НАУКА ЮГА РОССИИ 2023 Т. 19 № 2 С. 3–5
SCIENCE IN THE SOUTH OF RUSSIA 2023 VOL. 19 No 2 P. 3–5

МЕХАНИКА

УДК 539.3
DOI: 10.7868/S25000640230201

ПОСТРОЕНИЕ ВЫСОКОТОЧНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА – ХОПФА НА ОТРЕЗКЕ

© 2023 г. О.В. Евдокимова[1], академик В.А. Бабешко[1, 2], А.В. Павлова[2]

Аннотация. Предложен новый, достаточно простой и в то же время высокоточный метод решения интегральных уравнений Винера – Хопфа на конечном отрезке. Ранее при решении этих уравнений не удавалось построить единое решение, справедливое для всех размеров отрезка. Для больших и малых относительных отрезков были построены различные асимптотические и приближенные методы, что затрудняет оперативность исследования. В настоящей работе на основе проекционных и факторизационных методов, в том числе развитых авторами, предложен подход, позволяющий строить одно решение для всех относительных размеров отрезка задания интегрального уравнения. Тип свойств ядер интегральных уравнений, для которых этот метод применим, указан в статье.

Ключевые слова: интегральное уравнение Винера – Хопфа, метод фиктивного поглощения, проекционный метод.

CONSTRUCTION OF A HIGH-PRECISION APPROXIMATE SOLUTION INTEGRAL WIENER-HOPF EQUATION ON THE SEGMENT

O.V. Evdokimova[1], Academician RAS V.A. Babeshko[1, 2], A.V. Pavlova[2]

Abstract. A new rather simple and, at the same time, high-precision method for solving Wiener-Hopf integral equations on a finite segment is proposed. Previously, when solving these equations, it was not possible to construct a single solution that is valid for all segment sizes. Various asymptotic and approximate methods have been constructed for large and small relative segments, which complicates the efficiency of the study. In this paper, on the basis of projection and factorization methods, including those developed by the authors, an approach is proposed that allows constructing a single solution for all relative sizes of the segment of the integral equation assignment. The type of properties of the kernels of integral equations for which this method is applicable is indicated in the article.

Keywords: Wiener-Hopf integral equation, fictitious absorption method, projection method.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих важных в инженерной практике задач теории прочности, разрушения, акустики, теории трещин, элементной базы электроники, сейсмологии встает проблема оперативного использования решений интегральных уравнений Винера – Хопфа. Они требуются как для больших, так и для малых относительных отрезков задания интегральных уравнений. В работах [1–7] даны достаточно полные обзоры многочисленных работ в этой области. В настоящей статье излагается метод построения высокоточного решения интегрального уравнения Винера – Хопфа, опирающегося на ряд результатов, полученных в этой области.

[1] Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: ras@ssc-ras.ru, babeshko41@mail.ru

[2] Кубанский государственный университет (Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation), Российская Федерация, 350059, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, e-mail: rector@kubsu.ru

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Будем рассматривать интегральное уравнение Винера – Хопфа, заданное на отрезке вида [1]:

$$\int_{-B}^{B} k(x-s)q(s)dxs = f(x), \quad |x| \le B,$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \tag{1}$$

$$\mathrm{K}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1+O(\alpha^{-\tau})), \quad |\alpha| \to \infty, \quad \tau > 0.$$

Функция $\mathrm{K}(\alpha)$ в (1) является четной, мероморфной в комплексной плоскости. Более детально ее свойства, в частности вопросы разрешимости и единственности, описаны в работе [1]. Считаем, что уравнение однозначно разрешимо в некотором банаховом пространстве. Важное место при построении приближенного решения этого уравнения имеет доказанная в работе [8] теорема, которая будет использоваться.

