НАУКА ЮГА РОССИИ 2022 Т. 18 № 3 С. 3–12
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2022 VOL. 18 No 3 P. 3–12

МЕХАНИКА

УДК 539.3:534.1
DOI: 10.7868/S25000640220301

БИФУРКАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ ПЛИТ С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

© 2022 г. Д.Н. Шейдаков[1], И.Б. Михайлова[1], Н.Е. Шейдаков[2]

Аннотация. Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел важна как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, так как исчерпание несущей способности и разрушение строительных и инженерных конструкций зачастую происходит именно в результате потери устойчивости под действием внешних нагрузок. Вследствие развития современных технологий и появления новых материалов достаточно большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости различных составных нелинейно-упругих тел со сложной микроструктурой и внутренними напряжениями. В настоящей работе в рамках общей теории устойчивости трехмерных тел исследована проблема бифуркации равновесия прямоугольной многослойной плиты при двухосном сжатии – растяжении. При этом предполагалось, что слои плиты могут быть предварительно деформированы и содержать начальные (остаточные) напряжения. Для описания поведения рассмотренных плит применялась модель микрополярной среды (континуум Коссера). Такой подход позволил подробно учесть влияние микроструктуры на потерю устойчивости. С использованием представления определяющих соотношений относительно разных отсчетных конфигураций в случае модели физически-линейного микрополярного материала получены линеаризованные уравнения равновесия, описывающие поведение составных плит с предварительно напряженными частями в возмущенном состоянии. С помощью специальной подстановки исследование устойчивости прямоугольной *N*-слойной микрополярной плиты сведено к решению линейной однородной краевой задачи для системы 6*N* обыкновенных дифференциальных уравнений. При заданных упругих параметрах материала слоев, их толщине и начальных деформациях данная краевая задача может быть достаточно легко решена численно с использованием конечно-разностного метода.

Ключевые слова: нелинейная упругость, устойчивость деформируемых тел, микрополярная среда, континуум Коссера, многослойная плита, внутренние напряжения.

EQUILIBRIUM BIFURCATION OF MULTILAYER MICROPOLAR PLATES WITH INTERNAL STRESSES

D.N. Sheydakov[1], I.B. Mikhailova[1], N.E. Sheydakov[2]

Abstract. The problem of equilibrium stability for deformable bodies is of considerable interest, both from theoretical and practical perspectives, because the exhaustion of load-bearing capacity and collapse of buildings and engineering structures quite often occurs due to buckling under external loads. Due to the development of modern technologies and the emergence of new materials, the stability analysis of various composite nonlinear elastic bodies with a complex microstructure and internal stresses is becoming quite relevant. In the present paper, within the framework of the general theory of stability for three-dimensional bodies, we have studied the problem of equilibrium bifurcation for a rectangular multilayer plate under biaxial compression-extension. It was assumed that the plate layers could be preliminary deformed and contain initial (residual)

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: sheidakov@mail.ru

[2] Ростовский государственный экономический университет (Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69

stresses. The model of a micropolar medium (Cosserat continuum) was applied to describe the behavior of the considered plate. This allowed us to take into account in detail the effect of microstructure on buckling. Using representations of constitutive relations for different reference configurations, in the case of a physically linear micropolar material model, linearized equilibrium equations were derived that describe the behavior of composite plates with prestressed parts in a perturbed state. Using a special substitution, the stability analysis of a rectangular *N*-layer micropolar plate was reduced to solving linear homogeneous boundary value problem for a system of 6*N* ordinary differential equations. Given the material parameters of the layers, their thickness, and initial strains, this boundary value problem can be easily solved numerically using the finite-difference method.

Keywords: nonlinear elasticity, stability of deformable bodies, micropolar medium, Cosserat continuum, multilayer plate, internal stresses.

ВВЕДЕНИЕ

Слоистые композиты широко используются в современной автопромышленности и авиастроении. При их моделировании важно, помимо прочего, учитывать влияние внутренних напряжений. Преднапряженные включения могут возникать в процессе сборки композита за счет пластических деформаций, нагрева, фазовых переходов и т.д. или создаваться искусственно. Особенностью составных тел с внутренними напряжениями является отсутствие единой естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации. По этой причине при выводе уравнений равновесия в разных частях тела используется запись определяющих соотношений материала относительно разных отсчетных конфигураций. Кроме того, многие современные материалы имеют сложную микроструктуру, и их поведение в ряде случаев не может быть адекватно описано в рамках классической теории упругости ввиду отсутствия в ней внутренних размерных параметров. Для учета влияния микроструктуры целесообразно использовать модель микрополярной среды (среда Коссера). Континуум Коссера [1–6] достаточно успешно применяется при моделировании металлических и полимерных пен, гранулированных материалов, поликристаллических тел, композитов, а также различных наноструктур. Его особенностью по сравнению с классической моделью сплошной среды является то, что каждая частица континуума Коссера наделяется свойствами абсолютно твердого тела путем учета ротационных степеней свободы.

Проблема устойчивости равновесия деформируемых тел представляет значительный интерес, так как исчерпание несущей способности и разрушение различных конструкций достаточно часто происходит именно вследствие потери устойчивости под действием внешних нагрузок. В случае простых материалов и конструкций теория устойчивости достаточно подробно разработана. Однако влияние внутренних напряжений на бифуркацию равновесия составных тел со сложной микроструктурой до сих пор малоизучено. В связи с этим в настоящей работе исследована проблема потери устойчивости многослойной микрополярной плиты с предварительно напряженными слоями.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ

В рамках нелинейного континуума Коссера система уравнений статики при отсутствии массовых сил и моментов состоит из уравнений равновесия для напряжений [7; 8]

$$\overset{0}{\nabla}\cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \overset{0}{\nabla}\cdot \mathbf{G} + \left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D}\right)_{\times} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W(\mathbf{Y},\mathbf{L})}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial W(\mathbf{Y},\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} \tag{2}$$

и геометрических соотношений [9–11]

$$\begin{gathered} \mathbf{Y} = \mathbf{C}\cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C} = \overset{0}{\nabla}\mathbf{R}, \\ \mathbf{L} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\mathbf{H}\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times \mathbf{H}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E} - \mathbf{H}\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times \mathbf{H}\right)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\overset{0}{\nabla}$ – набла-оператор в естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации; **D** и **G** – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы; $(\mathbf{Y},\mathbf{L})$ – удельная потенциальная энергия деформации; **Y** – мера деформации типа Коши; **L** – тензор изгибной деформации; **C** – градиент деформации; **R** и **H** – радиус-вектор и собственно ортогональный тензор микроповорота, определяющие положение и поворот частиц микрополярной среды в деформированном состоянии; $\mathbf{E}$ – единичный тензор.

