НАУКА ЮГА РОССИИ 2020 Т. 16 № 3 С. 3–11
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2020 VOL. 16 No 3 P. 3–11

МЕХАНИКА

УДК 539.3:534.1
DOI: 10.7868/S25000640200301

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2020 г. Д.Н. Шейдаков[1], И.Б. Михайлова[1], Н.Е. Шейдаков[2]

Аннотация. Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Вследствие развития современных технологий и появления новых материалов актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости составных нелинейно-упругих тел со сложной микроструктурой и внутренними напряжениями. В настоящей работе в рамках общей теории устойчивости трехмерных тел исследованы проблемы бифуркации равновесия сжатого (растянутого) полого многослойного цилиндра при внутреннем и внешнем гидростатическом давлении, а также сплошного многослойного цилиндра при осевом растяжении-сжатии и внешнем давлении. При этом предполагалось, что их слои могут быть предварительно деформированы и могут содержать начальные напряжения. Для описания поведения рассмотренных цилиндров применялась модель микрополярной среды (континуум Коссера). Такой подход позволил учесть влияние микроструктуры на потерю устойчивости. С использованием представлений определяющих соотношений относительно разных отсчетных конфигураций в случае модели физически-линейного микрополярного материала получены линеаризованные уравнения равновесия, описывающие поведение составных цилиндров с предварительно напряженными частями в возмущенном состоянии. С помощью специальной подстановки исследование устойчивости полого и сплошного N-слойных микрополярных цилиндров сведено к решению линейных однородных краевых задач для системы $6N$ обыкновенных дифференциальных уравнений. При заданных упругих параметрах материала слоев, их геометрии и начальных деформациях данные краевые задачи могут быть достаточно легко решены численно с использованием конечно-разностного метода.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел, микрополярная среда, континуум Коссера, составной цилиндр, внутренние напряжения.

STABILITY OF COMPOSITE MICROPOLAR CYLINDERS WITH PRESTRESSED PARTS

D.N. Sheydakov[1], I.B. Mikhailova[1], N.E. Sheydakov[2]

Abstract. The problem of equilibrium stability for deformable bodies is of considerable interest, both from theoretical and practical perspectives. Due to the development of modern technologies and the emergence of new materials, the issue of stability analysis for composite nonlinear elastic bodies with a complex microstructure and internal stresses is becoming quite relevant. In the present paper, within the framework of the general theory of stability for three-dimensional bodies, we have studied the problems of equilibrium bifurcation for a compressed (extended) hollow multilayer cylinder under internal and external hydrostatic pressure, as well as a solid multilayer cylinder under axial extension-compression and external pressure. It was assumed that their layers could be pre-deformed and contain initial stresses. The model of a micropolar medium (Cosserat continuum) was used to describe the behavior of the considered cylinders. This approach allowed us to take into account the influence of the microstructure on the loss of stability. Using representations of constitutive relations for different reference configurations, in the case of a physically linear micropolar material model,

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

[2] Ростовский государственный экономический университет (Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69

linearized equilibrium equations were obtained that describe the behavior of composite cylinders with prestressed parts in a perturbed state. With the help of a special substitution, the stability analysis of hollow and solid N-layer micropolar cylinders was reduced to solving linear homogeneous boundary value problems for a system of $6N$ ordinary differential equations. For given elastic parameters of the layers, their geometry, and initial deformations, these boundary value problems can be relatively easily solved numerically using the finite-difference method.

Keywords: nonlinear elasticity, stability of deformable bodies, micropolar medium, Cosserat continuum, composite cylinder, internal stresses.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании современных слоистых композитов с внутренними технологическими напряжениями важным является вопрос анализа их устойчивости. В связи с этим в настоящей работе исследована проблема бифуркации равновесия составных (многослойных) цилиндров с предварительно напряженными частями. Особенностью составных тел с внутренними напряжениями является отсутствие единой естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации. По этой причине при выводе линеаризованных уравнений равновесия в разных частях тела используется запись определяющих соотношений материала относительно разных отсчетных конфигураций. Кроме того, поведение многих современных материалов в ряде случаев не может быть адекватно описано в рамках классической теории упругости ввиду отсутствия в ней внутренних размерных параметров. В связи с этим для учета влияния микроструктуры целесообразно использовать модель микрополярной среды (среда Коссера). Континуум Коссера [1–6] достаточно успешно применяется при моделировании металлических и полимерных пен, гранулированных материалов, поликристаллических тел, композитов, а также различных наноструктур. Его особенностью по сравнению с классической моделью сплошной среды является то, что каждая частица континуума Коссера наделяется свойствами абсолютно твердого тела путем учета ротационных степеней свободы.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

В рамках нелинейного континуума Коссера система уравнений статики при отсутствии массовых сил и моментов состоит из уравнений равновесия для напряжений [7; 8]

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0,\qquad \overset{0}{\nabla}\cdot\mathbf{G}+\left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}\right)_{\times}=0,\tag{1}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D}=\frac{\partial W(\mathbf{Y},\mathbf{L})}{\partial\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{H},\qquad \mathbf{G}=\frac{\partial W(\mathbf{Y},\mathbf{L})}{\partial\mathbf{L}}\cdot\mathbf{H},\tag{2}$$

и геометрических соотношений [9–11]

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{C}=\overset{0}{\nabla}\mathbf{R},\\ \mathbf{L}=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E}-\mathbf{H}\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}\right)^{\mathrm{T}},\end{gathered}\tag{3}$$

где $\overset{0}{\nabla}$ – набла-оператор в естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации; $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы; $W(\mathbf{Y},\mathbf{L})$ – удельная потенциальная энергия деформации; $\mathbf{Y}$ – мера деформации типа Коши; $\mathbf{L}$ – тензор изгибной деформации; $\mathbf{C}$ – градиент деформации; $\mathbf{R}$ и $\mathbf{H}$ – радиус-вектор и собственно ортогональный тензор микроповорота, определяющие положение и поворот частиц микрополярной среды в деформированном состоянии; $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Будем полагать, что упругие свойства среды описываются моделью физически линейного микрополярного материала. В этом случае удельная потенциальная энергия деформации является квадратичной формой тензоров $\mathbf{S}=\mathbf{Y}-\mathbf{E}$ и $\mathbf{L}$ [7; 12]

$$\begin{gathered}W=\frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tr}^2\mathbf{S}+\frac{1}{2}(\mu+\kappa)\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{1}{2}\mu\,\mathrm{tr}\mathbf{S}^2+\\ +\frac{1}{2}\gamma_1\,\mathrm{tr}^2\mathbf{L}+\frac{1}{2}\gamma_2\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)+\frac{1}{2}\gamma_3\,\mathrm{tr}\mathbf{L}^2,\end{gathered}\tag{4}$$

$$\mu+\kappa>0,\qquad \lambda+2\mu+\kappa>0,$$

$$\gamma_2\ge 0,\qquad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3>0,$$