Теорема [8]. Пусть имеются два интегральных уравнения:

$$\mathbf{K}_1 q_1 = \int_{-B}^{B} k_1(x-s)q_1(s,a)ds = f(x), \tag{2}$$

$$\mathbf{K}_2 q_2 = \int_{-B}^{B} k_2(x-s)q_2(s,a)ds = f(x),$$

$$k_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mathrm{K}_n(u)e^{-iux}du, \quad n = 1,2. \tag{3}$$

Пусть для ядер интегральных уравнений справедлива оценка:

$$|\mathrm{K}_1(u) - \mathrm{K}_2(u)|\left|1+u^2\right|^{0,5(1+\delta)} < \frac{4\varepsilon}{2(\delta_1-\delta)r-1},$$

$$u \in \Gamma, \quad \delta_1 > \delta > 0{,}5, \quad r > r_0 = 2(\delta_1 - \delta), \quad r > r_0 > 1.$$

Тогда решения интегральных уравнений близки в следующем смысле:

$$\max|q_1(x) - q_2(x)|\sqrt{B^2-x^2} < M\varepsilon, \quad |x| \le B.$$

Постоянная M не зависит от ε.

Здесь контур Γ совпадает с вещественной осью в статических контактных задачах и отклоняется от нее лишь в небольших окрестностях, обходя вещественные полюсы, в динамических задачах.

Способ построения приближения ядер рациональными функциями с любой точностью описан в ряде работ, например в [8], и здесь не повторяется.

Применим эти результаты для построения высокоточного решения интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи, справедливого для любых конечных значений параметра B.

Для построения приближенного решения интегрального уравнения с ядром $\mathrm{K}_2(u)$ возьмем в качестве исходного интегральное уравнение [9] с ядром $\mathrm{K}_1(u)$, записанное в следующем виде:

$$\int_{-B}^{B} k_1(x-s)q(s,B)ds = f(x),$$

$$k_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mathrm{K}_1(u)e^{-iux}du,$$

$$\mathrm{K}_1(u) = \frac{\mathrm{sh}u}{u\,\mathrm{ch}u}.$$

Его точное решение $q_0(s,B)$ для любых конечных B и для $f(x) = 1$ построено в работе [9] и имеет вид:

$$q_0(s,B) = \frac{1}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}B)\sqrt{2\mathrm{ch}B - 2\mathrm{ch}s}}.$$

Здесь $Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}B)$ – функция Лежандра.

Для построения решения этого интегрального уравнения для произвольной, один раз дифференцируемой функции $f(x)$ справедлива формула М.Г. Крейна [9], свободная от применения сингулярного интеграла:

$$q_1(s,B) = \frac{1}{2M'(B)}\left[\frac{d}{dB}\int_{-B}^{B} q_0(s,B)f(s)ds\right]q_0(x,B) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{|x|}^{B} q_0(x,\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)} \times \frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} q_0(s,\xi)f(s)ds\right]d\xi -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{B}\frac{q_0(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} q_0(s,\xi)df(s)\right]d\xi, \quad |x| < B.$$

Таким образом, достаточно осуществить построение приближенного решения интегрального уравнения для случая $f(x) = 1$, чтобы получить решение для случая произвольной функции $f(x)$.

В результате выполнения построения приближенного решения для уравнения (3) будет построена функция $\mathrm{K}_2(u)$ вида $\mathrm{K}_2(u) = \mathrm{K}_1(u)\Pi(u)$.

Здесь $\Pi(u)$ – рациональная функция, имеющая конечное число нулей и полюсов. Построив функцию $\mathrm{K}_2(u)$, которая равна $\mathrm{K}_1(u)\Pi(u)$, и применив к ней метод фиктивного поглощения, детально изложенный в работе [8], построим высокоточное приближенное решение интегрального уравнения (3) с этим ядром, справедливое для всех конечных значений параметра B.

