

УДК 539.3  
DOI: 10.7868/S25000640180401

## МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ И ГРАДИЕНТНЫХ СРЕДАХ

© 2018 г. П.В. Сыромятников<sup>1</sup>

**Аннотация.** Предложены эффективные методы решения нестационарных краевых задач конвекции – диффузии третьего типа в многослойных полуограниченных средах типа пакета слоев с внешними или внутренними источниками излучения вещества. Скорости массопереноса, коэффициенты диффузии и распада вещества являются постоянными величинами для каждого слоя, функция источника может иметь произвольную зависимость от времени. Численно-аналитическое представление решения двумерных и трехмерных краевых задач получено с помощью интегральных преобразований Фурье – Лапласа. Приведен матричный рекуррентный алгоритм построения символа Фурье – Лапласа функции Грина нестационарной краевой задачи, основанный на идеях матриц переноса для соответствующей стационарной задачи. Матрицы переноса в случае процессов конвекции – диффузии имеют малую размерность и могут быть выражены явно, что позволяет рассматривать среды с большим числом слоев, ограниченным только ресурсами компьютера. Градиентные среды, все или некоторые параметры которых зависят от одной (вертикальной) координаты, могут быть достаточно точно аппроксимированы многослойной средой с кусочно-постоянными коэффициентами. Предложен метод численного обращения интегралов Фурье – Лапласа с помощью адаптивных алгоритмов интегрирования быстро осциллирующих функций, основанных на многоточечных методах Гаусса и Кронрода. Приведен пример решения модельной нестационарной краевой задачи для больших интервалов времени. Разработанные алгоритмы представляют интерес в решении прямых и обратных задач конвекции – диффузии, конвективно-диффузионного тепло- и массообмена в газообразных и жидких многослойных и градиентных средах, моделирования климата.

**Ключевые слова:** нестационарная конвекция – диффузия, преобразования Фурье – Лапласа, матрица переноса, многослойные среды.

### A MATRIX METHOD FOR SOLVING NON-STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS IN SEMIBOUNDED MULTILAYER AND GRADIENT MEDIA

P.V. Syromyatnikov<sup>1</sup>

**Abstract.** Effective methods for solving non stationary boundary-value convection-diffusion problems in multilayer semi bounded media are proposed. We consider boundary value problems of the third type for a packet of layers with external or internal radiation sources of matter. Mass transfer rates, diffusion and decay coefficients of a substance are constant values for each layer. The source function can have an arbitrary time dependence. A numerical-analytical representation of the solution of boundary value problems was obtained by means of integral Fourier-Laplace transforms. A matrix recurrence algorithm for constructing the Fourier-Laplace symbol of the Green's function is given. This algorithm is based on the ideas of transfer matrices for the corresponding stationary problem. In the case of convection-diffusion processes, the transfer matrices have a small dimension and can be expressed explicitly. This circumstance allows us to consider media with

<sup>1</sup> Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН (Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru

a very large number of layers. Gradient media, in which all or some parameters depend on one coordinate, can be approximated sufficiently accurately by a multilayer medium with piecewise constant coefficients. A method for the numerical inversion of Fourier-Laplace integrals using adaptive algorithms for integrating rapidly oscillating functions based on Gauss and Kronrod multipoint methods is proposed. An example of a solution of a non stationary boundary value problem for large time intervals is given. The developed algorithms are of interest in solving direct and inverse problems of convection-diffusion, heat and mass transfer in gaseous and liquid multilayer and gradient media, and climate modeling.

**Keywords:** non stationary convection-diffusion, Fourier-Laplace integral transforms, transfer matrices, multilayer media.

## ВВЕДЕНИЕ

Решение нестационарных краевых задач конвекции – диффузии, которые являются основой многих математических моделей [1–3], по сравнению с соответствующими стационарными или гармоническими задачами [2; 3] наталкивается на дополнительные проблемы аналитического и вычислительного характера. Рассматриваемые далее уравнения интерпретируются как описание нестационарного процесса конвективного массопереноса и турбулентной диффузии в жидких или газообразных средах, хотя допускают и другие физические толкования [1]. Обычно решение краевых задач конвекции – диффузии базируется на методах конечных разностей или конечных элементов [1]. Теория разностных методов решения задач математической физики применительно к проблемам окружающей среды в целом хорошо развита [1]. Указанные методы весьма универсальны, однако корректно применимы только к конечным областям. В случае моделирования стационарных процессов в искусственно ограниченных областях (например при введении поглощающих границ) эти методы дают большие погрешности, чем в случае моделирования нестационарных процессов, но при этом решение нестационарных задач, как правило, требует значительных вычислительных затрат. В случае полуограниченных многослойных сред, рассматриваемых далее, решение может быть относительно просто получено с помощью интегральных преобразований Фурье [2; 3], Лапласа [4] и численного интегрирования. Приведенный ниже метод решения нестационарных задач турбулентной диффузии основан на идеях матриц переноса для соответствующих стационарных и периодических задач, для которых были разработаны простые рекуррентные матричные соотношения [3]. В случае процессов конвекции – диффузии матрицы переноса имеют малую размерность и могут быть выражены явно,

что позволяет рассматривать среды с тысячами слоев. Градиентные среды, для которых параметры уравнений зависят от одной (вертикальной) координаты, могут быть достаточно точно аппроксимированы многослойной средой с кусочно-постоянными коэффициентами. Метод численного обращения интегралов Фурье – Лапласа основан на адаптивных алгоритмах интегрирования быстро осциллирующих функций [5].

## СИМВОЛ ФУРЬЕ МАТРИЦЫ ГРИНА ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМИ И ВНЕШНИМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Пусть среда, в которой происходит конвективно-диффузионное распространение вещества, представляет собой однородные слои  $\{-\infty \leq x, y \leq +\infty\}$ ,  $z_1 = h, z_{N+1} = 0, z_{n+1} < z_n, n = 1, \dots, N, N \geq 2$ , где каждый слой имеет свои, в общем случае различные, материальные константы. Для среднemasштабного приближения нестационарное уравнение турбулентной диффузии в однородной среде имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial t} + u^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x} + v^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial y} + \\ + (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial z} + \sigma^{(n)} \varphi^{(n)} - \\ - \mu^{(n)} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial y^2} \right) - \\ - \nu^{(n)} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial z^2} = q^{(n)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\varphi^{(n)}$  – концентрация вещества в слое  $z_{n+1} \leq z \leq z_n$ ;  $t$  – время;  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  – скорости переноса в направлениях OX, OY, OZ соответственно;  $w_g^{(n)}$  – скорость вертикального оседания вещества;  $\sigma^{(n)}$  – коэффициент поглощения;  $\mu^{(n)}, \nu^{(n)}$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно;  $q^{(n)}$  – функция источника.

