

УДК 539.3

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

© 2009 г. А.А. Зеленина¹, Л.М. Зубов²

Рассмотрены задачи кручения и изгиба упругих призматических тел, испытывающих большие деформации и содержащих элементы микроструктуры в виде непрерывно распределенных дислокаций. При помощи полуобратного метода получена двумерная нелинейная краевая задача для уравнений равновесия и уравнений несовместности. Решение этой двумерной задачи на сечении призматического бруса позволяет точно удовлетворить уравнениям трехмерной нелинейной упругости в объеме тела и граничным условиям на боковой поверхности бруса. Условия на торцах выполняются в осредненном смысле Сен-Венана. Подробно исследованы задачи кручения кругового цилиндра и чистого изгиба плоского бруса с непрерывно распределенными дислокациями. Показано, что в теле с непрерывно распределенными дислокациями могут существовать неоднородные поля поворотов при нулевых напряжениях.

Ключевые слова: большие деформации, кручение, изгиб, дислокации, непрерывное распределение эффектов, нелинейность.

1. ПЛОТНОСТЬ ДИСЛОКАЦИЙ

Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ – радиусы-векторы точки упругой среды соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях, ν – область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации, grad – оператор градиента в отсчетной конфигурации. Рассмотрим задачу об определении положения $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ точки деформированного упругого тела по заданному в области ν дифференцируемому и однозначному полю тензора дисторсии

$$\mathbf{C} = \text{grad } \mathbf{R}.$$

В случае многосвязной области ν векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$, вообще говоря, определяется неоднозначно, что означает наличие в теле трансляционных дислокаций [1, 2], каждая из которых характеризуется вектором Бюргерса

$$\mathbf{b} = \oint_{\gamma_N} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}, \quad N = 1, 2, \dots, N_0 \quad (1)$$

Здесь γ_N – простой замкнутый контур, охватывающий ось только одной N -й дислокации. Суммарный вектор Бюргерса дискретного набора из N_0 дислокаций согласно (1) определяется формулой

$$\mathbf{B} = \sum_{N=1}^{N_0} \oint_{\gamma_N} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C} = \oint_{\gamma_0} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}, \quad (2)$$

где γ_0 – контур, охватывающий линии всех N_0 дислокаций. Следуя [1, 3], перейдем от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению, считая область ν односвязной, а тензорное поле дисторсии дифференцируемым. Преобразуя интеграл в (2) по формуле Стокса, получим (rot – оператор ротора в отсчетной конфигурации):

$$\mathbf{B} = \iint_{\sigma_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot}(\mathbf{C}) d\sigma. \quad (3)$$

Здесь σ_0 – поверхность, натянутая на контур γ_0 , $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к σ_0 . Соотношение (3) позволяет ввести плотность непрерывно распределенных дислокаций α как тензор, поток которого через любую поверхность дает суммарный вектор Бюргерса дислокаций, пересекающих эту поверхность:

$$\text{rot } \mathbf{C} = \alpha. \quad (4)$$

Если тензорное поле плотности дислокаций $\alpha(\mathbf{r})$, которое должно удовлетворять условию соленоидальности

$$\text{div } \alpha = 0, \quad (5)$$

считается заданным, то уравнение (4), называемое уравнением несовместности, вместе с уравнением равновесия [4]

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad (6)$$

¹ Ростовский государственный университет путей сообщения, 344038, Ростов-на-Дону, пл. им. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, 2.; тел.: (863) 272-62-63, e-mail: a.zelenina@gmail.com.

² Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Милычакова, 8а; тел. (863) 297-51-14, e-mail: zubov@math.rsu.ru.

и определяющим соотношением материала

$$\mathbf{D} = \frac{dW(\mathbf{D})}{d\mathbf{C}} \quad (7)$$

позволяет определить тензорное поле дисторсии, а следовательно, и поле напряжений в теле. В (5)–(7) div – оператор дивергенции в геометрии недеформированного тела, $\mathbf{D}$ – несимметричный тензор напряжений Пиолы, $W(\mathbf{C})$ – удельная потенциальная энергия деформации. В (6) принято отсутствие массовых сил.

Заметим, что $\alpha \neq 0$ при векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$, а следовательно, и поле смещений $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ не существует.