а уравнения состояния (2) для тензоров напряжений и моментных напряжений типа Пиолы имеют вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{D}=\left[\lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E}+(\mu+\kappa)\mathbf{S}+\mu\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H},\\ \mathbf{G}=\left[\gamma_1\left(\mathrm{tr}\mathbf{L}\right)\mathbf{E}+\gamma_2\mathbf{L}+\gamma_3\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H},\end{gathered}\tag{5}$$

где λ, μ, κ, γ_1, γ_2, γ_3 – микрополярные упругие константы.

Пусть задано некоторое деформированное (докритическое) состояние равновесия, описываемое радиус-вектором $\mathbf{R}$ и тензором микроповорота $\mathbf{H}$. Рассмотрим малое возмущение этого состояния. Будем полагать, что возмущенное состояние равновесия реализуется при тех же самых внешних нагрузках и определяется радиус-вектором $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \eta\mathbf{v}$ и тензором микроповорота $\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \eta\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}$. Здесь η – малый параметр, $\mathbf{v}$ – вектор добавочных перемещений, $\boldsymbol{\omega}$ – линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от докритического состояния. Возмущенное состояние микрополярной среды описывается линеаризованными уравнениями равновесия [11]:

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\mathbf{D}^\bullet = 0,\qquad \overset{0}{\nabla}\cdot\mathbf{G}^\bullet + \left[\overset{0}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}^\bullet\right]_\times = 0,$$

$$\mathbf{D}^\bullet = \frac{d}{d\eta}\mathbf{D}\left(\mathbf{C}+\eta\overset{0}{\nabla}\mathbf{v},\mathbf{H}-\eta\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\eta=0},\qquad (6)$$

$$\mathbf{G}^\bullet = \frac{d}{d\eta}\mathbf{G}\left(\mathbf{C}+\eta\overset{0}{\nabla}\mathbf{v},\mathbf{H}-\eta\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\eta=0},$$

где $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{G}^\bullet$ – линеаризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы.

В случае физически линейного микрополярного материала (4) для тензоров $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{G}^\bullet$ справедливы следующие соотношения [13; 14]:

$$\mathbf{D}^\bullet = \left[\lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{S}^\bullet\right)\mathbf{E} + (\mu+\kappa)\mathbf{S}^\bullet + \mu\mathbf{S}^{\bullet\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H} -$$
$$-\left[\lambda\left(\mathrm{tr}\mathbf{S}\right)\mathbf{E} + (\mu+\kappa)\mathbf{S} + \mu\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega},$$
$$\mathbf{G}^\bullet = \left[\gamma_1\left(\mathrm{tr}\mathbf{L}^\bullet\right)\mathbf{E} + \gamma_2\mathbf{L}^\bullet + \gamma_3\mathbf{L}^{\bullet\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H} -$$
$$-\left[\gamma_1\left(\mathrm{tr}\mathbf{L}\right)\mathbf{E} + \gamma_2\mathbf{L} + \gamma_3\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H}\times\boldsymbol{\omega},$$
$$\mathbf{S}^\bullet = \mathbf{Y}^\bullet = \left(\overset{0}{\nabla}\mathbf{v} + \mathbf{C}\times\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{L}^\bullet = \overset{0}{\nabla}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{Y}^\bullet$ – линеаризованная мера деформации типа Коши; $\mathbf{L}^\bullet$ – линеаризованный тензор изгибных деформаций.

ПРЕДНАПРЯЖЕННАЯ ОТСЧЕТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

Пусть имеются две отсчетные конфигурации – естественная χ и преднапряженная χ_1. Тогда $\mathbf{C}$,$\mathbf{H}$($\chi \to$ Х) и $\mathbf{C}_1$,$\mathbf{H}_1$($\chi_1 \to$ Х) – соответствующие им градиенты деформации и тензоры микроповорота, отвечающие одной текущей конфигурации Х. Далее все тензорные величины, соответствующие преднапряженной отсчетной конфигурации, будем обозначать нижним индексом $_1$. Согласно [7; 15; 16] справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{C}_1,\qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1,\qquad (7)$$

где $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – градиент деформации и тензор микроповорота при переходе от естественной к преднапряженной отсчетной конфигурации ($\chi \to \chi_1$).

Из выражений (3), (7) вытекают формулы преобразования меры деформации типа Коши и тензора изгибной деформации при изменении отсчетной конфигурации [16–18]:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}},\qquad \mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}_1\cdot\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}_1\cdot\left(\overset{1}{\nabla}\times\mathbf{H}_1\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E} - \mathbf{H}_1\cdot\left(\overset{1}{\nabla}\times\mathbf{H}_1\right)^{\mathrm{T}},\qquad (8)$$
$$\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}_0\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}_0\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E} - \mathbf{H}_0\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}_0\right)^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{L}_0$ – тензор изгибной деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой ($\chi \to \chi_1$); $\overset{1}{\nabla}$ – набла-оператор в преднапряженной отсчетной конфигурации.