Будем полагать, что упругие свойства среды описываются моделью физически линейного микрополярного материала. В этом случае удельная потенциальная энергия деформации является квадратичной формой тензоров $\mathbf{S} = \mathbf{Y} - \mathbf{E}$ и $\mathbf{L}$ [7; 12]:

$$
\begin{gathered}
W = \frac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tr}^2\mathbf{S} + \frac{1}{2}(\mu+\kappa)\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right) + \\
+\frac{1}{2}\mu\,\mathrm{tr}\mathbf{S}^2 + \frac{1}{2}\gamma_1\,\mathrm{tr}^2\mathbf{L} + \qquad (4) \\
+\frac{1}{2}\gamma_2\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\gamma_3\,\mathrm{tr}\mathbf{L}^2, \\
\mu+\kappa > 0, \quad \lambda + 2\mu + \kappa > 0, \\
\gamma_2 > 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0,
\end{gathered}
$$

а уравнения состояния (2) для тензоров напряжений и моментных напряжений типа Пиолы имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D} = \left[\lambda\,(\mathrm{tr}\mathbf{S})\,\mathbf{E} + (\mu+\kappa)\,\mathbf{S} + \mu\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H}, \\
\mathbf{G} = \left[\gamma_1\,(\mathrm{tr}\mathbf{L})\,\mathbf{E} + \gamma_2\mathbf{L} + \gamma_3\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right]\cdot\mathbf{H},
\end{gathered}
\qquad (5)
$$

где λ, μ, κ, γ_1, γ_2, γ_3 – микрополярные упругие константы.

ПРЕДНАПРЯЖЕННАЯ ОТСЧЕТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

Пусть имеются две отсчетные конфигурации – естественная χ и преднапряженная χ_1. Тогда $\mathbf{C},\mathbf{H}(\chi \to \mathrm{X})$ и $\mathbf{C}_1,\mathbf{H}_1(\chi_1 \to \mathrm{X})$ – соответствующие им градиенты деформации и тензоры микроповорота, отвечающие одной текущей конфигурации X. Далее все тензорные величины, соответствующие преднапряженной отсчетной конфигурации будем обозначать нижним индексом $_1$. Согласно [7; 13; 14] справедливы следующие соотношения:

$$
\mathbf{C} = \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1, \qquad (6)
$$

где $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – градиент деформации и тензор микроповорота при переходе от естественной к преднапряженной отсчетной конфигурации ($\chi \to \chi_1$).

Из выражений (3), (6) вытекают формулы преобразования меры деформации типа Коши и тензора изгибной деформации при изменении отсчетной конфигурации [14–16]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Y} = \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0\cdot\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{Y}_1 = \mathbf{C}_1\cdot\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{L}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}_1\cdot\left(\overset{1}{\nabla}\times\mathbf{H}_1\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E} - \mathbf{H}_1\cdot\left(\overset{1}{\nabla}\times\mathbf{H}_1\right)^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{L}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{H}_0\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}_0\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{E} - \mathbf{H}_0\cdot\left(\overset{0}{\nabla}\times\mathbf{H}_0\right)^{\mathrm{T}},
\end{gathered}
\qquad (7)
$$

где $\mathbf{L}_0$ – тензор изгибной деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой ($\chi \to \chi_1$); $\overset{1}{\nabla}$ – набла-оператор в преднапряженной отсчетной конфигурации.

Запишем представления тензоров напряжений и моментных напряжений типа Пиолы в разных отсчетных конфигурациях через тензоры напряжений и моментных напряжений типа Коши $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ [7; 16; 17]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D} = J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}, \quad \mathbf{D}_1 = J_1\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}, \\
\mathbf{G} = J\mathbf{C}^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}, \quad \mathbf{G}_1 = J_1\mathbf{C}_1^{-\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}, \\
J = \det\mathbf{C}, \quad J_1 = \det\mathbf{C}_1.
\end{gathered}
\qquad (8)
$$

Используя соотношения (6), (8), получим связи между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_1$:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}, \quad \mathbf{G}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{G}; \\
J_0 = \det\mathbf{C}_0.
\end{gathered}
\qquad (9)
$$

Уравнения равновесия (1) в случае преднапряженной отсчетной конфигурации χ_1 записываются следующим образом:

$$
\overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}, \quad \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1 + \left(\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1\right)_{\times} = \mathbf{0}, \qquad (10)
$$

Согласно (5), (7), (9) для физически линейного микрополярного материала тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы относительно преднапряженной отсчетной конфигурации χ_1 имеют вид [17]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1, \\
\mathbf{G}_1 = J_0^{-1}\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{G}}\cdot\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_1,
\end{gathered}
\qquad (11)
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \lambda\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \\
+(\mu+\kappa)\left(\mathbf{C}_0\cdot\mathbf{Y}_1\cdot\mathbf{H}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right) + \\
+\mu\left(\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}_0^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\right),
\end{gathered}
$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{G}} = \gamma_1 \mathrm{tr}\ \mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\ \mathbf{E} +$$

$$+\gamma_2\ \mathbf{L}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{H}_0^{\mathrm{T}}\ +$$

$$+\gamma_3\ \mathbf{L}_0^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{L}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}}\ .$$

