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}+\tau_{12}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial r^2}+\\ +\frac{\tau_{22}}{r^2}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\theta^2}+\left(\chi_1'+\frac{2\chi_1}{r}+\frac{f}{r^2}\left[B_3'f+2B_3f'\right]\right)\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}+\\ +\frac{\tau_{32}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\tau_{22}\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta}-\frac{\psi_{23}+\tau_{33}\mathrm{ctg}^2\theta}{r^2}v_\Theta+\\ +\frac{(B_1+2\chi_{23})f^2}{r^4\sin\theta}\frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\theta\partial\varphi}-\frac{(\tau_{33}+\tau_{32})\mathrm{ctg}\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi}=0,\\ \frac{(B_2+2\chi_{13})f'f}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 v_R}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\psi_{32}+\tau_{33}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi}+\\ +\frac{(B_1+2\chi_{23})f^2}{r^4\sin\theta}\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\theta\partial\varphi}+\frac{(\tau_{33}+\tau_{32})\mathrm{ctg}\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi}+\\ +\tau_{13}\frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial r^2}+\frac{\tau_{23}}{r^2}\frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\tau_{33}}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\varphi^2}+\\ +\left(\chi_1'+\frac{2\chi_1}{r}+\frac{f}{r^2}\left[B_2'f+2B_2f'\right]\right)\frac{\partial v_\Phi}{\partial r}+\frac{\tau_{23}\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\Phi}{\partial\theta}-\\ -\frac{1}{r^2}\left(\psi_{32}-\frac{f^2}{r^2}\left[B_1+2\chi_{23}\right]+\tau_{32}\mathrm{ctg}^2\theta\right)v_\Phi=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Для сокращения записи здесь использованы следующие обозначения ($i, j = 2,3;\ i \neq j$) :

$$\zeta_i = 2\chi'_{1i} f' f + 2\chi_{1i}\left(f'' f + f'^2\right) - \chi_i - \frac{2\left(\chi_{i2} + \chi_{i3}\right) f^2}{r^2},$$

$$\psi_{ij} = \chi_i + B'_j f' f + B_j\left(f'' f + 2f'^2\right) + \frac{2\chi_{ij} f^2}{r^2}.$$

Согласно выражениям (8), (22)–(24), линеаризованные условия равновесия (19) на внешней и внутренней поверхностях записываются так ($r = r_\pm$):

$$\begin{gathered}
\frac{\left(B_2 + 2\chi_{13}\right) f' f}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 v_R}{\partial r \partial\varphi} + \frac{\psi_{32} + \tau_{33}}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial v_R}{\partial\varphi} + \\
+ \frac{\left(B_1 + 2\chi_{23}\right) f^2}{r^4 \sin\theta} \frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\theta \partial\varphi} + \frac{\left(\tau_{33} + \tau_{32}\right) \mathrm{ctg}\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi} + \\
+ \tau_{13} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial r^2} + \frac{\tau_{23}}{r^2} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\tau_{33}}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\varphi^2} + \\
+ \left(\chi'_1 + \frac{2\chi_1}{r} + \frac{f}{r^2}\left[B'_2 f + 2B_2 f'\right]\right) \frac{\partial v_\Phi}{\partial r} + \frac{\tau_{23} \mathrm{ctg}\theta}{r^2} \frac{\partial v_\Phi}{\partial\theta} - \\
- \frac{1}{r^2}\left(\psi_{32} - \frac{f^2}{r^2}\left[B_1 + 2\chi_{23}\right] + \tau_{32} \mathrm{ctg}^2\theta\right) v_\Phi = 0, \\
- \frac{\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm}{r_\pm^2} \frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\theta^2} - \frac{\gamma_2^\pm}{r_\pm^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\varphi^2} - \frac{\varepsilon_\pm}{r_\pm^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\theta \partial\varphi} + \\
+ \frac{1}{r_\pm^2}\left(B_3 f' f - 2\gamma_1^\pm - 2\varepsilon_\pm - p_\pm R_\pm\right) \frac{\partial v_R}{\partial\theta} + \tau_{12} \frac{\partial v_\Theta}{\partial r} - \\
- \frac{\left(\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm\right) \mathrm{ctg}\theta}{r_\pm^2} \frac{\partial v_\Theta}{\partial\theta} + \frac{\left(2\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm\right) \mathrm{ctg}\theta}{r_\pm^2 \sin\theta} \frac{\partial v_\Phi}{\partial\varphi} + \\
+ \left(\kappa_1^\pm + \varepsilon_\pm + \left[\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm\right] \mathrm{ctg}^2\theta - B_3 f' f + p_\pm R_\pm\right) \frac{v_\Theta}{r_\pm^2} = 0, \\
- \frac{\varepsilon_\pm}{r_\pm^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial\theta \partial\varphi} - \frac{\gamma_2^\pm}{r_\pm^2} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\theta^2} - \frac{\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm}{r_\pm^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial\varphi^2} + \\
+ \frac{B_2 f' f - 2\gamma_1^\pm - 2\varepsilon_\pm - p_\pm R_\pm}{r_\pm^2 \sin\theta} \frac{\partial v_R}{\partial\varphi} + \tau_{13} \frac{\partial v_\Phi}{\partial r} - \\
- \frac{\gamma_2^\pm \mathrm{ctg}\theta}{r_\pm^2} \frac{\partial v_\Phi}{\partial\theta} - \frac{\left(2\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm\right) \mathrm{ctg}\theta}{r_\pm^2 \sin\theta} \frac{\partial v_\Theta}{\partial\varphi} + \\
+ \left(\kappa_1^\pm + \gamma_2^\pm \mathrm{ctg}^2\theta - B_2 f' f + p_\pm R_\pm\right) \frac{v_\Phi}{r_\pm^2} = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