Запишем представления тензоров напряжений и моментных напряжений типа Пиолы в разных отсчетных конфигурациях через тензоры напряжений и моментных напряжений типа Коши $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ [7; 18]:

$$\mathbf{D} = J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T},\qquad \mathbf{D}_1 = J_1\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T},$$
$$\mathbf{G} = J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M},\qquad \mathbf{G}_1 = J_1\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M},\qquad (9)$$
$$J = \det\mathbf{C},\qquad J_1 = \det\mathbf{C}_1.$$

Используя соотношения (7), (9), получим связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_1$:

$$\mathbf{D}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D},\qquad \mathbf{G}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{G};\qquad J_0 = \det\mathbf{C}_0.\ (10)$$

Классические и линеаризованные уравнения равновесия (1) и (6) в случае преднапряженной отсчетной конфигурации χ_1 записываются следующим образом:

$$\overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1 = 0,\qquad \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1 + \left(\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1\right)_\times = 0,\qquad (11)$$

$$\overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1^\bullet = 0, \qquad \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1^\bullet + \left[\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^\bullet\right]_\times = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_1^\bullet = \frac{d}{d\eta}\mathbf{D}_1\left(\mathbf{C}_1 + \eta\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 - \eta\mathbf{H}_1\times\boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\eta=0},$$

$$\mathbf{G}_1^\bullet = \frac{d}{d\eta}\mathbf{G}_1\left(\mathbf{C}_1 + \eta\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 - \eta\mathbf{H}_1\times\boldsymbol{\omega}\right)\Big|_{\eta=0}.$$

Согласно (5), (8), (10) для физически линейного микрополярного материала тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы относительно преднапряженной отсчетной конфигурации χ_1 имеют вид:

$$\mathbf{D}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1, \quad \mathbf{G}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1, \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \lambda\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right)\mathbf{E} +$$

$$+\left(\mu+\kappa\right)\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right) + \mu\left(\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right),$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{G}} = \gamma_1\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{E} +$$

$$+\gamma_2\left(\mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\right) + \gamma_3\left(\mathbf{L}_0^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}_0\cdot\mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\right).$$

Путем линеаризации соотношений (13) получим выражения тензоров $\mathbf{D}_1^\bullet$ и $\mathbf{G}_1^\bullet$ в случае материала (4):

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1^\bullet &= J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{D}}^\bullet\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1 - J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1\times\boldsymbol{\omega},\\ \mathbf{G}_1^\bullet &= J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{G}}^\bullet\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1 - J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1\times\boldsymbol{\omega},\end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}}^\bullet = \lambda\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1^\bullet\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{E} + \left(\mu+\kappa\right)\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1^\bullet\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} +$$

$$+\mu\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{Y}_1^{\bullet\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{G}}^\bullet = \gamma_1\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1^\bullet\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{E} + \gamma_2\,\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1^\bullet\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} +$$

$$+\gamma_3\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{L}_1^{\bullet\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{Y}_1^\bullet = \left(\overset{1}{\nabla}\mathbf{v} + \mathbf{C}_1\times\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{L}_1^\bullet = \overset{1}{\nabla}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}. \quad (15)$$

СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДР С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассмотрим N микрополярных полых цилиндров. Пусть внутренний и внешний радиусы k-ого цилиндра ($k = 1...N$) в естественном состоянии равны $\rho_-^{(k)}$ и $\rho_+^{(k)}$, а длина равна $l^{(k)}$. Будем полагать, что эти цилиндры испытывают предварительные деформации осевого растяжения-сжатия, описываемые следующими соотношениями (здесь и далее верхним индексом $^{(k)}$ будем обозначать величины, относящиеся к k-му цилиндру, $k = 1...N$):

$$\begin{gathered} r = c^{(k)}\rho^{(k)}, \qquad \varphi = \theta^{(k)}, \qquad z = a^{(k)}\zeta^{(k)},\\ \rho_-^{(k)} \le \rho^{(k)} \le \rho_+^{(k)}, \qquad 0 \le \theta^{(k)} \le 2\pi, \qquad 0 \le \zeta^{(k)} \le l^{(k)},\\ \mathbf{C}_0^{(k)} = c^{(k)}\mathbf{e}_\rho^{(k)}\otimes\mathbf{e}_r + c^{(k)}\mathbf{e}_\theta^{(k)}\otimes\mathbf{e}_\varphi + a^{(k)}\mathbf{e}_\zeta^{(k)}\otimes\mathbf{e}_z,\\ \mathbf{H}_0^{(k)} = \mathbf{e}_\rho^{(k)}\otimes\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta^{(k)}\otimes\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\zeta^{(k)}\otimes\mathbf{e}_z, \end{gathered} \quad (16)$$

где $\rho^{(k)}$, $\theta^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ – цилиндрические координаты в естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации k-ого цилиндра; r, φ, z – цилиндрические координаты в преднапряженном состоянии; $\left\{\mathbf{e}_\rho^{(k)}, \mathbf{e}_\theta^{(k)}, \mathbf{e}_\zeta^{(k)}\right\}$ и $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ – ортонормированные векторные базисы соответствующих цилиндрических координат; $a^{(k)}$ – заданный коэффициент растяжения-сжатия вдоль оси k-ого цилиндра; $c^{(k)}$ – некоторая постоянная, характеризующая радиальную деформацию k-ого цилиндра.

Пусть упругие свойства исследуемых цилиндров описываются моделью физически линейного материала (4), причем значения микрополярных упругих констант для разных цилиндров могут отличаться. Тогда из условий отсутствия нагрузок на боковых поверхностях получим выражения постоянных $c^{(k)}$ ($k = 1...N$) [18]:

$$c^{(k)} = 1 - \frac{\lambda^{(k)}\left(a^{(k)} - 1\right)}{2\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \kappa^{(k)}}.$$

Дополнительно введем следующие ограничения:

1) В результате предварительных деформаций длина всех цилиндров становится одинаковой и равна L : $a^{(k)} l^{(k)} = L$, $k = 1...N$;

2) Внутренний радиус k-ого цилиндра после деформации становится равен внешнему радиусу ($k - 1$)-ого цилиндра: .

$$c^{(k)}\rho_-^{(k)} = c^{(k-1)}\rho_+^{(k-1)}, \quad k = 2...N$$

Благодаря выполнению данных условий деформированные полые цилиндры можно вставить друг в друга и жестко сцепить по боковым поверхностям, образуя тем самым составное (многослойное) цилиндрическое тело с предварительно напряженными частями. Следует отметить, что если для каких-то составляющих данного тела положить коэффициент $a^{(k)}$ равным 1, то это будет означать отсутствие в них предварительных напряжений.