МНОГОСЛОЙНАЯ ПЛИТА С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Рассмотрим N прямоугольных микрополярных плит, длины сторон которых в естественном состоянии равны b_1^{k} и b_2^{k}, а толщины равны h^{k} (здесь и далее верхним индексом $^{(k)}$ будем обозначать величины, относящиеся к k-ой плите, k = 1...N). Будем полагать, что эти плиты испытывают предварительные деформации двухосного растяжения – сжатия, описываемые следующими соотношениями:

$$x_1 = a_1^{k} \zeta_1^{k}, \quad x_2 = a_2^{k} \zeta_2^{k},$$

$$x_3 = a_3^{k} \zeta_3^{k} + \theta^{k},$$

$$0 \le \zeta_1^{k} \le b_1^{k}, \quad 0 \le \zeta_2^{k} \le b_2^{k},$$

$$0 \le \zeta_3^{k} \le h^{k},$$

$$\mathbf{C}_0^{(k)} = a_1^{(k)} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_2^{(k)} \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_3^{(k)} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \tag{12}$$

$$\mathbf{H}_0^{(k)} = \mathbf{E},$$

где $\zeta_1^{k}, \zeta_2^{k}, \zeta_3^{k}$ – декартовы координаты в естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации k-ой плиты; x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты в преднапряженном состоянии; $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортонормированный векторный базис декартовых координат; $a_1^{k}, a_2^{k}, a_3^{k}$ – коэффициенты растяжения – сжатия k-ой плиты вдоль координатных осей; $\theta^{(k)}$ – некоторая постоянная, определяющая положение k-ой плиты в пространстве и не влияющая на ее деформацию. Коэффициенты a_1^{k}, a_2^{k} полагаются заданными, а коэффициент a_3^{k} определяется из условий отсутствия нагрузок на лицевых поверхностях k-ой плиты. Если упругие свойства исследуемых плит описываются моделью физически линейного материала (4) и значения микрополярных упругих констант для разных плит отличаются, то выражение для a_3^{k} (k = 1...N) имеет вид:

$$a_3^{k} = 1 - \frac{\lambda^{k}\ \ a_1^{k} + a_2^{k} - 2}{\lambda^{k} + 2\mu^{k} + \kappa^{k}}.$$

Дополнительно введем следующие ограничения:

1) в результате предварительных деформаций длины сторон всех плит становятся одинаковыми и равны B_1 и B_2: $a_1^{k} b_1^{k} = B_1$, $a_2^{k} b_2^{k} = B_2$, $k = 1...N$;

2) положение нижней лицевой поверхности k-ой плиты после деформации совпадает с положением верхней лицевой поверхности (k − 1)-ой плиты: $\theta^{k} = \theta^{k-1} + a_3^{k-1} h^{k-1}$, k = 2...N. При этом, не нарушая общности, будем считать, что $\theta^{(1)} \equiv 0$, то есть нижняя граница первой плиты лежит на плоскости $x_3 = 0$.

Благодаря выполнению данных условий деформированные прямоугольные плиты можно склеить (жестко сцепить) друг с другом по лицевым поверхностям, образуя тем самым составное многослойное тело с предварительно напряженными частями. Следует отметить, что если для каких-то слоев данного тела положить $a_1^{k} = a_2^{k} = 1$, то это будет означать отсутствие в них внутренних напряжений.

Далее рассмотрим деформацию двухосного растяжения – сжатия полученной составной N-слойной микрополярной плиты, выбрав в качестве отсчетной преднапряженную конфигурацию. Данная деформация описывается соотношениями (k = 1...N) [18]:

$$X_1 = \alpha_1 x_1, \quad 0 \le x_1 \le B_1,$$

$$X_2 = \alpha_2 x_2, \quad 0 \le x_2 \le B_2,$$

$$X_3 = \begin{cases} f^{1}\ \ x_3 & 0 \le x_3 \le z_1, \\ f^{2}\ \ x_3 & z_1 \le x_3 \le z_2, \\ \ldots & \ldots \\ f^{N}\ \ x_3 & z_{N-1} \le x_3 \le z_N, \end{cases}$$

$$z_0 = 0, \qquad z_k = z_{k-1} + a_3^{k} h^{k};$$

$$\mathbf{R}_1^{k} = \alpha_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 x_2 \mathbf{e}_2 + f^{k}(x_3)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{C}_1^{k} = \alpha_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \frac{df^{k}\ \ x_3}{dx_3} \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \tag{13}$$

$$\mathbf{H}_1^{k} = \mathbf{E} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$z_{k-1} \le x_3 \le z_k.$$

где X_1, X_2, X_3 – декартовы координаты в текущей (деформированной) конфигурации; α_1 и α_2 – коэффициенты растяжения – сжатия вдоль осей X_1 и X_2 соответственно; $f^{k}\ \ x_3$, $k = 1...N$ – некоторые неизвестные функции, характеризующие толщинную деформацию многослойной плиты.

Из формул (7), (11)–(13) следует, что тензоры изгибной деформации $\mathbf{L}_1^{k}$ и тензоры моментных напряжений типа Пиолы $\mathbf{G}_1^{k}$ равны нулю, а меры деформации типа Коши $\mathbf{Y}_1^{k}$ и тензоры напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_1^{k}$ выражаются следующим образом (здесь и далее «′» обозначает производную по x_3, $k = 1...N$):

$$\mathbf{Y}_1^{k} = \alpha_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + f^{k}{}'\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \tag{14}$$

$$\mathbf{D}_1^{k} = \frac{1}{a_2^{k}\ a_3^{k}}\left[\lambda^{k} s^{k} + \psi^{k}\ \ \alpha_1 a_1^{k} - 1\ \right]\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 +$$

$$+\frac{1}{a_1^{k}\ a_3^{k}}\left[\lambda^{k} s^{k} + \psi^{k}\ \ \alpha_2 a_2^{k} - 1\ \right]\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \tag{15}$$

$$+\frac{1}{a_1^{k}\ a_2^{k}}\times\left[\lambda^{k} s^{k} + \psi^{k}\ \ f^{k}{}' a_3^{k} - 1\ \right]\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

$$s^{k} = \alpha_1 a_1^{k} + \alpha_2 a_2^{k} + f^{k}{}' a_3^{k} - 3,$$

$$\psi^{k} = 2\mu^{k} + \kappa^{k}.$$

Уравнения равновесия (10) для рассмотренной составной микрополярной плиты записываются следующим образом ($k = 1...N$):

$$\begin{gathered} \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1^{k} = \mathbf{0}, \\ \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1^{k} + \ \mathbf{C}_1^{k}{}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^{k}\ \ _\times = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{16}$$

Граничные условия

$$\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{D}_1^{1}\Big|_{x_3=0} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{D}_1^{N}\Big|_{x_3=z_N} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{D}_1^{m}\Big|_{x_3=z_m} = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{D}_1^{m+1}\Big|_{x_3=z_m},\quad f^{1}\ \ 0\ = 0, \tag{17}$$

$$f^{(m)}\left(z_m\right) = f^{(m+1)}\left(z_m\right),\quad m = 1...N-1$$

выражают отсутствие внешних нагрузок на лицевых поверхностях многослойной плиты ($x_3 = 0$, $x_3 = z_N$), жесткое сцепление ее слоев друг с другом ($x_3 = z_m$, $m = 1...N - 1$), а также отсутствие вертикального смещения при $x_3 = 0$.