Таким образом, исследование устойчивости полого шара с поверхностными напряжениями в общем случае сводится к решению линейной однородной краевой задачи (25), (26) для системы трех дифференциальных уравнений в частных производных.

При осесимметричных возмущениях ($\partial v_R / \partial\varphi = = (\partial v_\Theta / \partial\varphi = \partial v_\Phi / \partial\varphi = 0$) вид краевой задачи (25), (26) заметно упрощается. Подстановка [11]

$$\begin{gathered}
v_R = V_R(r) P_n^0(\cos\theta), \qquad v_\Theta = V_\Theta(r) P_n^1(\cos\theta) \\
v_\Phi = V_\Phi(r) P_n^1(\cos\theta), \qquad n = 1,2,\ldots
\end{gathered} \tag{27}$$

позволяет отделить переменную θ в задаче. Здесь P_n^0, P_n^1 – присоединенные многочлены Лежандра, а P_n – полиномы Лежандра:

$$P_n^0(x) = P_n(x), \qquad P_n^1(x) = \sqrt{1 - x^2} \frac{d}{dx} P_n(x).$$

В результате уравнения нейтрального равновесия (25) примут вид:

$$\begin{gathered}
\tau_{11} V''_R + \frac{n(n+1)\left(B_3 + 2\chi_{12}\right) f' f}{r^2} V'_\Theta + \\
+ \left(\chi'_1 + 2f'\left[\chi'_{11} f' + 2\chi_{11} f''\right] + \frac{2\tau_{11}}{r}\right) V'_R + \\
+ \frac{\zeta_2 + \zeta_3 - n(n+1)\tau_{21}}{r^2} V_R + \frac{n(n+1)\left(\zeta_2 - \tau_{21}\right)}{r^2} V_\Theta = 0, \\
\tau_{12} V''_\Theta - \frac{\left(B_3 + 2\chi_{12}\right) f' f}{r^2} V'_R - \frac{\psi_{23} + \tau_{22}}{r^2} V_R + \\
+ \left(\chi'_1 + \frac{2\chi_1}{r} + \frac{f}{r^2}\left[B'_3 f + 2B_3 f'\right]\right) V'_\Theta - \\
- \frac{\psi_{23} + \left(n^2 + n - 1\right)\tau_{22}}{r^2} V_\Theta = 0, \\
\tau_{13} V''_\Phi + \left(\chi'_1 + \frac{2\chi_1}{r} + \frac{f}{r^2}\left[B'_2 f + 2B_2 f'\right]\right) V'_\Phi - \\
- \frac{1}{r^2}\left(\psi_{32} + \left(n^2 + n - 1\right)\tau_{23} - \frac{f^2}{r^2}\left[B_1 + 2\chi_{23}\right]\right) V_\Phi = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Здесь дополнительно учтено, что $\chi_2 = \chi_3$ в случае рассмотренной начальной деформации.