Ограничимся рассмотрением источников  $q^{(n)}$ , заданных в ограниченных областях  $\Omega^{(n)}$  на внешних и внутренних границах пакета слоев  $z = z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N + 1$ . В стационарном случае зависимость от времени всех членов уравнения (1.1) отсутствует и производная по времени  $\frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial t} \equiv 0$ .

Условие непрерывности среды  $\text{div} \mathbf{u}^{(n)} = 0$  для вектора скоростей  $\mathbf{u}^{(n)} = \left\{ u^{(n)}, v^{(n)}, (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \right\}^T$  в случае постоянных скоростей выполняется автоматически. При формулировке краевых задач дополнительно необходимо потребовать выполнения условия убывания функции  $\Phi^{(n)}$  на бесконечности  $\Phi^{(n)}(x, y, z) \rightarrow 0$  при  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим вначале стационарный вариант однородного уравнения (1.1). Произведем двукратное преобразование Фурье по переменным  $x, y$ . Получим в образах Фурье  $\Phi^{(n)} = F_{x,y}[\varphi^{(n)}]$  следующее уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} v^{(n)} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial z^2} - (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial z} - \\ - \theta^{(n)} \Phi^{(n)} = 0, \\ \theta^{(n)} = \mu^{(n)}(\alpha^2 + \beta^2) - \\ - i(\alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}) + \sigma^{(n)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\alpha, \beta$  – параметры преобразования Фурье по  $x$  и по  $y$  соответственно.

В каждом слое искомая функция  $\Phi^{(n)}$  представляется следующим образом:

$$\Phi^{(n)} = t_1^{(n)} \exp(\lambda_1^{(n)} z) + t_2^{(n)} \exp(\lambda_2^{(n)} z), \quad n = \overline{1, N},$$

где  $\lambda_j^{(n)}$  – корни соответствующего (1.2) характеристического многочлена

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^{(n)} = \frac{(w^{(n)} - w_g^{(n)}) \pm \tau^{(n)}}{2v^{(n)}}, \\ \tau^{(n)} = \sqrt{(w^{(n)} - w_g^{(n)})^2 + 4v^{(n)}\theta^{(n)}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а векторы  $\mathbf{t}^{(n)}$ ,  $\mathbf{t}^{(n)} = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)})^T$  подлежат определению из дополнительных условий. На внешних границах пакета краевые условия третьего типа задаются в виде:

$$\left( a_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} - b_1 \Phi^{(1)} \right) \Big|_{z=z_1} = Q^{(1)}, \quad (1.4)$$

$$\left( a_N \frac{\partial \Phi^{(N)}}{\partial z} - b_N \Phi^{(N)} \right) \Big|_{z=z_{N+1}} = Q^{(N+1)}. \quad (1.5)$$

Константы  $a_j, b_j$  характеризуют степени поглощения и отражения вещества от внешних границ. Условия на внутренних границах раздела слоев при  $q^{(n)} = 0$  непрерывны, при  $q^{(n)} \neq 0$  условия имеют разрывный вид. В случае, когда задается скачок производной  $\frac{d\Phi^{(n)}(z)}{dz}$  на уровне  $z = z_n$ , разрывные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} v^{(n-1)} \frac{d\Phi^{(n-1)}(z_n)}{dz} = v^{(n)} \frac{d\Phi^{(n)}(z_n)}{dz} + Q^{(n)}, \\ \Phi^{(n-1)}(z_n) = \Phi^{(n)}(z_n), \\ (n = 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В случае, когда задается скачок функции концентрации  $\Phi^{(n)}(z)$  на уровне  $z = z_n$ , разрывные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} v^{(n-1)} \frac{d\Phi^{(n-1)}(z_n)}{dz} = v^{(n)} \frac{d\Phi^{(n)}(z_n)}{dz}, \\ \Phi^{(n-1)}(z_n) = \Phi^{(n)}(z_n) + Q^{(n)}, \\ (n = 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.7) \quad (1.8)$$

Функции источника  $Q^{(n)} = F_{x,y}[q^{(n)}]$  в уравнениях (1.6) и (1.7) имеют, очевидно, различные размерности. Введем вектор  $\mathbf{B}^{(j)}$ , для случая разрыва производной (1.6) вектор  $\mathbf{B}^{(j)}$  имеет вид

$$\mathbf{B}^{(j)} = (1, 0)^T, \quad (1.9)$$

для случая разрыва функции концентрации (1.8)

$$\mathbf{B}^{(j)} = (0, 1)^T. \quad (1.10)$$

Из граничных условий (1.4)–(1.8) относительно векторов  $\mathbf{t}^{(n)}$  (в случае единичного источника с номером  $j$ ) получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(n-1)} = \mathbf{D}^{(n-1)} \mathbf{t}^{(n)}, \quad n = 2, 3, \dots, j - \\ - 1, j + 1, j + 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{t}^{(j-1)} = \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{t}^{(j)} + \mathbf{A}^{(j-1)} \mathbf{B}^{(j)},$$

где

$$D_{11}^{(n)} = \frac{(v^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} - v^{(n)} \lambda_2^{(n)})}{\tau^{(n)}} \times$$

$$\times \exp(z_{n+1}(-\lambda_1^{(n)} + \lambda_1^{(n+1)})),$$

$$D_{12}^{(n)} = \frac{(v^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} - v^{(n)} \lambda_2^{(n)})}{\tau^{(n)}} \times$$

$$\times \exp(z_{n+1}(-\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n+1)})),$$

$$D_{21}^{(n)} = \frac{(-v^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} + v^{(n)} \lambda_1^{(n)})}{\tau^{(n)}} \times$$

$$\times \exp(z_{n+1}(-\lambda_2^{(n)} + \lambda_1^{(n+1)})),$$

$$D_{22}^{(n)} = \frac{(-v^{(n+1)}\lambda_2^{(n+1)} + v^{(n)}\lambda_1^{(n)})}{\tau^{(n)}} \times \\ \times \exp(z_{n+1}(-\lambda_2^{(n)} + \lambda_2^{(n+1)})),$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = \frac{1}{\tau^{(j)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} \exp(-\lambda_1^{(j)}z_{j+1}) & -v^{(j)}\lambda_2^{(j)} \exp(-\lambda_1^{(j)}z_{j+1}) \\ -\exp(-\lambda_2^{(j)}z_{j+1}) & v^{(j)}\lambda_1^{(j)} \exp(-\lambda_2^{(j)}z_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{t}^{(N)} + \\ + \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(j-2)} \mathbf{A}^{(j-1)} \mathbf{B}^{(j)} = \\ = \tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} \mathbf{t}^{(N)} + \tilde{\mathbf{D}}^{(j-2)} \mathbf{A}^{(j-1)} \mathbf{B}^{(j)}.$$