Решая краевую задачу (16), (17) с учетом выражений (13), (15), находим неизвестные функции $f^{(k)}(x_3)$ ($k = 1...N$):

$$f^{(k)}\left(x_3\right) = \alpha_3^{(k)}x_3 + c^{(k)},\quad z_{k-1} \le x_3 \le z_k;$$

$$\alpha_3^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}\left(3 - \alpha_1 a_1^{(k)} - \alpha_2 a_2^{(k)}\right) + \psi^{(k)}}{a_3^{(k)}\left(\lambda^{(k)} + \psi^{(k)}\right)},$$

$$c^{(1)} = 0, \tag{18}$$

$$c^{(m+1)} = c^{(m)} + z_m\left(\alpha_3^{(m)} - \alpha_3^{(m+1)}\right),$$

$$m = 1...N-1.$$

УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Предположим, что помимо описанного выше докритического состояния равновесия прямоугольной N-слойной микрополярной плиты с внутренними напряжениями при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое возмущенное равновесное состояние, определяемое радиус-векторами $\mathbf{R}_1^{k} + \eta\mathbf{v}^{k}$, $k = 1...N$ и тензорами микроповорота $\mathbf{H}_1^{(k)} - \eta\mathbf{H}_1^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}^{(k)}$, $k = 1...N$. Здесь η – малый параметр, $\mathbf{v}^{(k)}$ – векторы добавочных перемещений, $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ – линейные векторы добавочного поворота, характеризующие малый поворот частиц микрополярной среды, отсчитываемый от докритического состояния. Это возмущенное состояние описывается следующими уравнениями ($k = 1...N$) [11; 17]:

$$\begin{gathered} \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{D}_1^{k\bullet} = \mathbf{0}, \\ \overset{1}{\nabla}\cdot\mathbf{G}_1^{k\bullet} + \left[\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}^{k}{}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^{k} + \mathbf{C}_1^{k}{}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_1^{k\bullet}\right]_\times = \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{19}$$

$$\mathbf{D}_1^{(k)\bullet} = \frac{d}{d\eta}\mathbf{D}_1^{(k)}\left(\mathbf{C}_1^{(k)} + \eta\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{H}_1^{(k)} - \eta\mathbf{H}_1^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right)\Bigg|_{\eta=0},$$

$$\mathbf{G}_1^{(k)\bullet} = \frac{d}{d\eta}\mathbf{G}_1^{(k)}\left(\mathbf{C}_1^{(k)} + \eta\overset{1}{\nabla}\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{H}_1^{(k)} - \eta\mathbf{H}_1^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}^{(k)}\right)\Bigg|_{\eta=0},$$

где $\mathbf{D}_1^{k\bullet}, \mathbf{G}_1^{k\bullet}$, $k = 1...N$ – линеаризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы. Согласно соотношениям (11) выражения этих тензоров в случае физически линейного микрополярного материала (4) имеют вид ($k = 1...N$) [17]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} = J_0^{(k)^{-1}} \mathbf{C}_0^{(k)^\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{D}^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \mathbf{H}_1^{(k)} - \\
- J_0^{(k)^{-1}} \mathbf{C}_0^{(k)^\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{D}^{(k)} \cdot \mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \mathbf{H}_1^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}^{(k)}, \\
\mathbf{G}_1^{(k)^\bullet} = J_0^{(k)^{-1}} \mathbf{C}_0^{(k)^\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{G}^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \mathbf{H}_1^{(k)} - \\
- J_0^{(k)^{-1}} \mathbf{C}_0^{(k)^\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{G}^{(k)} \cdot \mathbf{H}_0^{(k)} \cdot \mathbf{H}_1^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}^{(k)},
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}_\mathbf{D}^{k\ \bullet} = \lambda^{\ k} \operatorname{tr}\ \mathbf{C}_0^{\ k} \cdot \mathbf{Y}_1^{\ k\ \bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{\ k\ \mathrm{T}}\ \mathbf{E} + \\
+\ \mu^{\ k} + \kappa^{\ k}\ \ \mathbf{C}_0^{\ k} \cdot \mathbf{Y}_1^{\ k\ \bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{\ k\ \mathrm{T}} + \\
+ \mu^{\ k}\ \mathbf{H}_0^{\ k} \cdot \mathbf{Y}_1^{\ k\ \bullet\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_0^{\ k\ \mathrm{T}}, \\
\mathbf{A}_\mathbf{G}^{k\ \bullet} = \gamma_1^{\ k} \operatorname{tr}\ \mathbf{C}_0^{\ k} \cdot \mathbf{L}_1^{\ k\ \bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{\ k\ \mathrm{T}}\ \mathbf{E} + \\
+ \gamma_2^{\ k}\ \mathbf{C}_0^{\ k} \cdot \mathbf{L}_1^{\ k\ \bullet} \cdot \mathbf{H}_0^{\ k\ \mathrm{T}} + \\
+ \gamma_3^{\ k}\ \mathbf{H}_0^{\ k} \cdot \mathbf{L}_1^{\ k\ \bullet\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C}_0^{\ k\ \mathrm{T}}, \\
\mathbf{Y}_1^{(k)^\bullet} = \left(\overset{1}{\nabla} \mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{C}_1^{(k)} \times \boldsymbol{\omega}^{(k)} \right) \cdot \mathbf{H}_1^{(k)^\mathrm{T}}, \\
\mathbf{L}_1^{(k)^\bullet} = \overset{1}{\nabla} \boldsymbol{\omega}^{(k)} \cdot \mathbf{H}_1^{(k)^\mathrm{T}},
\end{gathered} \tag{21}
$$

где $\mathbf{Y}_1^{\ k\ \bullet}$, $k = 1...N$ – линеаризованные меры деформации типа Коши, $\mathbf{L}_1^{\ k\ \bullet}$, $k = 1...N$ – линеаризованные тензоры изгибных деформаций.