Алгоритм метода фиктивного поглощения состоит в следующем [8]. Пусть имеются два интегральных уравнения (2) и (3) со свойствами ядер

$$\mathrm{K}_2(u)=\mathrm{K}_1(u)\Pi(u),$$
$$\Pi(u)=\prod_{m=1}^{M}\frac{u-z_m}{u-\xi_m},$$
$$M<\infty.$$

Пусть известен обратный оператор $\mathbf{K}_1^{-1}$. Тогда решение интегрального уравнения (3) дается формулой

$$q_2=\mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u)\mathbf{V}\left[\mathbf{K}_1^{-1}f-\mathbf{K}_1^{-1}\varphi\right]+\varphi.$$

Здесь вводимая функция φ имеет носитель на отрезке $[-B,\ B]$ и содержит M неизвестных постоянных. Метод фиктивного поглощения позволяет путем решения конечной системы алгебраических уравнений для определения M постоянных строить точные решения интегральных уравнений с ядрами, преобразования Фурье которых отличаются множителем на рациональную функцию $\Pi(u)$. В рассматриваемом случае решение имеет вид:

$$q_2(s,B)=\frac{n(s,B)}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}B)\sqrt{2\mathrm{ch}B-2\mathrm{ch}s}}.$$

Функция $n(s,B)$ непрерывна на отрезке $[-B,\ B]$. Важно заметить, что построенное решение содержит асимптотические формулы, справедливые как для малых относительных размеров штампов, так и для больших.

Так, в случае малых относительных размеров штампов справедлива оценка $Q_{-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}B)=O(\ln B)$, $B\to 0$, свойственная малым размерам штампа [1].

ВЫВОД

Предложенный метод позволяет получать высокоточное решение интегрального уравнения Винера – Хопфа с мероморфным ядром на любом конечном отрезке.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научного проекта № МФИ-20.1/6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. 1974. *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* М., Наука: 456 с.
2. Калинчук В.В. Белянкова Т.И. 2009. *Динамика поверхности неоднородных сред.* М., Физматлит: 312 с.
3. Freund L.B. 1998. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press: 520 p.
4. Achenbach J.D. 1973. *Wave propagation in elastic solids.* Amsterdam, North-Holland: 480 p.
5. Litvinchuk G.S., Spitkoskii I.M. 1987. *Factorization of measurable matrix functions.* Basel, Boston, Birkhäuser Verlag: 372 p.
6. Нобл Б. 1962. *Метод Винера – Хопфа.* М., Издательство иностранной литературы: 280 с.
7. Brockwell P.J., Davis R.A. 2002. *Introduction to time series and forecasting.* New York, Springer: 610 p.
8. Бабешко В.А. 1984. *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости.* М., Наука: 256 с.
9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. 1967. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* М., Наука: 508 с.

REFERENCES

1. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. 1974. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti.* [*Nonclassical mixed problems of elasticity theory*]. Moscow, Nauka: 456 p. (In Russian).
2. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2009. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred.* [*Dynamics of the surface of inhomogeneous media*]. Moscow, Fizmatlit: 312 p. (In Russian).
3. Freund L.B. 1998. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press: 520 p.
4. Achenbach J.D. 1973. *Wave propagation in elastic solids.* Amsterdam, North-Holland: 480 p.
5. Litvinchuk G.S., Spitkoskii I.M. 1987. *Factorization of measurable matrix functions.* Basel, Boston, Birkhäuser Verlag: 372 p.
6. Nobl B. 1962. *Metod Vinera – Hopfa.* [*Wiener-Hopf method*]. Moscow, Foreign Languages Publishing House: 280 p. (In Russian).
7. Brockwell P.J., Davis R.A. 2002. *Introduction to time series and forecasting.* New York, Springer: 610 p.
8. Babeshko V.A. 1984. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh zadachakh teorii uprugosti.* [*Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory*]. Moscow, Nauka: 256 p. (In Russian).
9. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. 1967. *Teoriya volterrovykh operatorov v gil'bertovom prostranstve i ee prilozheniya.* [*Theory of Volterra operators in Hilbert space and its applications*]. Moscow, Nauka: 508 p. (In Russian).

Поступила 17.03.2023