Далее рассмотрим деформацию осевого растяжения-сжатия полученного составного N-слойного микрополярного цилиндра при внутреннем и внешнем давлении, выбрав в качестве отсчетной преднапряженную конфигурацию. Данная деформация описывается соотношениями ($k = 1...N$):

$$R = \begin{cases} f^{(1)}(r) & r_0 \le r \le r_1, \\ f^{(2)}(r) & r_1 \le r \le r_2, \\ \vdots & \vdots \\ f^{(N)}(r) & r_{N-1} \le r \le r_N, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Phi &= \varphi, \\ Z &= \alpha z, \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_1^{(k)} = \frac{df^{(k)}(r)}{dr}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \frac{f^{(k)}(r)}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z,$$
$$\mathbf{H}_1^{(k)} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z, \qquad r_{k-1} \le r \le r_k, \tag{17}$$
$$r_0 = c^{(1)}\rho_-^{(1)}, \qquad r_k = c^{(k)}\rho_+^{(k)},$$

где R, Φ, Z – цилиндрические координаты в текущей (деформированной) конфигурации; $\{\mathbf{e}_R,\mathbf{e}_\Phi,\mathbf{e}_Z\}$ – ортонормированный векторный базис соответствующих цилиндрических координат; α – заданный коэффициент растяжения-сжатия вдоль оси составного цилиндра; $f^{(k)}(r)$, $k = 1...N$ – некоторые неизвестные функции, характеризующие радиальную деформацию составного цилиндра.

Из формул (8), (13), (16), (17) следует, что тензоры изгибной деформации $\mathbf{L}_1^{(k)}$ и тензоры моментных напряжений типа Пиолы $\mathbf{G}_1^{(k)}$ равны нулю, а меры деформации типа Коши $\mathbf{Y}_1^{(k)}$ и тензоры напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_1^{(k)}$ выражаются следующим образом (здесь и далее $'$ обозначает производную по r, $k = 1...N$):

$$\mathbf{Y}_1^{(k)} = f^{(k)\prime}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f^{(k)}}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z, \tag{18}$$

$$\mathbf{D}_1^{(k)} = \frac{1}{a^{(k)}c^{(k)}}\left[\lambda^{(k)}s^{(k)} + \tau^{(k)}\left(c^{(k)}f^{(k)\prime} - 1\right)\right]\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R +$$
$$+\frac{1}{a^{(k)}c^{(k)}}\left[\lambda^{(k)}s^{(k)} + \tau^{(k)}\left(\frac{c^{(k)}f^{(k)}}{r} - 1\right)\right]\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi + \tag{19}$$
$$+\frac{1}{c^{(k)^2}}\left[\lambda^{(k)}s^{(k)} + \tau^{(k)}\left(\alpha a^{(k)} - 1\right)\right]\mathbf{e}_z\mathbf{e}_Z,$$

$$s^{(k)} = c^{(k)}f^{(k)\prime} + \frac{c^{(k)}f^{(k)}}{r} + \alpha a^{(k)} - 3, \quad \tau^{(k)} = 2\mu^{(k)} + \kappa^{(k)}.$$

Решая уравнения равновесия (11) с учетом выражений (19), находим вид неизвестных функций $f^{(k)}\,(k = 1...N)$:

$$f^{(k)}(r) = b_1^{(k)}r + \frac{b_2^{(k)}}{r}, \qquad r_{k-1} \le r \le r_k \tag{20}$$

Константы $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}\ \left(k = 1...N\right)$ определяются из граничных условий

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(1)}\Big|_{r=r_0} = -p_- J_1^{(1)}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{C}_1^{(1)^{-\mathrm{T}}},$$
$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(N)}\Big|_{r=r_N} = -p_+ J_1^{(N)}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{C}_1^{(N)^{-\mathrm{T}}},$$
$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(k)}\Big|_{r=r_k} = \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(k+1)}\Big|_{r=r_k}, \tag{21}$$
$$f^{(k)}(r_k) = f^{(k+1)}(r_k), \qquad k = 1...N-1,$$

которые выражают действие равномерно распределенных давлений p_- и p_+ (рассчитанных на единицу площади деформированной конфигурации) на внутренней ($r = r_0$) и внешней ($r = r_N$) боковых поверхностях полого составного цилиндра, а также жесткое сцепление его компонентов друг с другом ($r = r_k$, $k = 1...N - 1$).

С учетом представлений (17), (19), (20) условия (21) записываются в виде системы $2N$ линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2\lambda^{(1)} + \tau^{(1)} + p_-\alpha a^{(1)}}{a^{(1)}}b_1^{(1)} + \frac{p_-\alpha a^{(1)} - \tau^{(1)}}{a^{(1)}r_0^2}b_2^{(1)} =$$
$$= \frac{\left(3 - \alpha a^{(1)}\right)\lambda^{(1)} + \tau^{(1)}}{a^{(1)}c^{(1)}},$$
$$\frac{2\lambda^{(N)} + \tau^{(N)} + p_+\alpha a^{(N)}}{a^{(N)}}b_1^{(N)} + \frac{p_+\alpha a^{(N)} - \tau^{(N)}}{a^{(N)}r_N^2}b_2^{(N)} =$$
$$= \frac{\left(3 - \alpha a^{(N)}\right)\lambda^{(N)} + \tau^{(N)}}{a^{(N)}c^{(N)}}, \tag{22}$$
$$\frac{2\lambda^{(k)} + \tau^{(k)}}{a^{(k)}}b_1^{(k)} - \frac{\tau^{(k)}}{a^{(k)}r_k^2}b_2^{(k)} -$$
$$-\frac{2\lambda^{(k+1)} + \tau^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}b_1^{(k+1)} + \frac{\tau^{(k+1)}}{a^{(k+1)}r_k^2}b_2^{(k+1)} =$$
$$= \frac{\left(3 - \alpha a^{(k)}\right)\lambda^{(k)} + \tau^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}} - \frac{\left(3 - \alpha a^{(k+1)}\right)\lambda^{(k+1)} + \tau^{(k+1)}}{a^{(k+1)}c^{(k+1)}},$$
$$b_1^{(k)}r_k + \frac{b_2^{(k)}}{r_k} - b_1^{(k+1)}r_k - \frac{b_2^{(k+1)}}{r_k} = 0, \qquad k = 1...N-1.$$

Решая данную систему, находим неизвестные константы $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}$ $\left(k=1...N\right)$. Следует отметить, что вместо полого составного цилиндра можно рассмотреть сплошной. Для этого достаточно положить $\rho_-^{(1)}=0$ и заменить граничное условие на внутренней боковой поверхности (первое уравнение из (22)) требованием отсутствия радиальных перемещений на оси цилиндра: $f^{(1)}\left(0\right)=0 \quad \Rightarrow \quad b_2^{(1)}=0$.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия составного N-слойного микрополярного цилиндра с предварительно напряженными частями при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое возмущенное равновесное состояние. Согласно (12) это состояние описывается следующими уравнениями ($k=1...N$):

$$\begin{gathered}\overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1^{(k)\bullet}=0,\\ \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1^{(k)\bullet}+\left[\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}^{(k)\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^{(k)}+\mathbf{C}_1^{(k)\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^{(k)\bullet}\right]_\times=0.\end{gathered}\tag{23}$$