Линеаризованные краевые условия на лицевых поверхностях многослойной плиты ($x_3 = 0$, $x_3 = z_N$), а также на границах ее слоев ($x_3 = z_m$, $m = 1...N-1$) записываются следующим образом [18]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_1^{(1)^\bullet} \Big|_{x_3 = 0} = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{G}_1^{(1)^\bullet} \Big|_{x_3 = 0} = 0, \\
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_1^{(N)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_N} = 0, \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{G}_1^{(N)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_N} = 0, \\
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_1^{(m)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_m} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_1^{(m+1)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_m}, \\
\mathbf{v}^{(m)} \Big|_{x_3 = z_m} = \mathbf{v}^{(m+1)} \Big|_{x_3 = z_m}, \\
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{G}_1^{(m)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_m} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{G}_1^{(m+1)^\bullet} \Big|_{x_3 = z_m}, \\
\boldsymbol{\omega}^{(m)} \Big|_{x_3 = z_m} = \boldsymbol{\omega}^{(m+1)} \Big|_{x_3 = z_m}.
\end{gathered} \tag{22}
$$

Будем полагать, что на торцах плиты ($x_1 = 0, B_1$ и $x_2 = 0, B_2$) отсутствуют силы трения и заданы постоянные нормальные перемещения. Это приводит к следующим линеаризованным граничным условиям ($k = 1...N$) [18]:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_2 \Big|_{x_1 = 0, B_1} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_3 \Big|_{x_1 = 0, B_1} = \\
= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}^{(k)} \Big|_{x_1 = 0, B_1} = 0, \\
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{G}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_1 \Big|_{x_1 = 0, B_1} = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}^{(k)} \Big|_{x_1 = 0, B_1} = \\
= \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}^{(k)} \Big|_{x_1 = 0, B_1} = 0, \\
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_1 \Big|_{x_2 = 0, B_2} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_3 \Big|_{x_2 = 0, B_2} = \\
= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}^{(k)} \Big|_{x_2 = 0, B_2} = 0, \\
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{G}_1^{(k)^\bullet} \cdot \mathbf{e}_2 \Big|_{x_2 = 0, B_2} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}^{(k)} \Big|_{x_2 = 0, B_2} = \\
= \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}^{(k)} \Big|_{x_2 = 0, B_2} = 0.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Запишем представление векторов добавочных перемещений $\mathbf{v}^{(k)}$ и векторов добавочного поворота $\boldsymbol{\omega}^{(k)}$ в базисе эйлеровых координат ($k = 1...N$):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}^{(k)} = v_1^{(k)} \mathbf{e}_1 + v_2^{(k)} \mathbf{e}_2 + v_3^{(k)} \mathbf{e}_3, \\
\boldsymbol{\omega}^{(k)} = \omega_1^{(k)} \mathbf{e}_1 + \omega_2^{(k)} \mathbf{e}_2 + \omega_3^{(k)} \mathbf{e}_3,
\end{gathered} \qquad z_{k-1} \le x_3 \le z_k. \tag{24}
$$

Согласно соотношениям (11)–(14), (18), (20), (21), (24) компоненты линеаризованных тензоров напряжений типа Пиолы $\mathbf{D}_1^{(k)^\bullet}$ и линеаризованных тензоров моментных напряжений типа Пиолы $\mathbf{G}_1^{(k)^\bullet}$ записываются следующим образом ($k = 1...N$):

$$
\mathbf{D}_1^{(k)^\bullet} = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij}^{(k)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{G}_1^{(k)^\bullet} = \sum_{i,j=1}^{3} G_{ij}^{(k)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,
$$

$$
D_{11}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)} \left(\xi^{(k)} + \tau^{(k)} \right)}{a_2^{(k)} a_3^{(k)}} \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\lambda^{(k)}}{a_3^{(k)}} \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\lambda^{(k)}}{a_2^{(k)}} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_3},
$$

$$
D_{12}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)} \tau^{(k)}}{a_2^{(k)} a_3^{(k)}} \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\mu^{(k)}}{a_3^{(k)}} \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{A_3^{(k)} \omega_3^{(k)}}{a_2^{(k)} a_3^{(k)}},
$$

$$
D_{13}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)} \tau^{(k)}}{a_2^{(k)} a_3^{(k)}} \frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\mu^{(k)}}{a_2^{(k)}} \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_3} - \frac{A_2^{(k)} \omega_2^{(k)}}{a_2^{(k)} a_3^{(k)}},
$$

$$D_{21}^{(k)} = \frac{a_2^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\mu^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1} - \frac{A_3^{(k)}\omega_3^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}},$$

$$D_{22}^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{a_2^{(k)}\left(\xi^{(k)}+\tau^{(k)}\right)}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\lambda^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_3}, \tag{25}$$

$$D_{23}^{(k)} = \frac{a_2^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\mu^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_3} + \frac{A_1^{(k)}\omega_1^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}},$$

$$D_{31}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_3} + \frac{\mu^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{A_2^{(k)}\omega_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}},$$

$$D_{32}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_3} + \frac{\mu^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_2} - \frac{A_1^{(k)}\omega_1^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}},$$

$$D_{33}^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\lambda^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{a_3^{(k)}\left(\xi^{(k)}+\tau^{(k)}\right)}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial v_3^{(k)}}{\partial x_3},$$

$$G_{11}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)}\gamma^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_3},$$

$$G_{12}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_2},$$

$$G_{13}^{(k)} = \frac{a_1^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_3},$$

$$G_{21}^{(k)} = \frac{a_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_1},$$

$$G_{22}^{(k)} = \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{a_2^{(k)}\gamma^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_3}, \tag{26}$$

$$G_{23}^{(k)} = \frac{a_2^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_3},$$

$$G_{31}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_3} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_1},$$

$$G_{32}^{(k)} = \frac{a_3^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_3} + \frac{\gamma_3^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_2},$$

$$G_{33}^{(k)} = \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\gamma_1^{(k)}}{a_1^{(k)}}\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{a_3^{(k)}\gamma^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\frac{\partial \omega_3^{(k)}}{\partial x_3}.$$