Если подставить в уравнение равновесия (6) следующее из (7) выражение тензора напряжений $\mathbf{D}$ через тензор дисторсии, то уравнение несовместности (4) вместе с (6) образуют систему двенадцати скалярных уравнений с девятью неизвестными функциями – компонентами несимметричного тензора $\mathbf{C}$. Несовпадение числа неизвестных с числом уравнений можно устранить, тождественно удовлетворив уравнению (6) при помощи тензора функций напряжений Φ

$$\mathbf{D} = \text{rot } \Phi. \quad (8)$$

Предполагая, что определяющее соотношение упругого материала можно представить в виде зависимости тензора дисторсии от тензора напряжений Пиолы $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{D})$, уравнение несовместности (4) запишем при помощи (8) в терминах функций напряжений, что приводит к системе девяти скалярных уравнений с девятью неизвестными.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ТЕЛА С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Предположим, что упругое тело в отсчетной конфигурации имеет форму цилиндра (призмы) произвольного поперечного сечения. Образующие цилиндра параллельны оси x_3 , а координаты x_1, x_2 , отсчитываются в плоскости поперечного сечения. Обозначим через $X_k (k = 1, 2, 3)$ декартовы координаты деформированного тела и рассмотрим следующее двупараметрическое семейство деформаций упругой призмы [5]:

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1(x_1, x_2) \cos \psi x_3 - u_2(x_1, x_2) \sin \psi x_3, \\ X_2 &= u_2(x_1, x_2) \cos \psi x_3 + u_1(x_1, x_2) \sin \psi x_3, \\ X_3 &= \lambda x^3 + w(x_1, x_2); \quad \lambda, \psi = \text{const}. \end{aligned} \quad (9)$$

Геометрический смысл представлений (9) состоит в том, что поперечное сечение призмы, отстоя-

щее от начала координат на расстояние x_3 , испытывает некоторую плоскую деформацию, задаваемую функциями u_1, u_2 , конечный поворот вокруг оси стержня на угол ψx_3 , поступательное перемещение вдоль оси на величину $(\lambda - 1) x_3$ и деформацию, описываемую функцией w . Таким образом, постоянная ψ есть угол закручивания на единицу длины, а величина λ равна осевому относительному удлинению стержня.

На основании (9) для тензора дисторсии получаем ($\mathbf{i}_s$ – орты декартовых координат):

$$\mathbf{C}(x_1, x_2, x_3) = C_{sk}(x_1, x_2) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_k, \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \psi x_3 + \mathbf{i}_2 \sin \psi x_3, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin \psi x_3 + \mathbf{i}_2 \cos \psi x_3, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3,$$

$$C_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad C_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad C_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$C_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad C_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad C_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (11)$$

$$C_{31} = -\psi u_2, \quad C_{32} = \psi u_1, \quad C_{33} = \lambda.$$

Из (10) следует, что мера деформации Коши $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ для деформации вида (9) не зависит от координаты x_3 :

$$\mathbf{G} = C_{sm} C_{km} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k. \quad (12)$$

Если упругое тело однородно по координате x_3 , то тензор напряжений Кирхгофа

$$\mathbf{P} = 2 \frac{dW}{d\mathbf{G}}$$

будет функцией только координат x_1, x_2 . При этом материал может быть анизотропным. Из (10), (12) для тела, однородного по координате x_3 , имеем

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} = D_{sk}(x_1, x_2) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_k. \quad (13)$$

С учетом (13) уравнения равновесия (6) принимают вид

$$\frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_2} = \psi D_{32}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial D_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} = \psi D_{31},$$

$$\frac{\partial D_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{23}}{\partial x_2} = 0.$$

Учитывая (7), (11), (13), видим, что уравнения (14) представляют собой систему трех скалярных уравнений относительно трех функций двух переменных $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), w(x_1, x_2)$. Граничные условия на боковой поверхности призмы с единичной нормалью $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2$ при отсутствии поверхнос-

тной нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned} n_1 D_{11} + n_2 D_{21} &= 0, \\ n_1 D_{12} + n_2 D_{22} &= 0, \\ n_1 D_{13} + n_2 D_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, предположения (9) о характере деформации призматического бруса приводят исходную пространственную задачу нелинейной эластостатики к двумерной краевой задаче (14), (15) для сечения бруса.