Линеаризованные краевые условия на внутренней ($r=r_0$) и внешней ($r=r_N$) боковых поверхностях полого составного цилиндра, а также на границах раздела между его компонентами ($r=r_k$, $k=1...N-1$) записываются следующим образом [13; 14]:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(1)\bullet}\Big|_{r=r_0}=-p_-J_1^{(1)}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{C}_1^{(1)^{-\mathrm{T}}}\cdot\mathbf{Q}^{(1)},\\ \mathbf{Q}^{(1)}=\left(\nabla^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)}\right)\mathbf{E}-\nabla^{(1)}\mathbf{v}^{(1)\mathrm{T}},\qquad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{G}_1^{(1)\bullet}\Big|_{r=r_0}=0,\\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(N)\bullet}\Big|_{r=r_N}=-p_+J_1^{(N)}\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{C}_1^{(N)^{-\mathrm{T}}}\cdot\mathbf{Q}^{(N)},\\ \mathbf{Q}^{(N)}=\left(\nabla^{(N)}\cdot\mathbf{v}^{(N)}\right)\mathbf{E}-\nabla^{(N)}\mathbf{v}^{(N)\mathrm{T}},\quad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{G}_1^{(N)\bullet}\Big|_{r=r_N}=0,\\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(k)\bullet}\Big|_{r=r_k}=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{D}_1^{(k+1)\bullet}\Big|_{r=r_k},\qquad \mathbf{v}^{(k)}\Big|_{r=r_k}=\mathbf{v}^{(k+1)}\Big|_{r=r_k},\\ \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{G}_1^{(k)\bullet}\Big|_{r=r_k}=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{G}_1^{(k+1)\bullet}\Big|_{r=r_k},\qquad \boldsymbol{\omega}^{(k)}\Big|_{r=r_k}=\boldsymbol{\omega}^{(k+1)}\Big|_{r=r_k},\end{gathered}\tag{24}$$

где $\nabla^{(1)}=\mathbf{C}_1^{(1)^{-1}}\cdot\overset{1}{\nabla}$ и $\nabla^{(N)}=\mathbf{C}_1^{(N)^{-1}}\cdot\overset{1}{\nabla}$ – набла-операторы в эйлеровых координатах.

Будем полагать, что на торцах цилиндра ($z=0,L$) отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линеаризованным граничным условиям ($k=1...N$):

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{D}_1^{(k)\bullet}\cdot\mathbf{e}_R\Big|_{z=0,L}=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{D}_1^{(k)\bullet}\cdot\mathbf{e}_\Phi\Big|_{z=0,L}=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v}^{(k)}\Big|_{z=0,L}=0,\\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{G}_1^{(k)\bullet}\cdot\mathbf{e}_Z\Big|_{z=0,L}=\mathbf{e}_r\cdot\boldsymbol{\omega}^{(k)}\Big|_{z=0,L}=\mathbf{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{\omega}^{(k)}\Big|_{z=0,L}=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Запишем представление векторов добавочного перемещения $\mathbf{v}^{(k)}$ и векторов добавочного поворота $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ в базисе эйлеровых координат ($k=1...N$):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(k)}&=v_R^{(k)}\mathbf{e}_R+v_\Phi^{(k)}\mathbf{e}_\Phi+v_Z^{(k)}\mathbf{e}_Z,\\ \boldsymbol{\omega}^{(k)}&=\omega_R^{(k)}\mathbf{e}_R+\omega_\Phi^{(k)}\mathbf{e}_\Phi+\omega_Z^{(k)}\mathbf{e}_Z,\end{aligned}\qquad r_{k-1}\le r\le r_k.\tag{26}$$

При решении линеаризованной краевой задачи (23)–(25) для системы $6N$ дифференциальных уравнений в частных производных используется следующая подстановка ($k=1...N$):

$$\begin{gathered}v_R^{(k)}=V_R^{(k)}\left(r\right)\cos n\varphi\cos\beta z,\\ v_\Phi^{(k)}=V_\Phi^{(k)}\left(r\right)\sin n\varphi\cos\beta z,\\ v_Z^{(k)}=V_Z^{(k)}\left(r\right)\cos n\varphi\sin\beta z,\\ \omega_R^{(k)}=\Omega_R^{(k)}\left(r\right)\sin n\varphi\sin\beta z,\\ \omega_\Phi^{(k)}=\Omega_\Phi^{(k)}\left(r\right)\cos n\varphi\sin\beta z,\\ \omega_Z^{(k)}=\Omega_Z^{(k)}\left(r\right)\sin n\varphi\cos\beta z,\\ \beta=\pi m/L,\qquad m,n=0,1,2,...\end{gathered}\tag{27}$$

которая приводит к отделению переменных φ и z в задаче и позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (25) на торцах цилиндра.

Линеаризованные уравнения равновесия (23) с учетом соотношений (8), (13)–(19), (26), (27) записываются следующим образом ($k=1...N$):

$$\begin{gathered}\frac{\lambda^{(k)}+\tau^{(k)}}{a^{(k)}}V_R^{(k)\prime\prime}+\frac{\lambda^{(k)}+\tau^{(k)}}{a^{(k)}r}V_R^{(k)\prime}+\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r}V_\Phi^{(k)\prime}+\\ +\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}}V_Z^{(k)\prime}-\frac{\left(\lambda^{(k)}+3\mu^{(k)}+2\kappa^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r^2}V_\Phi^{(k)}-\\ -\left[\frac{\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}}{a^{(k)}r^2}+\left(\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}\right)\left(\frac{1+n^2}{a^{(k)}r^2}+\frac{a^{(k)}\beta^2}{c^{(k)^2}}\right)\right]V_R^{(k)}+\\ +\frac{\beta B_\Phi^{(k)}}{c^{(k)^2}}\Omega_\Phi^{(k)}-\frac{nB_Z^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}r}\Omega_Z^{(k)}=0,\end{gathered}$$

$$\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}}V_{\Phi}^{(k)\prime\prime}-\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r}V_{R}^{(k)\prime}+\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}r}V_{\Phi}^{(k)\prime}-$$

$$-\left[\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\left(\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}\right)\left(\frac{1+n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\frac{a^{(k)}\beta^{2}}{{c^{(k)}}^{2}}\right)\right]V_{\Phi}^{(k)}-$$