Аналогично линеаризованные условия равновесия (26) запишутся так ($r = r_\pm$):

$$\begin{gathered}
\tau_{11} V'_R + \frac{2n(n+1)}{r_\pm^2}\left(\chi_{12} f' f + \gamma_1^\pm + \varepsilon_\pm + \frac{p_\pm R_\pm}{2}\right) V_\Theta + \\
+ \frac{4}{r_\pm^2}\left(\chi_{12} f' f + \frac{n^2 + n + 2}{4}\gamma_1^\pm + \varepsilon_\pm + \frac{p_\pm R_\pm}{2}\right) V_R = 0, \\
\tau_{12} V'_\Theta + \frac{1}{r_\pm^2}\left(2\gamma_1^\pm + 2\varepsilon_\pm - B_3 f' f + p_\pm R_\pm\right) V_R + \\
+ \left(n(n+1)\left[\gamma_2^\pm + \varepsilon_\pm\right] - \frac{4R_\pm^2 \kappa_2^\pm}{r_\pm^2} - B_3 f' f + p_\pm R_\pm\right) \frac{V_\Theta}{r_\pm^2} = 0, \\
\tau_{13} V'_\Phi + \left(n(n+1)\gamma_2^\pm - \frac{4R_\pm^2 \kappa_2^\pm}{r_\pm^2} - B_2 f' f + p_\pm R_\pm\right) \frac{V_\Phi}{r_\pm^2} = 0.
\end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом, в случае осесимметричных возмущений для исследования устойчивости достаточно решить линейную однородную краевую задачу (28), (29) для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода рассмотрена проблема устойчивости нелинейно-упругого полого шара с поверхностными напряжениями. Полагалось, что упругие свойства шара в объеме постоянны или изменяются вдоль радиуса. Для произвольного изотропного материала получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение однородных и неоднородных шаров в возмущенном состоянии. Исследование устойчивости в общем случае сведено к решению линейной однородной краевой задачи (25), (26) для системы трех дифференциальных уравнений в частных производных. При этом показано, что в случае осесимметричных возмущений (27) для анализа устойчивости достаточно решить более простую краевую задачу (28), (29) для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-08-00802-а) и в рамках реализации государственного задания ЮНЦ РАН, номер госрегистрации 01201354242.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145. doi: 10.1023/A:1007448209058
2. Altenbach H., Morozov N.F. (eds). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p.
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics. Vol. 42*. San Diego, Elsevier: 1–68.
4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu Sh., Feng X.,Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24(1): 52–82. doi: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301
6. Cuenot S., Frétigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410-1–65410-5. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363. doi: 10.1098/rspa.2005.1637
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
9. Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. 2016. Бифуркация равновесия нелинейно-упругих прямоугольных плит с поверхностными напряжениями. *Наука Юга России*. 12(4): 3–9.
10. Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б. 2017. Устойчивость нелинейно-упругой цилиндрической трубы с поверхностными напряжениями. *Наука Юга России*. 13(3): 3–9. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-3-9
11. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
12. Еремеев В.А., Зубов Л.М. 2008. *Механика упругих оболочек*. М., Наука: 280 с.

REFERENCES

1. Ogden R.W., Steigmann D.J., Haughton D.M. 1997. The effect of elastic surface coating on the finite deformation and bifurcation of a pressurized circular annulus. *Journal of Elasticity*. 47(2): 121–145. doi: 10.1023/A:1007448209058
2. Altenbach H., Morozov N.F. (eds). 2013. *Surface Effects in Solid Mechanics – Models, Simulations, and Applications*. Berlin, Springer: 194 p.
3. Duan H.L., Wang J., Karihaloo B.L. 2008. Theory of elasticity at the nanoscale. In: *Advances in Applied Mechanics. Vol. 42*. San Diego, Elsevier: 1–68.
4. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu Sh., Feng X.,Wang G., Zhang W., Wang T. 2011. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 24(1): 52–82. doi: 10.1016/S0894-9166(11)60009-8
5. Miller R.E., Shenoy V.B. 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*. 11(3): 139–147. doi: 10.1088/0957-4484/11/3/301
6. Cuenot S., Frétigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. 2004. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B*. 69(16): 165410-1–65410-5. doi: 10.1103/PhysRevB.69.165410
7. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karihaloo B.L. 2006. A scaling law for properties of nano-structured materials. *Proc. Royal Soc. Lond. A*. 462(2069): 1355–1363. doi: 10.1098/rspa.2005.1637
8. Gurtin M.E., Murdoch A.I. 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal*. 57(4): 291–323. doi: 10.1007/BF00261375
9. Sheydakov D.N., Mikhailova I.B. 2016. [Equilibrium bifurcation of nonlinearly elastic rectangular plates with surface stresses]. *Nauka Yuga Rossii*. 12(4): 3–9. (In Russian).
10. Sheydakov D.N., Mikhailova I.B. 2017. [Stability of nonlinearly elastic cylindrical tube with surface stresses]. *Nauka Yuga Rossii*. 13(3): 3–9. (In Russian). doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-3-9
11. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
12. Eremeev V.A., Zubov L.M. 2008. *Mekhanika uprugikh obolochek*. [*Mechanics of elastic shells*]. Moscow, Nauka: 280 p. (In Russian).

Поступила 19.04.2018