При наличии в призматическом теле непрерывно распределенных дислокаций функции u_1 , u_2 , w не существуют, и при решении задачи кручения и растяжения стержня следует исходить из уравнений несовместности (4). Предположим, что тензор плотности дислокаций задан в виде

$$\alpha = \alpha_{sk}(x_1, x_2) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{e}_k = \alpha_0 \cdot \mathbf{Q}, \quad (16)$$

$$\alpha_0 = \alpha_{sk}(x_1, x_2) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k,$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3,$$

а решение уравнения (4) будем искать в форме (10)

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{C}_0 = C_{sk}(x_1, x_2) \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (4) дает

$$\text{rot } \mathbf{C}_0 - \psi \mathbf{e} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}, \quad (18)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор. Согласно (16), условие соленоидальности тензора плотности дислокаций в задаче кручения записывается так:

$$\text{div} \alpha_0 + \psi \mathbf{i}_3 \cdot \alpha_0 \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (19)$$

Последнее соотношение должно выполняться при любом значении угла закручивания ψ , откуда вытекают уравнения

$$\text{div} \alpha_0 = 0, \quad (20)$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0. \quad (21)$$

Компонентная запись уравнения несовместности (18) с учетом (21) имеет вид

$$\frac{\partial C_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{11}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial C_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial C_{33}}{\partial x_2} = \alpha_{13}, \quad \frac{\partial C_{33}}{\partial x_1} = -\alpha_{23}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial C_{31}}{\partial x_1} + \psi C_{12} = \alpha_{21}, \quad -\frac{\partial C_{32}}{\partial x_1} + \psi C_{11} = \alpha_{22},$$

$$\frac{\partial C_{31}}{\partial x_1} + \psi C_{22} = \alpha_{22}, \quad \frac{\partial C_{32}}{\partial x_2} - \psi C_{21} = \alpha_{12}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial C_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial C_{13}}{\partial x_2} = \alpha_{33},$$

а условие (20) приводит к уравнениям

$$\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{23}}{\partial x_2} = 0. \quad (26)$$

В дальнейшем положим $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$. Тогда условие (26) будет выполнено, а вследствие (23) имеем $C_{33} = \text{const} = \lambda$. Кроме того, соотношения (22) вытекают из (24) и (25). В итоге остается пять независимых уравнений несовместности (24), в которых задаваемые функции $\alpha_{\beta\gamma}(x_1, x_2)$ ($\beta, \gamma = 1, 2$) должны быть подчинены ограничениям (25).

Уравнения несовместности (24) и уравнения равновесия (14) образуют систему восьми уравнений с восемью неизвестными функциями двух переменных: $C_{m\beta}$, $C_{\beta m}$ ($\beta = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$). Краевые условия для этой системы состоят в ограничениях (15). В формулировке полученной двумерной краевой задачи на сечении бруса участвуют параметры ψ и λ . Следовательно, несмотря на отсутствие поля перемещений в призматическом теле с распределенными дислокациями, в предложенной теории сохраняются понятия угла закручивания стержня и осевого удлинения.

В частном случае, когда $\alpha = \alpha_{33} \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$, нелинейная теория кручения тела с дислокациями построена ранее [6] способом, отличающимся от изложенного выше. Аналогично [6] можно показать, что продольная сила P и крутящий момент M , действующие в каждом поперечном сечении стержня, определяются по формулам

$$P(\lambda, \psi) = \frac{\partial \Pi(\lambda, \psi)}{\partial \lambda}, \quad M(\lambda, \psi) = \frac{\partial \Pi(\lambda, \psi)}{\partial \psi},$$

$$\Pi(\lambda, \psi) = \iint_{\sigma} W[C_{mk}(x_1, x_2, \lambda, \psi)] d\sigma. \quad (27)$$

Здесь Π – функционал погонной энергии стержня, вычисленный на решении двумерной краевой задачи (14), (15), (24) для плоской области σ в форме поперечного сечения. В (27) учтено, что решение двумерной краевой задачи зависит от параметров λ и ψ .

Уравнениям равновесия (14) можно тождественно удовлетворить при помощи подстановок

$$D_{13} = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad D_{23} = -\frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \quad D_{\beta\gamma} = \Phi_{\beta\gamma}(\beta, \gamma = 1, 2), \quad (28)$$

$$D_{31} = -\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_2}, \quad D_{32} = \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_2}.$$

Пять функций напряжений χ , $\Phi_{\beta\gamma}$ остается подчинить уравнениям несовместности (24). При этом предполагается, что определяющие соотношения

материала представлены в форме зависимости тензора дисторсии от тензора напряжений Пиолы $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{D})$. Краевые условия (15) в терминах функций напряжений записываются так (s – текущая длина дуги на границе области σ):

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0, \quad n_\beta \Phi_{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2). \quad (29)$$

Использование функций напряжений позволяет дать вариационные постановки краевой задачи о кручении призматического тела с дислокациями, аналогичные полученным в [6] для частного случая винтовых дислокаций, параллельных оси стержня.

3. КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С ДИСЛОКАЦИЯМИ

Рассмотрим полый круговой цилиндр, занимающий в отсчетной конфигурации область $r_1 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq l$. Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты. Предположим, что тензор плотности дислокаций задан следующим образом:

$$\alpha = \alpha_{11}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha_{22}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha_{23}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \alpha_{32}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + \alpha_{33}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad (30)$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r \cos \psi z + \mathbf{e}_\varphi \sin \psi z,$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r \sin \psi z + \mathbf{e}_\varphi \cos \psi z, \quad \psi = \text{const}. \quad (31)$$

Тензор дисторсии будем разыскивать в виде

$$\mathbf{C} = C_{11}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + C_{22}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + C_{23}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + C_{32}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + C_{33}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (32)$$

Условие соленидальности тензора α согласно (30), (31) дает уравнение (штрих означает дифференцирование по r):

$$\psi r \alpha_{32} = (r \alpha_{11})' - \alpha_{22},$$

которое должно выполняться при любом значении угла закручивания ψ . Для этого необходимо и достаточно потребовать

$$\alpha_{32} = 0, \quad (r \alpha_{11})' = \alpha_{22}. \quad (33)$$

С учетом (33) тензорное уравнение несовместности (4) приводится к четырем скалярным соотношениям

$$\begin{aligned} \psi r C_{22} - C_{32} &= r \alpha_{11}, \quad C_{11} - C'_{32} \alpha_{22}, \\ C'_{33} &= -\alpha_{23}, \quad (r C_{23})' = r \alpha_{33}, \end{aligned} \quad (34)$$

В случае изотропного упругого материала несимметричный тензор напряжений Пиолы, соответствующий дисторсии (30), имеет представление

$$\mathbf{D} = D_{11}(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + D_{22}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{23}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + D_{32}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{33}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \quad (35)$$

В силу (35) уравнения равновесия $\text{div } \mathbf{D} = 0$ сводятся к одному скалярному уравнению

$$(r D_{11})' - D_{22} - \psi r D_{32} = 0. \quad (36)$$

Равенства (34) и (36) с учетом определяющих соотношений материала образуют полную систему уравнений относительно неизвестных $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{23}, C_{32}$.

При отсутствии непрерывно распределенных дислокаций деформация кручения, осевого сдвига и растяжения задается при помощи эйлеровых цилиндрических координат R, Φ, Z следующим образом [2]:

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z + \frac{b}{2\pi} \varphi.$$

Здесь $(\lambda - 1)$ – осевое удлинение, b – длина вектора Бюргерса винтовой дислокации Вольтерры в полом цилиндре. Градиент деформации, отвечающий этому отображению, запишется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= R' \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{b}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \\ &+ \psi R \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (37)$$

Продольная сила P и крутящий момент M , действующие на торцах цилиндра, определяются формулами (27)

$$P = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} \frac{\partial W}{\partial \lambda} r dr, \quad M = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} \frac{\partial W}{\partial \psi} r dr.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи кручения цилиндра с распределенными дислокациями. Пусть $\alpha_{11} = \alpha_{22} = a_0 = \text{const}$, $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$. Тогда условие соленидальности (33) выполнено, а система уравнений несовместности (34) при $\psi = a_0$ имеет решение $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 1$, $C_{23} = C_{32} = 0$. Напряжения при этом тождественно равны нулю. Тензор дисторсии согласно (31), (32) является ортогональным тензором, описывающим вращение вокруг оси z на угол $a_0 z$. Это означает, что цилиндр испытывает кручение с углом закручивания a_0 , равным плотности дислокаций, не оказывая этому кручению никакого сопротивления.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = \alpha_{22} = 0$. Из (33) находим $\alpha_{11} = \tau_0 r^{-1}$, где $\tau_0 = \text{const}$.