В явном виде можно записать произведение  $\mathbf{V}^{(j)} = \mathbf{A}^{(j-1)} \mathbf{B}^{(j)}$ . Для случая (1.9)

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = \frac{1}{\tau^{(j)}} \begin{pmatrix} \exp(-\lambda_1^{(j)}z_{j+1}) \\ -\exp(-\lambda_2^{(j)}z_{j+1}) \end{pmatrix},$$

а для случая (1.10)

$$\mathbf{V}^{(j+1)} = \frac{1}{\tau^{(j)}} \begin{pmatrix} -v^{(j)}\lambda_2^{(j)} \exp(-\lambda_1^{(j)}z_{j+1}) \\ v^{(j)}\lambda_1^{(j)} \exp(-\lambda_2^{(j)}z_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} = \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)}, \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} \\ \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1}) \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{11}^{(i)}(z_j) = (a_i \lambda_1^{(i)} + b_i) \exp(\lambda_1^{(i)} z_j),$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{12}^{(i)}(z_j) = (a_i \lambda_2^{(i)} + b_i) \exp(\lambda_2^{(i)} z_j).$$

Теперь

$$\mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{M} \mathbf{S}^{(j)},$$

где

$$\mathbf{S}^{(j)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \tilde{\mathbf{D}}^{(j-2)} \mathbf{V}^{(j)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{2, N}.$$

Если вместо  $\mathbf{B}^{(j)}$  ( $j \neq 1, N+1$ ) задается вектор  $\mathbf{S}^{(j)}$  ( $j = 1, N+1$ ), соответствующий излучению на верхней или нижней границе пакета слоев, то для источника на верхней границе  $z = z_1$

$$\mathbf{S}^{(1)} = (1, 0)^T, \quad (1.12)$$

для источника на нижней границе  $z = z_{N+1}$

$$\mathbf{S}^{(N+1)} = (0, 1)^T. \quad (1.13)$$

Таким образом, данный алгоритм охватывает случаи задания источника излучения как на внешних границах пакета ( $j = 1, N+1$ ), так и внутрен-

них интерфейсных плоскостях ( $j = \overline{2, N}$ ). Векторы  $\mathbf{t}^{(n,j)}$ , у которых первый индекс соответствует номеру слоя, второй – номеру источника, имеют вид:

$$\mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{S}^{(j)} + \\ + \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(j-2)} \mathbf{V}^{(j)}, \quad n \leq j-2, \quad (1.14) \\ \mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{S}^{(j)} + \mathbf{V}^{(j)}, \quad n = j-1, \\ \mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{S}^{(j)}, \quad n \geq j.$$

Из формул (1.14) легко заметить, что если  $\mathbf{B}^{(j)} = 0$  (а следовательно, и  $\mathbf{V}^{(j)} = 0$ ), то формулы (1.14) соответствуют формулам для случая пакета слоев с граничным источником  $\mathbf{S}^{(j)}$  вида (1.12) или (1.13)  $\mathbf{t}^{(n,j)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{S}^{(j)}$ .

Для символа Фурье функции Грина  $K^{(n,j)}$  имеем представление:

$$K^{(n,j)}(z) = t_1^{(n,j)} \exp(\lambda_1^{(n)} z) + t_2^{(n,j)} \exp(\lambda_2^{(n)} z), \\ z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N+1}. \quad (1.15)$$

Первый индекс в  $K^{(n,j)}$  обозначает номер слоя, для которого представлено решение, второй индекс соответствует номеру интерфейсной плоскости  $z = z_j$ , в которой действует источник  $Q^{(j)}$ . Символ функции концентрации  $\Phi^{(n)}$  выражается через символ функции Грина  $K^{(n,j)}$  и символ функции (единственного) источника  $Q^{(j)}$ , ( $j = \overline{1, N+1}$ ) следующим образом:

$$\Phi^{(n)}(z) = K^{(n,j)}(z) Q^{(j)}, \quad z_{n+1} \leq z \leq z_n, \\ n = \overline{1, N}. \quad (1.16)$$

В том случае, если заданы все или несколько нагрузок  $Q^{(j)} \neq 0$ , то формула (1.16) приобретает более общий вид:

$$\Phi^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^{N+1} K^{(n,j)}(z) Q^{(j)}, \quad (1.17) \\ z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad n = \overline{1, N}.$$

При этом каждая из функций  $K^{(n,j)}$  строится по единому алгоритму (1.11)–(1.14). Решение исходной задачи может быть получено обратным преобразованием Фурье  $\varphi^{(n)} = F_{\alpha, \beta}^{-1} [\Phi^{(n)}]$ .

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИСТОЧНИК

Если функция  $\varphi(t)$  непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, и, кроме того, существуют постоянные  $M > 0$  и  $\xi_0 > 0$ , такие, что  $|\varphi(t)| < M \exp(\xi_0 t)$  для всех  $t$ , то при этих предпо-

ложениях существует интеграл

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \varphi(t) \exp(-pt) dt = L[\varphi], \quad (2.1)$$

при всех  $p$ , для которых  $\text{Re } p > \xi_0$  [4]. В полуплоскости  $\text{Re } p > \xi_0$  функция  $\bar{\varphi} = L[\varphi]$  является аналитической и называется преобразованием Лапласа функции  $\varphi(t)$ . Оригинал функции  $\varphi(t)$  по известному образу Лапласа  $\bar{\varphi}(p)$  может быть определен с помощью обратного преобразования Лапласа [4]:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{\varphi}(p) \exp(pt) dp = L^{-1}[\bar{\varphi}].$$