Здесь использованы специальные обозначения:

$$A_1^{(k)} = \lambda^{(k)}s^{(k)} + \mu^{(k)}\left(\alpha_2 a_2^{(k)} + \alpha_3^{(k)}a_3^{(k)}\right) - \psi^{(k)},$$

$$A_2^{(k)} = \lambda^{(k)}s^{(k)} + \mu^{(k)}\left(\alpha_1 a_1^{(k)} + \alpha_3^{(k)}a_3^{(k)}\right) - \psi^{(k)},$$

$$A_3^{(k)} = \lambda^{(k)}s^{(k)} + \mu^{(k)}\left(\alpha_1 a_1^{(k)} + \alpha_2 a_2^{(k)}\right) - \psi^{(k)},$$

$$\xi^{(k)} = \lambda^{(k)} + \mu^{(k)}, \quad \tau^{(k)} = \mu^{(k)} + \kappa^{(k)},$$

$$\gamma^{(k)} = \gamma_1^{(k)} + \gamma_2^{(k)} + \gamma_3^{(k)}.$$

При решении линеаризованной краевой задачи (19), (22), (23) для системы $6N$ дифференциальных уравнений в частных производных используется следующая подстановка ($k = 1...N$) [18]:

$$\begin{aligned}
v_1^{(k)} &= V_1^{(k)}(x_3)\sin\beta_1 x_1 \cos\beta_2 x_2,\\
v_2^{(k)} &= V_2^{(k)}(x_3)\cos\beta_1 x_1 \sin\beta_2 x_2,\\
v_3^{(k)} &= V_3^{(k)}(x_3)\cos\beta_1 x_1 \cos\beta_2 x_2,\\
\omega_1^{(k)} &= \Omega_1^{(k)}(x_3)\cos\beta_1 x_1 \sin\beta_2 x_2,\\
\omega_2^{(k)} &= \Omega_2^{(k)}(x_3)\sin\beta_1 x_1 \cos\beta_2 x_2,\\
\omega_3^{(k)} &= \Omega_3^{(k)}(x_3)\sin\beta_1 x_1 \sin\beta_2 x_2,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\beta_1 = \pi m_1/B_1, \quad \beta_2 = \pi m_2/B_2, \quad m_{1,2} = 1,2,...,$$

которая приводит к отделению переменных x_1, x_2 в задаче и позволяет удовлетворить линеаризованным граничным условиям (23) на торцах плиты.

Линеаризованные уравнения равновесия (19) с учетом соотношений (13), (15), (24)–(27) записываются следующим образом ($k = 1...N$):

$$\frac{a_3^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}V_1^{(k)\prime\prime} - \left[\left(\frac{a_1^{(k)}\beta_1^2}{a_2^{(k)}} + \frac{a_2^{(k)}\beta_2^2}{a_1^{(k)}}\right)\frac{\tau^{(k)}}{a_3^{(k)}} + \frac{a_1^{(k)}\beta_1^2\xi^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}\right]V_1^{(k)} - \frac{\beta_1\beta_2\xi^{(k)}}{a_3^{(k)}}V_2^{(k)} - \frac{\beta_1\xi^{(k)}}{a_2^{(k)}}V_3^{(k)\prime} + \frac{A_2^{(k)}\Omega_2^{(k)\prime}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}} - \frac{\beta_2 A_3^{(k)}\Omega_3^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}} = 0,$$

$$\begin{gathered}
\frac{a_3^{(k)}\tau^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}V_2^{(k)\prime\prime} - \\
-\left[\left(\frac{a_1^{(k)}\beta_1^2}{a_2^{(k)}}+\frac{a_2^{(k)}\beta_2^2}{a_1^{(k)}}\right)\frac{\tau^{(k)}}{a_3^{(k)}}+\frac{a_2^{(k)}\beta_2^2\xi^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\right]V_2^{(k)} - \\
-\frac{\beta_1\beta_2\xi^{(k)}}{a_3^{(k)}}V_1^{(k)} - \frac{\beta_2\xi^{(k)}}{a_1^{(k)}}V_3^{(k)\prime} - \\
-\frac{A_1^{(k)}\Omega_1^{(k)\prime}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}} + \frac{\beta_1 A_3^{(k)}\Omega_3^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}} = 0, \\
\frac{a_3^{(k)}\left(\xi^{(k)}+\tau^{(k)}\right)}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}V_3^{(k)\prime\prime} - \left(\frac{a_1^{(k)}\beta_1^2}{a_2^{(k)}}+\frac{a_2^{(k)}\beta_2^2}{a_1^{(k)}}\right)\frac{\tau^{(k)}}{a_3^{(k)}}V_3^{(k)} + \\
+\frac{\beta_1\xi^{(k)}}{a_2^{(k)}}V_1^{(k)\prime} + \frac{\beta_2\xi^{(k)}}{a_1^{(k)}}V_2^{(k)\prime} + \frac{\beta_2 A_1^{(k)}\Omega_1^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}} - \frac{\beta_1 A_2^{(k)}\Omega_2^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}} = 0, \\
\frac{a_3^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\Omega_1^{(k)\prime\prime} - \frac{\beta_1\beta_2\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_3^{(k)}}\Omega_2^{(k)} + \\
+\frac{\beta_1\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_2^{(k)}}\Omega_3^{(k)\prime} + \\
+\left[\left(\frac{\alpha_2}{a_3^{(k)}}+\frac{\alpha_3^{(k)}}{a_2^{(k)}}\right)\frac{A_1^{(k)}}{a_1^{(k)}} - \frac{a_1^{(k)}\beta_1^2\gamma^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}} - \frac{a_2^{(k)}\beta_2^2\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\right]\Omega_1^{(k)} + \\
+\frac{A_1^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}V_2^{(k)\prime} + \frac{\beta_2 A_1^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}V_3^{(k)} = 0, \\
\frac{a_3^{(k)}\gamma_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\Omega_2^{(k)\prime\prime} - \frac{\beta_1\beta_2\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_3^{(k)}}\Omega_1^{(k)} + \\
+\frac{\beta_2\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_1^{(k)}}\Omega_3^{(k)\prime} + \\
+\left[\left(\frac{\alpha_1}{a_3^{(k)}}+\frac{\alpha_3^{(k)}}{a_1^{(k)}}\right)\frac{A_2^{(k)}}{a_2^{(k)}} - \frac{a_1^{(k)}\beta_1^2\gamma_2^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}} - \frac{a_2^{(k)}\beta_2^2\gamma^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}\right]\Omega_2^{(k)} - \\
-\frac{A_2^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}V_1^{(k)\prime} - \frac{\beta_1 A_2^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}V_3^{(k)} = 0, \\
\frac{a_3^{(k)}\gamma^{(k)}}{a_1^{(k)}a_2^{(k)}}\Omega_3^{(k)\prime\prime} - \frac{\beta_1\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_2^{(k)}}\Omega_1^{(k)\prime} - \\
-\frac{\beta_2\left(\gamma_1^{(k)}+\gamma_3^{(k)}\right)}{a_1^{(k)}}\Omega_2^{(k)\prime} + \\
+\left[\left(\frac{\alpha_1}{a_2^{(k)}}+\frac{\alpha_2}{a_1^{(k)}}\right)\frac{A_3^{(k)}}{a_3^{(k)}} - \frac{\gamma_2^{(k)}}{a_3^{(k)}}\left(\frac{a_1^{(k)}\beta_1^2}{a_2^{(k)}}+\frac{a_2^{(k)}\beta_2^2}{a_1^{(k)}}\right)\right]\Omega_3^{(k)} - \\
-\frac{\beta_2 A_3^{(k)}}{a_1^{(k)}a_3^{(k)}}V_1^{(k)} + \frac{\beta_1 A_3^{(k)}}{a_2^{(k)}a_3^{(k)}}V_2^{(k)} = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Линеаризованные краевые условия (22) примут вид:

1) на нижней лицевой поверхности ($x_3 = 0$)

$$\begin{gathered}
\frac{a_3^{(1)}\tau^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}V_1^{(1)\prime} - \frac{\beta_1\mu^{(1)}}{a_2^{(1)}}V_3^{(1)} + \frac{A_2^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}\Omega_2^{(1)} = 0, \\
\frac{a_3^{(1)}\tau^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}V_2^{(1)\prime} - \frac{\beta_2\mu^{(1)}}{a_1^{(1)}}V_3^{(1)} - \frac{A_1^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}\Omega_1^{(1)} = 0, \\
\frac{a_3^{(1)}\left(\xi^{(1)}+\tau^{(1)}\right)}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}V_3^{(1)\prime} + \frac{\beta_1\lambda^{(1)}}{a_2^{(1)}}V_1^{(1)} + \frac{\beta_2\lambda^{(1)}}{a_1^{(1)}}V_2^{(1)} = 0, \\
\frac{a_3^{(1)}\gamma_2^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}\Omega_1^{(1)\prime} + \frac{\beta_1\gamma_3^{(1)}}{a_2^{(1)}}\Omega_3^{(1)} = 0, \\
\frac{a_3^{(1)}\gamma_2^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}\Omega_2^{(1)\prime} + \frac{\beta_2\gamma_3^{(1)}}{a_1^{(1)}}\Omega_3^{(1)} = 0, \\
\frac{a_3^{(1)}\gamma^{(1)}}{a_1^{(1)}a_2^{(1)}}\Omega_3^{(1)\prime} - \frac{\beta_1\gamma_1^{(1)}}{a_2^{(1)}}\Omega_1^{(1)} - \frac{\beta_2\gamma_1^{(1)}}{a_1^{(1)}}\Omega_2^{(1)} = 0;
\end{gathered} \tag{29}$$

2) на верхней лицевой поверхности ($x_3 = z_N$)

$$\begin{gathered}
\frac{a_3^{(N)}\tau^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}V_1^{(N)\prime} - \frac{\beta_1\mu^{(N)}}{a_2^{(N)}}V_3^{(N)} + \frac{A_2^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}\Omega_2^{(N)} = 0, \\
\frac{a_3^{(N)}\tau^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}V_2^{(N)\prime} - \frac{\beta_2\mu^{(N)}}{a_1^{(N)}}V_3^{(N)} - \frac{A_1^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}\Omega_1^{(N)} = 0, \\
\frac{a_3^{(N)}\left(\xi^{(N)}+\tau^{(N)}\right)}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}V_3^{(N)\prime} + \frac{\beta_1\lambda^{(N)}}{a_2^{(N)}}V_1^{(N)} + \frac{\beta_2\lambda^{(N)}}{a_1^{(N)}}V_2^{(N)} = 0, \\
\frac{a_3^{(N)}\gamma_2^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}\Omega_1^{(N)\prime} + \frac{\beta_1\gamma_3^{(N)}}{a_2^{(N)}}\Omega_3^{(N)} = 0, \\
\frac{a_3^{(N)}\gamma_2^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}\Omega_2^{(N)\prime} + \frac{\beta_2\gamma_3^{(N)}}{a_1^{(N)}}\Omega_3^{(N)} = 0,
\end{gathered} \tag{30}$$

$$\frac{a_3^{(N)}\gamma^{(N)}}{a_1^{(N)}a_2^{(N)}}\Omega_3^{(N)\prime}-\frac{\beta_1\gamma_1^{(N)}}{a_2^{(N)}}\Omega_1^{(N)}-\frac{\beta_2\gamma_1^{(N)}}{a_1^{(N)}}\Omega_2^{(N)}=0;$$