$$-\frac{\left(\lambda^{(k)}+3\mu^{(k)}+2\kappa^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r^{2}}V_{R}^{(k)}-\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)n\beta}{c^{(k)}r}V_{Z}^{(k)}+$$

$$+\frac{B_{Z}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}\Omega_{Z}^{(k)\prime}-\frac{\beta B_{R}^{(k)}}{{c^{(k)}}^{2}}\Omega_{R}^{(k)}+\frac{B_{Z}^{(k)\prime}}{a^{(k)}c^{(k)}}\Omega_{Z}^{(k)}=0,$$

$$\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}}V_{Z}^{(k)\prime\prime}-\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}}V_{R}^{(k)\prime}+\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}r}V_{Z}^{(k)\prime}-$$

$$-\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}r}V_{R}^{(k)}-\frac{\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)n\beta}{c^{(k)}r}V_{\Phi}^{(k)}- \qquad (28)$$

$$-\left[\frac{\left(\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}\right)n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\frac{\left(\lambda^{(k)}+\tau^{(k)}\right)a^{(k)}\beta^{2}}{{c^{(k)}}^{2}}\right]V_{Z}^{(k)}-$$

$$-\frac{B_{\Phi}^{(k)}\Omega_{\Phi}^{(k)\prime}}{a^{(k)}c^{(k)}}+\frac{nB_{R}^{(k)}\Omega_{R}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}r}-\left(B_{\Phi}^{(k)\prime}+\frac{B_{\Phi}^{(k)}}{r}\right)\frac{\Omega_{\Phi}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}=0,$$

$$\frac{\gamma^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_{R}^{(k)\prime\prime}+\frac{\gamma^{(k)}}{a^{(k)}r}\Omega_{R}^{(k)\prime}-\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r}\Omega_{\Phi}^{(k)\prime}-$$

$$-\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}}\Omega_{Z}^{(k)\prime}+\frac{\left(\gamma^{(k)}+\gamma_{2}^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r^{2}}\Omega_{\Phi}^{(k)}-$$

$$-\left[\frac{\gamma^{(k)}+\gamma_{2}^{(k)}n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\frac{\gamma_{2}^{(k)}a^{(k)}\beta^{2}}{{c^{(k)}}^{2}}-\frac{B_{R}^{(k)}}{c^{(k)}}\left(\frac{f^{(k)}}{a^{(k)}r}+\frac{\alpha}{c^{(k)}}\right)\right]\Omega_{R}^{(k)}-$$

$$-\frac{\beta B_{R}^{(k)}}{{c^{(k)}}^{2}}V_{\Phi}^{(k)}+\frac{nB_{R}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}r}V_{Z}^{(k)}=0,$$

$$\frac{\gamma_{2}^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_{\Phi}^{(k)\prime\prime}+\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r}\Omega_{R}^{(k)\prime}+\frac{\gamma_{2}^{(k)}}{a^{(k)}r}\Omega_{\Phi}^{(k)\prime}+$$

$$+\frac{\left(\gamma^{(k)}+\gamma_{2}^{(k)}\right)n}{a^{(k)}r^{2}}\Omega_{R}^{(k)}-\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)n\beta}{c^{(k)}r}\Omega_{Z}^{(k)}-$$

$$-\left[\frac{\gamma_{2}^{(k)}+\gamma^{(k)}n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\frac{\gamma_{2}^{(k)}a^{(k)}\beta^{2}}{{c^{(k)}}^{2}}-\frac{B_{\Phi}^{(k)}}{c^{(k)}}\left(\frac{f^{(k)\prime}}{a^{(k)}}+\frac{\alpha}{c^{(k)}}\right)\right]\Omega_{\Phi}^{(k)}+$$

$$+\frac{B_{\Phi}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}V_{Z}^{(k)\prime}+\frac{\beta B_{\Phi}^{(k)}}{{c^{(k)}}^{2}}V_{R}^{(k)}=0,$$

$$\frac{\gamma_{2}^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_{Z}^{(k)\prime\prime}+\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}}\Omega_{R}^{(k)\prime}+\frac{\gamma_{2}^{(k)}}{a^{(k)}r}\Omega_{Z}^{(k)\prime}+$$

$$+\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)\beta}{c^{(k)}r}\Omega_{R}^{(k)}-\frac{\left(\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}\right)n\beta}{c^{(k)}r}\Omega_{\Phi}^{(k)}-$$

$$-\left[\frac{\gamma_{2}^{(k)}n^{2}}{a^{(k)}r^{2}}+\frac{\gamma^{(k)}a^{(k)}\beta^{2}}{{c^{(k)}}^{2}}-\frac{B_{Z}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}\left(f^{(k)\prime}+\frac{f^{(k)}}{r}\right)\right]\Omega_{Z}^{(k)}-$$

$$-\frac{B_{Z}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}V_{\Phi}^{(k)\prime}-\frac{nB_{Z}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}r}V_{R}^{(k)}-\frac{B_{Z}^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}r}V_{\Phi}^{(k)}=0.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$B_{R}^{(k)}=\lambda^{(k)}s^{(k)}+\mu^{(k)}\left(\frac{c^{(k)}f^{(k)}}{r}+a^{(k)}\alpha\right)-\tau^{(k)},$$

$$B_{\Phi}^{(k)}=\lambda^{(k)}s^{(k)}+\mu^{(k)}\left(c^{(k)}f^{(k)\prime}+a^{(k)}\alpha\right)-\tau^{(k)},$$

$$B_{Z}^{(k)}=\lambda^{(k)}s^{(k)}+\mu^{(k)}c^{(k)}\left(f^{(k)\prime}+\frac{f^{(k)}}{r}\right)-\tau^{(k)},$$

$$\gamma^{(k)}=\gamma_{1}^{(k)}+\gamma_{2}^{(k)}+\gamma_{3}^{(k)}.$$

Линеаризованные краевые условия (24) примут вид:

1) на внутренней боковой поверхности ($r=r_0$)

$$\frac{\lambda^{(1)}+\tau^{(1)}}{a^{(1)}}V_{R}^{(1)\prime}+\frac{\lambda^{(1)}+p_{-}\alpha a^{(1)}}{a^{(1)}r_{0}}\left(nV_{\Phi}^{(1)}+V_{R}^{(1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\lambda^{(1)}}{c^{(1)}}+\frac{p_{-}f^{(1)}}{r_{0}}\right)\beta V_{Z}^{(1)}=0,$$

$$\frac{\mu^{(1)}+\kappa^{(1)}}{a^{(1)}}V_{\Phi}^{(1)\prime}+\frac{p_{-}\alpha a^{(1)}-\mu^{(1)}}{a^{(1)}r_{0}}\left(nV_{R}^{(1)}+V_{\Phi}^{(1)}\right)+$$

$$+\frac{B_{Z}^{(1)}\Omega_{Z}^{(1)}}{a^{(1)}c^{(1)}}=0, \qquad (29)$$

$$\frac{\mu^{(1)}+\kappa^{(1)}}{a^{(1)}}V_{Z}^{(1)\prime}+\left(\frac{p_{-}f^{(1)}}{r_{0}}-\frac{\mu^{(1)}}{c^{(1)}}\right)\beta V_{R}^{(1)}-\frac{B_{\Phi}^{(1)}\Omega_{\Phi}^{(1)}}{a^{(1)}c^{(1)}}=0,$$

$$\frac{\gamma^{(1)}}{a^{(1)}}\Omega_{R}^{(k)\prime}+\frac{\gamma_{1}^{(1)}}{a^{(1)}r_{0}}\left(\Omega_{R}^{(1)}-n\Omega_{\Phi}^{(1)}\right)-\frac{\gamma_{1}^{(1)}\beta}{c^{(1)}}\Omega_{Z}^{(1)}=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(1)}}{a^{(1)}}\Omega_\Phi^{(1)\prime}+\frac{\gamma_3^{(1)}}{a^{(1)}r_0}\left(n\Omega_R^{(1)}-\Omega_\Phi^{(1)}\right)=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(1)}}{a^{(1)}}\Omega_Z^{(1)\prime}+\frac{\gamma_3^{(1)}\beta}{c^{(1)}}\Omega_R^{(1)}=0;$$

2) на внешней боковой поверхности ($r = r_N$)

$$\frac{\lambda^{(N)}+\tau^{(N)}}{a^{(N)}}V_R^{(N)\prime}+\frac{\lambda^{(N)}+p_+\alpha a^{(N)}}{a^{(N)}r_N}\left(nV_\Phi^{(N)}+V_R^{(N)}\right)+$$
$$+\left(\frac{\lambda^{(N)}}{c^{(N)}}+\frac{p_+f^{(N)}}{r_N}\right)\beta V_Z^{(N)}=0,$$

$$\frac{\mu^{(N)}+\kappa^{(N)}}{a^{(N)}}V_\Phi^{(N)\prime}+\frac{p_+\alpha a^{(N)}-\mu^{(N)}}{a^{(N)}r_N}\left(nV_R^{(N)}+V_\Phi^{(N)}\right)+$$
$$+\frac{B_Z^{(N)}\Omega_Z^{(N)}}{a^{(N)}c^{(N)}}=0,$$

$$\frac{\mu^{(N)}+\kappa^{(N)}}{a^{(N)}}V_Z^{(N)\prime}+\left(\frac{p_+f^{(N)}}{r_N}-\frac{\mu^{(N)}}{c^{(N)}}\right)\beta V_R^{(N)}-$$
$$-\frac{B_\Phi^{(N)}\Omega_\Phi^{(N)}}{a^{(N)}c^{(N)}}=0, \tag{30}$$

$$\frac{\gamma^{(N)}}{a^{(N)}}\Omega_R^{(N)\prime}+\frac{\gamma_1^{(N)}}{a^{(N)}r_N}\left(\Omega_R^{(N)}-n\Omega_\Phi^{(N)}\right)-\frac{\gamma_1^{(N)}\beta}{c^{(N)}}\Omega_Z^{(N)}=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(N)}}{a^{(N)}}\Omega_\Phi^{(N)\prime}+\frac{\gamma_3^{(N)}}{a^{(N)}r_N}\left(n\Omega_R^{(N)}-\Omega_\Phi^{(N)}\right)=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(N)}}{a^{(N)}}\Omega_Z^{(N)\prime}+\frac{\gamma_3^{(N)}\beta}{c^{(N)}}\Omega_R^{(N)}=0;$$

3) на границах раздела ($r = r_k$, $k = 1 \ldots N-1$)

$$\frac{\lambda^{(k)}+\tau^{(k)}}{a^{(k)}}V_R^{(k)\prime}+\frac{\lambda^{(k)}}{a^{(k)}r_k}\left(nV_\Phi^{(k)}+V_R^{(k)}\right)+\frac{\lambda^{(k)}\beta}{c^{(k)}}V_Z^{(k)}-$$
$$-\frac{\lambda^{(k+1)}+\tau^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}V_R^{(k+1)\prime}-\frac{\lambda^{(k+1)}}{a^{(k+1)}r_k}\left(nV_\Phi^{(k+1)}+V_R^{(k+1)}\right)-$$
$$-\frac{\lambda^{(k+1)}\beta}{c^{(k+1)}}V_Z^{(k+1)}=0,$$

$$\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}}V_\Phi^{(k)\prime}-\frac{\mu^{(k)}}{a^{(k)}r_k}\left(nV_R^{(k)}+V_\Phi^{(k)}\right)+\frac{B_Z^{(k)}\Omega_Z^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}-$$
$$-\frac{\mu^{(k+1)}+\kappa^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}V_\Phi^{(k+1)\prime}+\frac{\mu^{(k+1)}}{a^{(k+1)}r_k}\left(nV_R^{(k+1)}+V_\Phi^{(k+1)}\right)-$$
$$-\frac{B_Z^{(k+1)}\Omega_Z^{(k+1)}}{a^{(k+1)}c^{(k+1)}}=0,$$

$$\frac{\mu^{(k)}+\kappa^{(k)}}{a^{(k)}}V_Z^{(k)\prime}-\frac{\mu^{(k)}\beta}{c^{(k)}}V_R^{(k)}-\frac{B_\Phi^{(k)}\Omega_\Phi^{(k)}}{a^{(k)}c^{(k)}}-$$
$$-\frac{\mu^{(k+1)}+\kappa^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}V_Z^{(k+1)\prime}+\frac{\mu^{(k+1)}\beta}{c^{(k+1)}}V_R^{(k+1)}+\frac{B_\Phi^{(k+1)}\Omega_\Phi^{(k+1)}}{a^{(k+1)}c^{(k+1)}}=0,$$