Здесь  $\gamma$  выбирается такой, что в комплексной плоскости  $p$  контур интегрирования лежит правее всех особых точек  $\bar{\varphi}(p)$ . Принимая все начальные условия нулевыми, после применения к уравнениям (1.1) прямого преобразования Лапласа (2.1) получаем

$$\begin{aligned} & u^{(n)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial x} + v^{(n)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial y} + \\ & + (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial z} + \\ & + \bar{\varphi}^{(n)} (\sigma^{(n)} + p) = \\ & = \mu^{(n)} \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial y^2} \right) + \\ & + v^{(n)} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^{(n)}}{\partial z^2} + \bar{q}^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\bar{\varphi}^{(n)}(p) = L[\varphi^{(n)}], \quad \bar{q}^{(n)}(p) = L[q^{(n)}].$$

Далее, обозначим через функцию  $\bar{\Phi}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p)$  преобразование Фурье – Лапласа функции  $\varphi^{(n)}(x, y, z, t)$ . Запишем для  $\bar{\Phi}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p)$  соответствующее (2.2) уравнение:

$$\begin{aligned} & v^{(n)} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(n)}}{\partial z^2} - (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \bar{\Phi}^{(n)}}{\partial z} - \\ & - \bar{\Phi}^{(n)} (\mu^{(n)} (\alpha^2 + \beta^2) - i(\alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}) + \\ & + (\sigma^{(n)} + p)) = - \bar{Q}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соответствующее (2.3) однородное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & v^{(n)} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(n)}}{\partial z^2} - (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \bar{\Phi}^{(n)}}{\partial z} - \\ & - \bar{\Phi}^{(n)} (\mu^{(n)} (\alpha^2 + \beta^2) - \\ & - i(\alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}) + \\ & + (\sigma^{(n)} + p)) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Корни характеристического многочлена для уравнения (2.4)

$$\bar{\lambda}_{1,2}^{(n)} = \frac{(w^{(n)} - w_g^{(n)}) \pm \bar{\tau}^{(n)}}{2v^{(n)}}, \quad (2.5)$$

$$\bar{\tau}^{(n)} = \sqrt{(w^{(n)} - w_g^{(n)})^2 + 4v^{(n)} \bar{\theta}^{(n)}},$$

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}^{(n)} = \mu^{(n)} (\alpha^2 + \beta^2) - \\ & - i(\alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}) + (\sigma^{(n)} + p). \end{aligned}$$

Отличие  $\bar{\lambda}_j^{(n)}$  (2.5) от стационарного случая (1.3), очевидно, состоит только в замене  $\sigma^{(n)}$  на  $(\sigma^{(n)} + p)$  в формулах для  $\bar{\tau}^{(n)}$ ,  $\bar{\theta}^{(n)}$ . Пусть  $\bar{\Phi}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p)$  является символом Фурье – Лапласа решения краевой нестационарной задачи, аналогичной (1.4)–(1.8). Тогда функция  $\bar{\Phi}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p)$  может быть представлена через соответствующие символы Фурье – Лапласа функций Грина  $\bar{K}^{(n,j)}(\alpha, \beta, z, p)$  и источников  $\bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, p)$  аналогично (1.17):

$$\bar{\Phi}^{(n)}(\alpha, \beta, z, p) = \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, \beta, z, p) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, p).$$

Если функция источника  $q^{(j)}$  может быть представлена в виде произведения

$$q^{(j)}(x, y, t) = q^{(j)}(x, y) g^{(j)}(t),$$

то при нулевых начальных условиях символ функции источника в образах Фурье – Лапласа будет иметь вид:

$$\bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, p) = Q^{(j)}(\alpha, \beta) \bar{g}^{(j)}(p),$$

где  $\bar{g}^{(j)}(p) = L[g^{(j)}]$ .

Для пространственного случая оригинал решения имеет следующее интегральное представление:

$$\varphi^{(n)}(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3 i} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, \beta, z, p) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, p) \times \\ & \times \exp(-i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta \exp(pt) dp. \end{aligned}$$

Для плоского случая возможно использование соответствующих представлений функций  $\bar{K}^{(n,j)}(\alpha, \beta, z, p)$ ,  $\bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, p)$  для трехмерной задачи, при этом необходимо положить  $\beta = 0$ , тогда

$$\varphi^{(n)}(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, 0, z, p) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, 0, p) \times \\ & \times \exp(-i(\alpha x)) d\alpha \exp(pt) dp. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введем новую переменную  $s = -i(p - \gamma)$ ,  $p = \gamma + is$ . Очевидно, что  $dp = ids$ . Теперь в пространственном случае

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, y, z, t) &= \frac{1}{8\pi^3} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, \beta, z, \gamma + is) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma + is) \times (2.7) \\ &\times \exp(-i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta \exp((\gamma + is)t) ds. \end{aligned}$$

Соответственно, для плоского случая

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, 0, z, \gamma + is) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, 0, \gamma + is) \times (2.8) \\ &\times \exp(-i(\alpha x)) d\alpha \exp((\gamma + is)t) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим плоский случай (2.8) и запишем двойной интеграл в виде повторного:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(\alpha, z, \gamma + is) \bar{Q}^{(j)}(\alpha, \gamma + is) \times (2.9) \\ &\times \exp(\gamma t) \exp(-i(\alpha x - st)) d\alpha. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в формулах (2.7), (2.8) переменные  $\alpha$ ,  $s$  принимают только вещественные значения. Запишем интеграл (2.9) в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, z, t) &= \frac{\exp(\gamma t)}{4\pi^2} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \bar{K}^{(n,j)}(r, \psi, z, \gamma) \times \bar{Q}^{(j)}(r, \psi, \gamma) \times (2.10) \\ &\times r \exp(-ir(x \cos \psi - t \sin \psi)) dr, \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{\alpha^2 + s^2}$ ,  $\psi = \arctg(s / \alpha)$ ,  $\alpha = r \cos \psi$ ,  $s = r \sin \psi$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 \leq t$ .

Здесь  $\gamma > 0$ , поскольку все полюса функций  $\bar{K}(r, z, \psi, \gamma)$  лежат на мнимой оси плоскости  $p$  [2]. Представление решения трехмерной задачи (2.7) также можно записать в виде повторных интегралов в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x, y, z, t) &= \frac{\exp(\gamma t)}{8\pi^3} \times \\ &\times \int_0^\pi d\eta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{+\infty} \bar{K}(r, \psi, z, \eta, \gamma) \bar{Q}(r, \psi, \eta) \times (2.11) \\ &\times r^2 \sin \eta \exp(-ir(x \cos \psi \sin \eta + \\ &+ y \sin \psi \sin \eta - t \cos \eta)) dr, \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{\hat{\alpha}^2 + \hat{\alpha}^2 + s^2}$ ,  $\alpha = r \cos \psi \sin \eta$ ,  $\beta = r \sin \psi \sin \eta$ ,  $s = r \cos \eta$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq +\infty$ .