3) на границах слоев ($x_3 = z_m$, $m = 1...N-1$)

$$\frac{a_3^{(m)}\tau^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}V_1^{(m)\prime}-\frac{\beta_1\mu^{(m)}}{a_2^{(m)}}V_3^{(m)}+\frac{A_2^{(m)}\Omega_2^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}-$$
$$-\frac{a_3^{(m+1)}\tau^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}V_1^{(m+1)\prime}+\frac{\beta_1\mu^{(m+1)}}{a_2^{(m+1)}}V_3^{(m+1)}-\frac{A_2^{(m+1)}\Omega_2^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}=0,$$

$$\frac{a_3^{(m)}\tau^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}V_2^{(m)\prime}-\frac{\beta_2\mu^{(m)}}{a_1^{(m)}}V_3^{(m)}-\frac{A_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}-$$
$$-\frac{a_3^{(m+1)}\tau^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}V_2^{(m+1)\prime}+\frac{\beta_2\mu^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}}V_3^{(m+1)}+\frac{A_1^{(m+1)}\Omega_1^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}=0,$$

$$\frac{\beta_1\lambda^{(m)}}{a_2^{(m)}}V_1^{(m)}+\frac{\beta_2\lambda^{(m)}}{a_1^{(m)}}V_2^{(m)}-$$
$$-\frac{\beta_1\lambda^{(m+1)}}{a_2^{(m+1)}}V_1^{(m+1)}-\frac{\beta_2\lambda^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}}V_2^{(m+1)}+$$
$$+\frac{a_3^{(m)}\left(\xi^{(m)}+\tau^{(m)}\right)}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}V_3^{(m)\prime}-$$
$$-\frac{a_3^{(m+1)}\left(\xi^{(m+1)}+\tau^{(m+1)}\right)}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}V_3^{(m+1)\prime}=0,$$

$$\frac{a_3^{(m)}\gamma_2^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}\Omega_1^{(m)\prime}+\frac{\beta_1\gamma_3^{(m)}}{a_2^{(m)}}\Omega_3^{(m)}-$$
$$-\frac{a_3^{(m+1)}\gamma_2^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}\Omega_1^{(m+1)\prime}-\frac{\beta_1\gamma_3^{(m+1)}}{a_2^{(m+1)}}\Omega_3^{(m+1)}=0, \qquad (31)$$

$$\frac{a_3^{(m)}\gamma_2^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}\Omega_2^{(m)\prime}+\frac{\beta_2\gamma_3^{(m)}}{a_1^{(m)}}\Omega_3^{(m)}-$$
$$-\frac{a_3^{(m+1)}\gamma_2^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}\Omega_2^{(m+1)\prime}-\frac{\beta_2\gamma_3^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}}\Omega_3^{(m+1)}=0,$$

$$\frac{a_3^{(m)}\gamma^{(m)}}{a_1^{(m)}a_2^{(m)}}\Omega_3^{(m)\prime}-\frac{\beta_1\gamma_1^{(m)}}{a_2^{(m)}}\Omega_1^{(m)}-$$
$$-\frac{\beta_2\gamma_1^{(m)}}{a_1^{(m)}}\Omega_2^{(m)}-\frac{a_3^{(m+1)}\gamma^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}a_2^{(m+1)}}\Omega_3^{(m+1)\prime}+$$
$$+\frac{\beta_1\gamma_1^{(m+1)}}{a_2^{(m+1)}}\Omega_1^{(m+1)}+\frac{\beta_2\gamma_1^{(m+1)}}{a_1^{(m+1)}}\Omega_2^{(m+1)}=0,$$

$$V_1^{(m)}=V_1^{(m+1)},\quad V_2^{(m)}=V_2^{(m+1)},\quad V_3^{(m)}=V_3^{(m+1)},$$
$$\Omega_1^{(m)}=\Omega_1^{(m+1)},\quad \Omega_2^{(m)}=\Omega_2^{(m+1)},\quad \Omega_3^{(m)}=\Omega_3^{(m+1)}.$$

Таким образом, исследование устойчивости прямоугольной N-слойной микрополярной плиты с преднапряженными слоями сводится к решению линейной однородной краевой задачи (28)–(31) для системы $6N$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках бифуркационного подхода рассмотрена проблема устойчивости многослойных микрополярных плит с внутренними напряжениями, обусловленными предварительными деформациями их слоев. Для модели физически-линейного материала (4) получена система линеаризованных уравнений равновесия, описывающая поведение данных плит в возмущенном состоянии. Используя специальную подстановку, исследование устойчивости многослойных плит сведено к решению линейной однородной краевой задачи (28)–(31) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (грант 19-48-230042-р_а) и в рамках реализации государственного задания ЮНЦ РАН, номер госрегистрации 122020100343-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. Cosserat E., Cosserat F. 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A, Hermann et Fils: 242 p.
2. Eringen A.C. 1999. *Microcontinuum Field Theory. I. Foundations and Solids*. New York, Springer: 348 p.
3. Kafadar C.B., Eringen A.C. 1971. Micropolar media – I. The classical theory. *International Journal of Engineering Science*. 9(3): 271–305. doi: 10.1016/0020-7225(71)90040-1
4. Maugin G.A. 1998. On the structure of the theory of polar elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 356: 1367–1395. doi: 10.1098/rsta.1998.0226
5. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(2): 85–112. doi: 10.1007/BF00253050
6. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. 2010. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*. 80: 73–92. doi: 10.1007/s00419-009-0365-3

7. Lurie A.I. 1990. *Non-linear theory of elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.

8. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies*. Berlin, Springer: 205 p.

9. Zubov L.M. 2016. Universal deformations of micropolar isotropic elastic solids. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(2): 152–167. doi: 10.1177/1081286515577036

10. Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A. 2009. On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 46: 774–787. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.09.027

11. Eremeyev V.A., Zubov L.M. 1994. On the stability of elastic bodies with couple-stresses. *Mechanics of Solids*. 29(3): 172–181.

12. Lakes R. 1995. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: *Continuum models for materials with micro-structure*. New York, Wiley: 1–22.

13. Truesdell C. 1977. *A first course in rational continuum mechanics*. New York, Academic Press: 280 p.

14. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. 2012. Material symmetry group of the non-linear polar-elastic continuum. *International Journal of Solids and Structures*. 49(14): 1993–2005. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.04.007

15. Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W. 2016. Material symmetry group and constitutive equations of micropolar anisotropic elastic solids. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 21(2): 210–221. doi: 10.1177/1081286515582862

16. Levin V.A. 2017. Equilibrium of micropolar bodies with predeformed regions. The superposition of large deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(3): 223–227. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.014

17. Sheydakov D.N. 2021. Stability of circular micropolar rod with prestressed two-layer coating. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 33: 1313–1329. doi: 10.1007/s00161-020-00968-z

18. Sheydakov D.N. 2011. On stability of elastic rectangular sandwich plate subject to biaxial compression. In: *Advanced Structured Materials. Vol. 15. Shell-like Structures – Non-classical Theories and Applications*. Berlin, Springer-Verlag: 203–216. doi: 10.1007/978-3-642-21855-2_15

Поступила 21.07.2022