$$\frac{\gamma^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_R^{(k)\prime}-\frac{\gamma_1^{(k)}}{a^{(k)}r_k}\left(n\Omega_\Phi^{(k)}-\Omega_R^{(k)}\right)-\frac{\gamma_1^{(k)}\beta}{c^{(k)}}\Omega_Z^{(k)}-$$
$$-\frac{\gamma^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}\Omega_R^{(k+1)\prime}+\frac{\gamma_1^{(k+1)}}{a^{(k+1)}r_k}\left(n\Omega_\Phi^{(k+1)}-\Omega_R^{(k+1)}\right)+ \tag{31}$$
$$+\frac{\gamma_1^{(k+1)}\beta}{c^{(k+1)}}\Omega_Z^{(k+1)}=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_\Phi^{(k)\prime}+\frac{\gamma_3^{(k)}}{a^{(k)}r_k}\left(n\Omega_R^{(k)}-\Omega_\Phi^{(k)}\right)-\frac{\gamma_2^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}\Omega_\Phi^{(k+1)\prime}-$$
$$-\frac{\gamma_3^{(k+1)}}{a^{(k+1)}r_k}\left(n\Omega_R^{(k+1)}-\Omega_\Phi^{(k+1)}\right)=0,$$

$$\frac{\gamma_2^{(k)}}{a^{(k)}}\Omega_Z^{(k)\prime}+\frac{\gamma_3^{(k)}\beta}{c^{(k)}}\Omega_R^{(k)}-\frac{\gamma_2^{(k+1)}}{a^{(k+1)}}\Omega_Z^{(k+1)\prime}-\frac{\gamma_3^{(k+1)}\beta}{c^{(k+1)}}\Omega_R^{(k+1)}=0,$$

$$V_R^{(k)}=V_R^{(k+1)},\qquad V_\Phi^{(k)}=V_\Phi^{(k+1)},\qquad V_Z^{(k)}=V_Z^{(k+1)},$$

$$\Omega_R^{(k)}=\Omega_R^{(k+1)},\qquad \Omega_\Phi^{(k)}=\Omega_\Phi^{(k+1)},\qquad \Omega_Z^{(k)}=\Omega_Z^{(k+1)}.$$

Таким образом, исследование устойчивости полого составного N-слойного микрополярного цилиндра с предварительными напряжениями сводится к решению линейной однородной краевой задачи (28)–(31) для системы $6N$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что полученные линеаризованные уравнения можно использовать и для анализа устойчивости сплошного составного цилиндра. Для этого достаточно вместо выполнения линеаризованных граничных условий (29) на внутренней боковой поверхности потребовать ограниченности неизвестных функций $V_R^{(1)}, V_\Phi^{(1)}, V_Z^{(1)}, \Omega_R^{(1)}, \Omega_\Phi^{(1)}, \Omega_Z^{(1)}$ и их производных на оси цилиндра, что приводит к следующим условиям при $r = 0$ [13]:

$$n=0: \qquad \begin{cases} V_R^{(1)}=V_\Phi^{(1)}=V_Z^{(1)\prime}=0 \\ \Omega_R^{(1)}=\Omega_\Phi^{(1)}=\Omega_Z^{(1)\prime}=0 \end{cases} \tag{32}$$

$$n=1: \qquad \begin{cases} V_R^{(1)\prime} = V_\Phi^{(1)\prime} = V_Z^{(1)} = 0 \\ \Omega_R^{(1)\prime} = \Omega_\Phi^{(1)\prime} = \Omega_Z^{(1)} = 0. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода рассмотрена проблема устойчивости составных (многослойных) микрополярных цилиндров с предварительно напряженными частями. Для модели физически-линейного материала (4) получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение данных цилиндров в возмущенном состоянии. С использованием специальной подстановки исследование устойчивости полых составных цилиндров сведено к решению линейной однородной краевой задачи (28)–(31), а сплошных – краевой задачи (28), (30)–(32) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (гранты 19-01-00719-а, 19-48-230042-р_а) и в рамках реализации Государственного задания ЮНЦ РАН, номер госрегистрации 01201354242.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. Cosserat E., Cosserat F. 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A, Hermann et Fils: 242 p.
2. Eringen A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids*. New York, Springer: 348 p.
3. Kafadar C.B., Eringen A.C. 1971. Micropolar media – I. The classical theory. *International Journal of Engineering Science*. 9(3): 271–305. doi: 10.1016/0020-7225(71)90040-1
4. Maugin G.A. 1998. On the structure of the theory of polar elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 356: 1367–1395. doi: 10.1098/rsta.1998.0226
5. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(2): 85–112. doi: 10.1007/BF00253050
6. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2010. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 80: 73–92. doi: 10.1007/s00419-009-0365-3
7. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.

   Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
8. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin, Springer: 205 p.
9. Zubov L.M. 2016. Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(2): 152–167. doi: 10.1177/1081286515577036
10. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. 2009. On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 46: 774–787. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.027
11. Еремеев В.А., Зубов Л.М. 1994. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 3: 181–190.

   Eremeyev V.A., Zubov L.M. 1994. On the stability of elastic bodies with couple-stresses. *Mechanics of Solids*. 29(3): 172–181.
12. Lakes R. 1995. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: *Continuum models for materials with micro-structure*. New York, Wiley: 1–22.
13. Sheydakov D.N. 2011. Buckling of elastic composite rods of micropolar material subjected to combined loads In: *Advanced Structured Materials. Vol. 7. Mechanics of Generalized Continua*. Berlin, Springer-Verlag: 255–271. doi: 10.1007/978-3-642-19219-7_13
14. Sheydakov D.N., Altenbach H. 2016. Stability of inhomogeneous micropolar cylindrical tube subject to combined loads. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(9): 1082–1094. doi: 10.1177/1081286514553145
15. Truesdell C. 1977. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York, Academic Press: 280 p.
16. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. 2012. Material symmetry group of the non-linear polar-elastic continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 49(14): 1993–2005. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.04.007
17. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. 2016. Material symmetry group and constitutive equations of micropolar anisotropic elastic solids. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(2): 210–221. doi: 10.1177/1081286515582862
18. Левин В.А. 2017. Равновесие микрополярных тел с предварительно деформированными областями. Наложение больших деформаций. *Прикладная математика и механика*. 81(3): 330–336.

   Levin V.A. 2017. Equilibrium of micropolar bodies with predeformed regions. The superposition of large deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(3): 223–227. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.014

Поступила 28.05.2020