Интегральное представление решения  $\varphi^{(n)}$  в полярных или сферических координатах (2.10), (2.11) в вычислительном отношении оказывается в некоторых случаях более предпочтительным.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим в качестве численного примера плоскую нестационарную задачу для двухслойного пакета с внутренним источником. Решение плоской нестационарной задачи (см. (2.6), (2.8), (2.9), (2.10)) будет выражено через представление решения для пространственной стационарной задачи с параметрами  $\beta = 0$ ,  $\sigma^{(n)} \rightarrow (\sigma^{(n)} + p)$ , что позволяет без модификаций использовать общие формулы, полученные выше. Пусть функции  $\varphi^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$ , удовлетворяют однородным уравнениям внутри слоя

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial t} + u^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x} + \\ &+ (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial z} + \\ &+ \varphi^{(n)} \sigma^{(n)} - \mu^{(n)} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial x^2} - \\ &- \nu^{(n)} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

разрывным граничным условиям

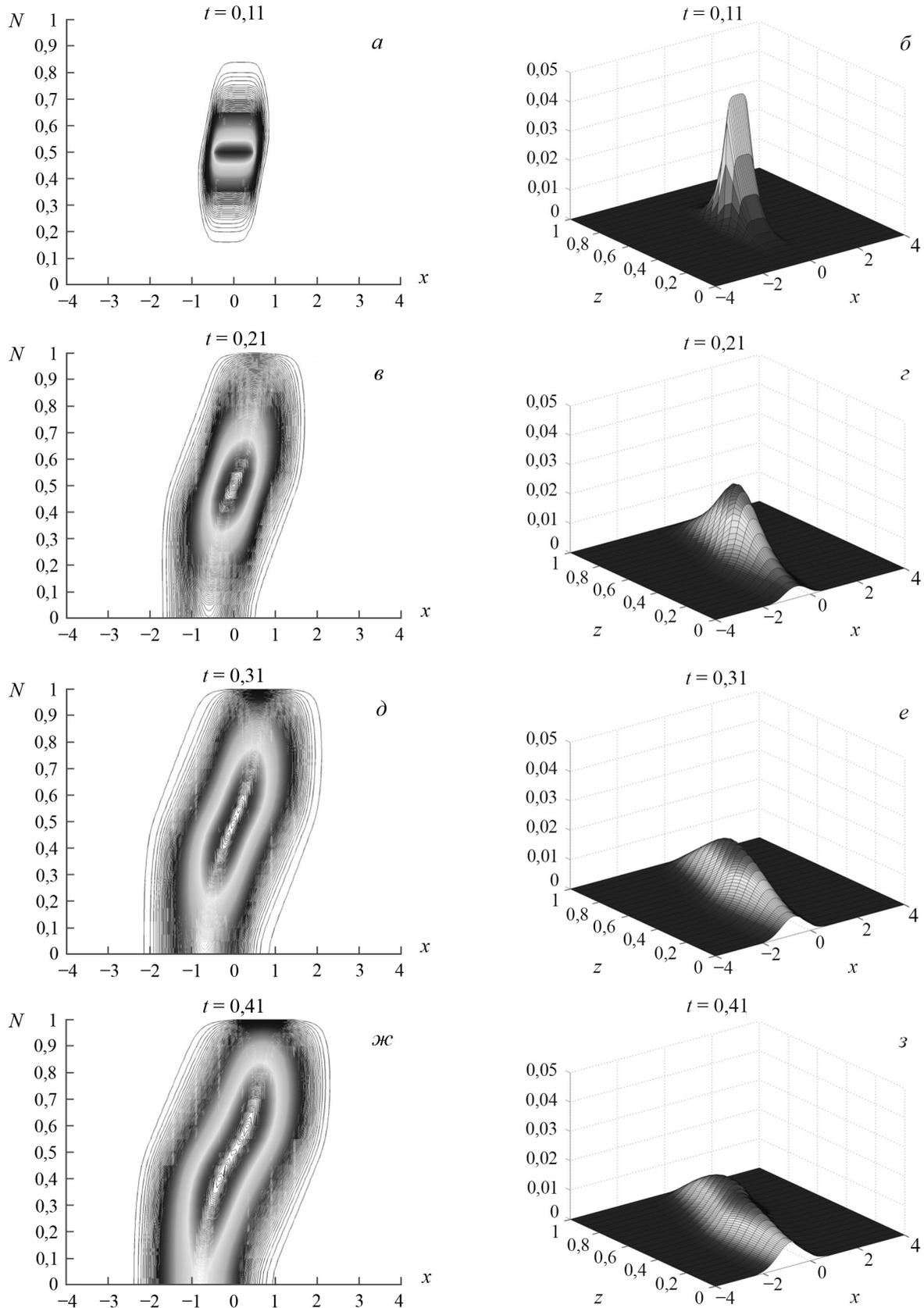
$$\varphi^{(1)}(x, z, t) \Big|_{z=z_1} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &v^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \\ &= v^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} + \\ &+ q^{(2)}(x) g^{(2)}(t), \quad (x) \in \Omega^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

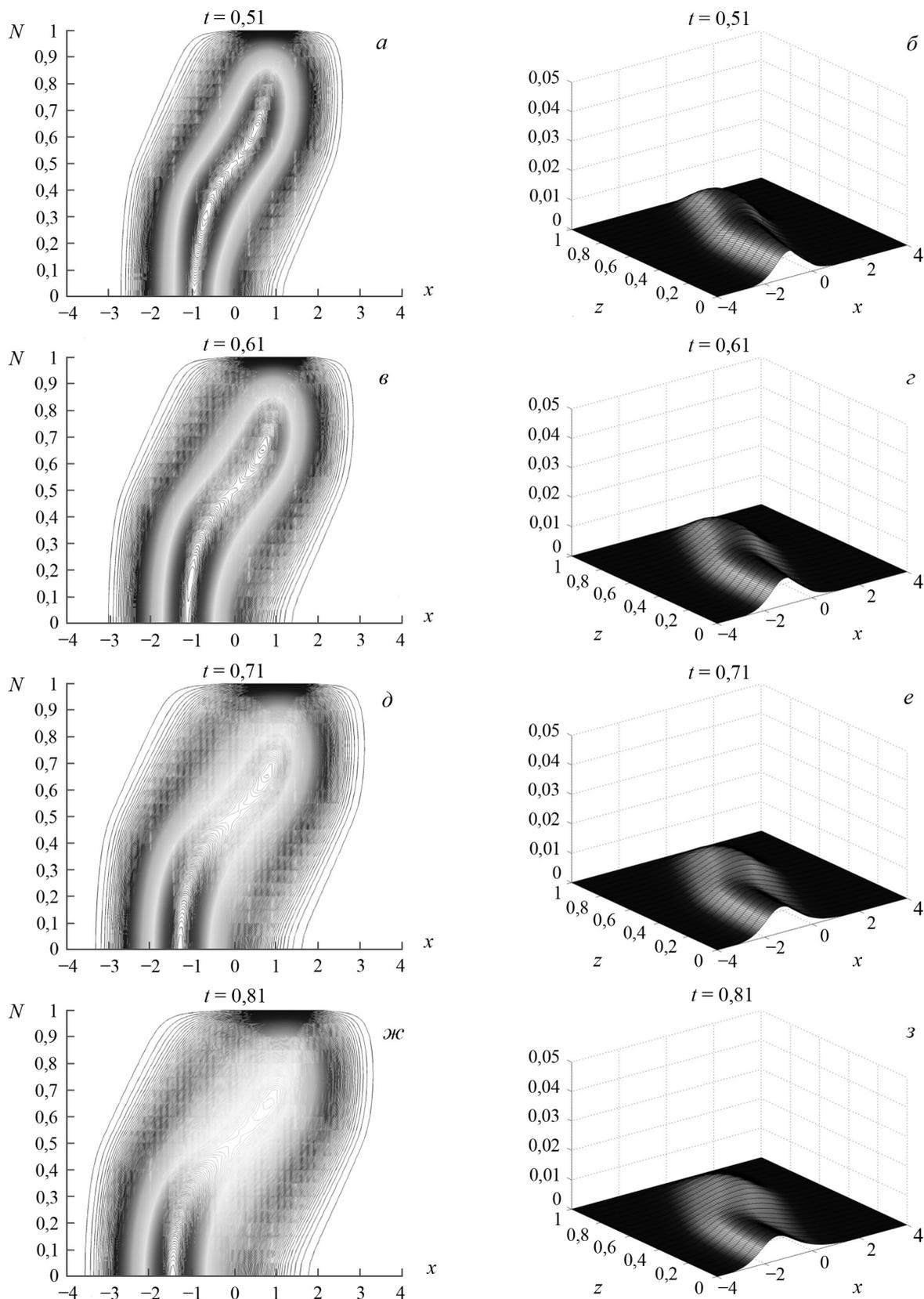
$$\begin{aligned} &v^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \\ &= v^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_2}, \quad (x) \notin \Omega^{(2)}, \\ &\frac{\partial \varphi^{(2)}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_3} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и начальным условиям

$$\varphi^{(n)}(x, z, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad g^{(2)}(t) \Big|_{t \leq 0} = 0. \quad (3.5)$$



**Рис. 1.** Вид функции концентрации  $\varphi(x, z, t)$  в зависимости от времени в интервале времени  $0,11 \leq t \leq 0,41$ : а, б –  $t = 0,11$ ; в, з –  $t = 0,21$ ; д, е –  $t = 0,31$ ; ж, з –  $t = 0,41$ .  
**Fig. 1.** The function of concentration  $\varphi(x, z, t)$  as a function of time in the time interval  $0,11 \leq t \leq 0,41$ : а, б –  $t = 0,11$ ; в, з –  $t = 0,21$ ; д, е –  $t = 0,31$ ; ж, з –  $t = 0,41$ .



**Рис. 2.** Вид функции концентрации  $\varphi(x, z, t)$  в зависимости от времени в интервале времени  $0.51 \leq t \leq 0.81$ : *a, б* –  $t = 0.51$ ; *в, з* –  $t = 0.61$ ; *д, е* –  $t = 0.71$ ; *ж, з* –  $t = 0.81$ .

**Fig. 2.** The function of concentration  $\varphi(x, z, t)$  as a function of time in the time interval  $0.51 \leq t \leq 0.81$ : *a, б* –  $t = 0.51$ ; *в, з* –  $t = 0.61$ ; *д, е* –  $t = 0.71$ ; *ж, з* –  $t = 0.81$ .

Символ Фурье – Лапласа функции Грина  $\bar{K}^{(n,j)}$  задачи (3.1)–(3.5) имеет вид (1.15), представление функций  $\Phi^{(n)}$  дается формулой (1.16). При этом собственные значения  $\lambda_i^{(n)}$  (1.3) для нестационарного случая имеют вид (2.5). Векторы  $t^{(n,j)}$ , входящие в (1.15), выражаются в явном виде:

$$t_1^{(1)} = \frac{1}{D_B \tau^{(1)}} \left[ \begin{array}{l} v^{(2)}\lambda_2^{(2)}(v^{(2)}\lambda_1^{(2)} - v^{(1)}\lambda_2^{(1)}) \times \\ \times (\exp(z_2(-\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}))) \times \\ \times \left( \begin{array}{l} -\exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \\ +\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \end{array} \right) \\ + v^{(2)}\lambda_1^{(2)}(v^{(2)}\lambda_2^{(2)} - v^{(1)}\lambda_1^{(1)}) \times \\ \times (\exp(z_2(-\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)}))) \times \\ \left( \begin{array}{l} \exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) - \\ -\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) \end{array} \right) \\ + \frac{\exp(-\lambda_1^{(1)}z_2)}{\tau^{(1)}} \end{array} \right] +$$

$$t_2^{(1)} = \frac{1}{D_B \tau^{(1)}} \left[ \begin{array}{l} v^{(2)}\lambda_2^{(2)}(-v^{(2)}\lambda_1^{(2)} + v^{(1)}\lambda_1^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_2^{(1)} + \lambda_1^{(2)})) \times \\ \times \left( \begin{array}{l} -\exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \\ +\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \end{array} \right) \\ + v^{(2)}\lambda_1^{(2)}(-v^{(2)}\lambda_2^{(2)} + v^{(1)}\lambda_1^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)})) \times \\ \times \left( \begin{array}{l} \exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) - \\ -\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) \end{array} \right) \\ + \frac{\exp(-\lambda_2^{(1)}z_2)}{\tau^{(1)}} \end{array} \right] +$$

$$t_1^{(2)} = \frac{v^{(2)}\lambda_2^{(2)}}{D_B} \left( \begin{array}{l} -\exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \\ +\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_2^{(2)}z_3) \end{array} \right),$$

$$t_2^{(2)} = \frac{v^{(2)}\lambda_1^{(2)}}{D_B} \left( \begin{array}{l} \exp(\lambda_1^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) - \\ -\exp(\lambda_2^{(1)}(z_1 - z_2) + \lambda_1^{(2)}z_3) \end{array} \right),$$

$$D_B = \left[ \begin{array}{l} v^{(2)}\lambda_2^{(2)}(v^{(2)}\lambda_2^{(2)} - v^{(1)}\lambda_2^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)})) + \lambda_1^{(1)}z_1 + \lambda_2^{(2)}z_3 \\ + v^{(2)}\lambda_2^{(2)}(-v^{(2)}\lambda_1^{(2)} + v^{(1)}\lambda_1^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_2^{(1)} + \lambda_1^{(2)})) + \lambda_2^{(1)}z_1 + \lambda_2^{(2)}z_3 \\ - v^{(2)}\lambda_1^{(2)}(v^{(2)}\lambda_2^{(2)} - v^{(1)}\lambda_2^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)})) + \lambda_2^{(1)}z_1 + \lambda_1^{(2)}z_3 \\ - v^{(2)}\lambda_1^{(2)}(-v^{(2)}\lambda_2^{(2)} + v^{(1)}\lambda_1^{(1)}) \times \\ \times \exp(z_2(-\lambda_2^{(1)} + \lambda_1^{(2)})) + \lambda_2^{(1)}z_1 + \lambda_1^{(2)}z_3 \end{array} \right].$$

Возьмем в качестве модельной функции времени  $g^{(2)}(t)$  функцию «треугольника» с параметром  $\kappa > 0$ :

$$g^{(2)}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \kappa, \\ 2\kappa - t, & \kappa \leq t \leq 2\kappa, \\ 0, & 2\kappa \leq t. \end{cases} \quad (3.6)$$

Для функции  $g^{(2)}(t)$  образ Лапласа  $\bar{g}^{(2)}(p)$  имеет вид [4]:

$$\bar{g}^{(2)}(p) = \frac{(1 - \exp(-\kappa p))^2}{p^2}.$$

Возьмем функцию пространственного распределения  $q^{(2)}(x)$  простого вида:

$$q^{(2)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases},$$

$$\Omega^{(2)} = [-1/2, 1/2].$$

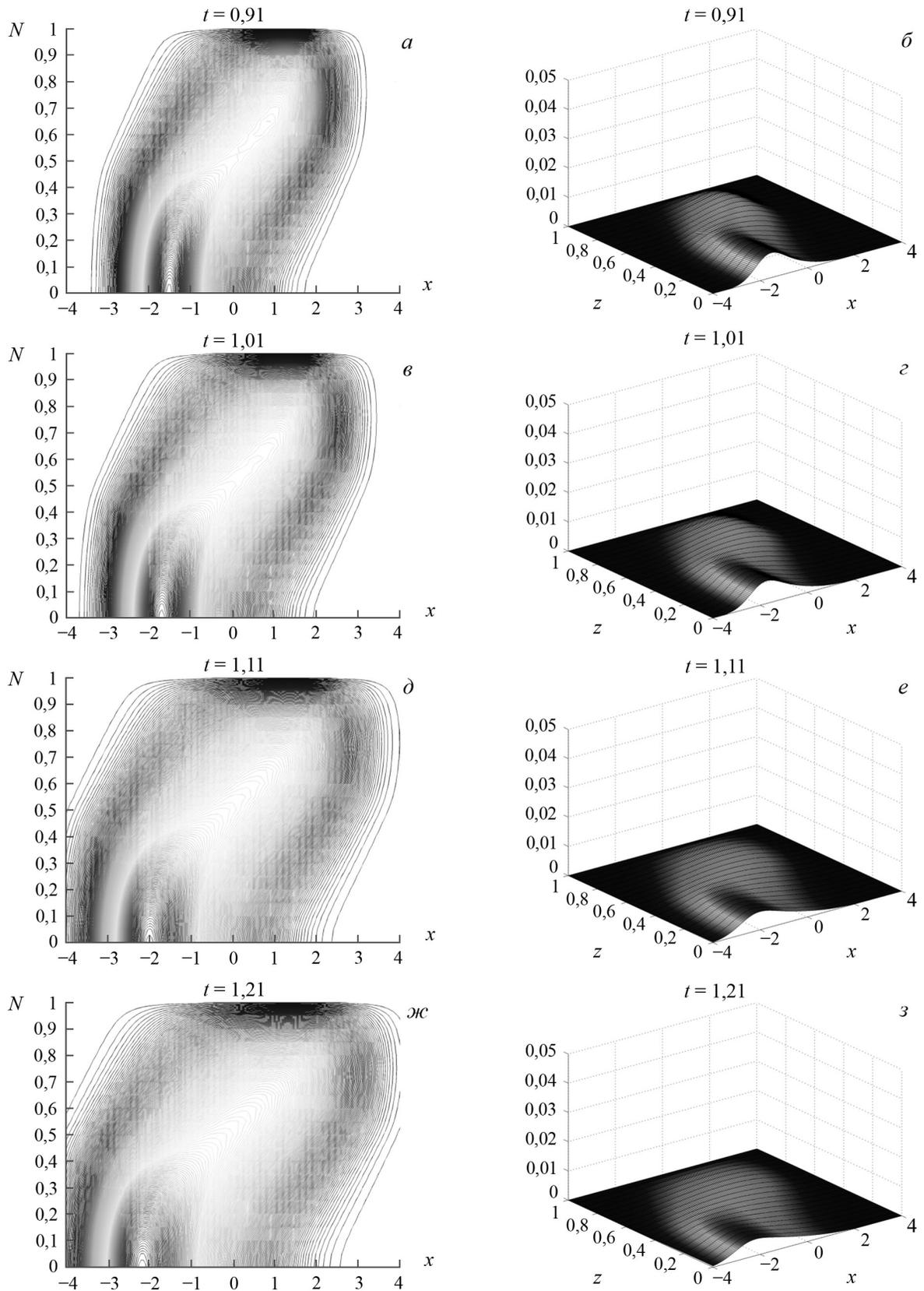
В этом случае

$$Q^{(2)}(a) = \sin(a/2) / (a/2).$$

Общее интегральное представление решения плоской нестационарной задачи, используемое при расчетах, дается формулой (2.10). Расчет интеграла (2.10) основан на применении адаптивного алгоритма интегрирования быстро осциллирующих функций D01AKF библиотеки NAG (многоточечные методы Гаусса и Кронрода) [5]. Приведем численные примеры решения задачи для следующих безразмерных параметров слоев. Первый (верхний) слой:  $w^{(1)} = 0,5, w_g^{(1)} = 0,2, u^{(1)} = 2,4, \sigma^{(1)} = 0, \mu^{(1)} = 0,1, v^{(1)} = 0,1, z_2 \leq z \leq z_1$ . Второй (нижний) слой:  $w^{(2)} = 0,2, w_g^{(2)} = 0,5, u^{(2)} = -2,4, \sigma^{(2)} = 0, \mu^{(2)} = 0,1, v^{(2)} = 0,1, z_3 \leq z \leq z_2$ . Высоты раздела:  $z_1 = 1, z_2 = 0,5, z_3 = 0$ . Параметр «треугольника» времени (3,6)  $\kappa = 0,1$ .

Как видно из описания параметров слоев, конвективный перенос в слоях имеет противоположные направления и величины:  $u^{(1)} = -u^{(2)}$ ; скорости оседания – подъема в слоях также противоположны:  $(w^{(1)} - w_g^{(1)}) = -(w^{(2)} - w_g^{(2)})$ . В верхнем слое разность  $w^{(1)} - w_g^{(1)} = 0,3$  положительна и частицы примеси поднимаются вверх, в нижнем слое разность  $w^{(2)} - w_g^{(2)} = -0,3$  отрицательна и частицы опускаются вниз (если толковать без учета диффузионных составляющих). Безразмерное время в расчетах рассматривалось в интервале  $0,01 \leq t \leq 1,21$  с шагом  $\Delta t = 0,1$ .

На рисунках 1–3 показана функция концентрации  $\phi(x, z, t)$  в прямоугольнике  $-4 \leq x \leq 4, 0 \leq z \leq 1$



**Рис. 3.** Вид функции концентрации  $\varphi(x, z, t)$  в зависимости от времени в интервале времени  $0,91 \leq t \leq 1,21$ : а, б –  $t = 0,91$ ; в, з –  $t = 1,01$ ; д, е –  $t = 1,11$ ; ж, з –  $t = 1,21$ .  
**Fig. 3.** The function of concentration  $\varphi(x, z, t)$  as a function of time in the time interval  $0,91 \leq t \leq 1,21$ : а, б –  $t = 0,91$ ; в, з –  $t = 1,01$ ; д, е –  $t = 1,11$ ; ж, з –  $t = 1,21$ .

для разных моментов времени. В правой колонке функция концентрации изображена в виде поверхности, слева – в виде линий уровней.

Из рисунка 1 видно, что максимальная амплитуда достигается к моменту времени  $t \approx 0,11$ , затем она начинает довольно быстро спадать, примесь быстро распространяется от источника вверх и вниз, несколько искривляясь.

На рисунке 2 амплитуда уменьшается примерно в 5 раз, рассеяния в верхнем и нижнем слое имеют примерно одинаковый симметричный вид. Так как граничные условия при  $z_1 = 1$  представляют собой условия полного отражения  $\varphi^{(1)}(z_1) = 0$ , а на нижней границе – условия полного поглощения  $\frac{\partial \varphi^{(2)}(z_3)}{\partial z} = 0$ , то картина распространения с течением времени теряет симметрию. Это хорошо видно на рисунке 3. В верхнем слое концентрация за счет отражения на верхней границе несколько ниже, чем концентрация на нижней поглощающей границе  $z_3 = 0$ . Средняя концентрация почти в 10 раз ниже максимальной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Вабишев П.Н. 2015. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. М., Librokom: 248 с.
2. Бабешко В.А., Павлова А.В., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. 2009. *Математическое моделирование экологических процессов распространения загрязняющих веществ*. Краснодар, Кубанский государственный университет: 138 с.
3. Сыромятников П.В. 2005. Периодическая модель распространения загрязняющих веществ в многослойной среде. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. Приложение 1: 79–86.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. 1974. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. М., Наука: 543 с.
5. D01AKF Subroutine. 2018. *The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom*. URL: <https://www.nag.com> (дата обращения: 31.08.2018).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит эффективный численно-аналитический метод построения символа Фурье – Лапласа функции Грина для нестационарных задач турбулентной диффузии для многослойных сред с внешними и внутренними источниками излучения примесей. Количество слоев может достигать нескольких тысяч и ограничено только ресурсами компьютера. Метод позволяет решать краевые задачи конвекции – диффузии для градиентных сред, все параметры которых зависят от вертикальной координаты, путем дискретизации непрерывно изменяющейся среды на большое число слоев с кусочно-постоянными параметрами. Предложенный метод численного обращения интегралов Фурье – Лапласа на основе адаптивных алгоритмов интегрирования быстро осциллирующих функций эффективен в решении прямых и обратных задач турбулентной диффузии. Приведен пример решения модельной нестационарной задачи для 12 интервалов времени.

Работа выполнена в рамках реализации госзадания ЮНЦ РАН на 2018 г., № гр. 01201354241.

## REFERENCES

1. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. 2015. *Chislennyye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii*. [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow, Librokom: 248 p. (In Russian).
2. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. 2009. *Matematicheskoe modelirovanie ekologicheskikh protsessov rasprostraneniya zagryaznyayushchikh veshchestv*. [Mathematical modeling of ecological processes of distribution of polluting substances]. Krasnodar, Kuban State University: 138 p. (In Russian).
3. Syromyatnikov P.V. 2005. [A periodic model for the spread of pollutants in a multilayered environment]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. Supplement 1: 79–86. (In Russian).
4. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. 1974. *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie*. [Integral transformations and operational calculus]. Moscow, Nauka: 543 p. (In Russian).
5. D01AKF Subroutine. 2018. *The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom*. Available at: <https://www.nag.com> (accessed 31 August 2018).

Поступила 28.08.2018