При помощи (30) легко проверить, что данный случай соответствует такой зависимости тензора плотности дислокаций от деформации среды:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{-1/2} \cdot \mathbf{C}, \quad (38)$$

где $\mathbf{A}$ – ортогональный тензор, сопровождающий деформацию, называемый также тензором поворота. Предполагая отсутствие винтовой дислокации

Вольтерры, из уравнений несовместности (34) получим, что $C_{23} = 0$, $C_{33} = \lambda = \text{const}$. Оставшиеся уравнения из системы (34) дают

$$\psi r C_{22} = C_{32} + \tau_0, \quad \psi C_{11} = C'_{32}. \quad (39)$$

Для несжимаемого материала из условия $\det \mathbf{C} = 1$, т.е.

$$C_{11} C_{22} = \lambda^{-1},$$

и (39) получаем уравнение относительно C_{32} :

$$(\tau_0 + C_{32}) C'_{32} = \lambda^{-1} \psi^2 r, \quad (40)$$

которое решается в квадратурах. Гидростатическая составляющая напряжений в несжимаемом теле находится в квадратурах из уравнения равновесия (36). Постоянные интегрирования уравнений (36) и (40) определяются из условий незагруженности боковых поверхностей цилиндра. После этого продольная сила и крутящий момент становятся известными функциями параметров ψ и λ .

В случае сплошного цилиндра ($r_1 = 0$), согласно (37), при отсутствии дислокации справедливо равенство $C_{32}(0) = 0$. Потребуем, чтобы это условие выполнялось и при кручении цилиндра с непрерывно распределенными дислокациями. Тогда решение уравнений (39), (40) дает

$$C_{11} = \frac{\psi r}{\lambda \sqrt{\tau_0^2 + \lambda^{-1} \psi^2 r^2}}, \quad C_{22} = \frac{\sqrt{\tau_0^2 + \lambda^{-1} \psi^2 r^2}}{\psi r},$$

$$C_{32} = -\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 + \lambda^{-1} \psi^2 r^2}. \quad (41)$$

Рассмотрим для примера модель материала Бартенева–Хазановича [4] с упругим потенциалом

$$W = 2\mu[\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2} - 3]. \quad (42)$$

Из (41), (42) следует выражение погонной энергии цилиндра с распределенными дислокациями

$$\Pi(\lambda, \psi) = 4\pi\mu \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{\lambda |C_{22}|} + \sqrt{(\lambda + |C_{22}|)^2 + C_{32}^2} - 3 \right) r dr. \quad (43)$$

Несмотря на то что, согласно (41) тензор дисторсии на оси цилиндра имеет сингулярность порядка r^{-1} , интеграл (43) при $\psi \neq 0$ сходится, т. е. погонная энергия сплошного цилиндра с плотностью дислокаций вида

$$\alpha = \tau_0 r^{-1} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R$$

имеет конечное значение. В силу (27) выражение энергии (43) полностью определяет сопротивление круглого стержня с дислокациями кручению и растяжению и позволяет, в частности, исследовать

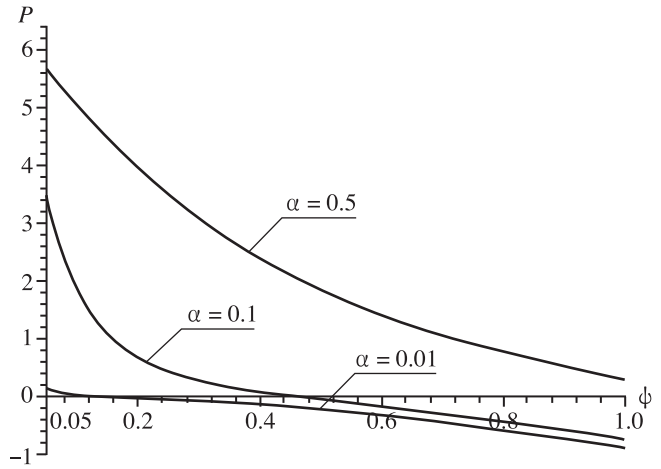


Рис. 1. Зависимость от угла закручивания ψ продольной силы P , необходимой для сохранения длины стержня при различных значениях плотности дислокаций

влияние дислокаций на эффект Пойнтинга [7] при кручении. На рисунке 1 представлена зависимость от угла закручивания продольной силы, необходимой для сохранения длины стержня ($\lambda = 1$) при различных значениях плотности дислокаций. Эта зависимость показывает, что присутствие дислокаций с определенной плотностью меняет знак эффекта Пойнтинга. При вычислениях было принято $r_0 = 1$, $\mu = 1$.

4. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

В случае плоской деформации тензор плотности дислокаций выражается по формуле $\alpha = \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{a}$, а уравнение несовместности принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1. \quad (44)$$

Здесь $\mathbf{a}(x, y)$ – плоский вектор, x, y – декартовы координаты в плоскости, $\mathbf{i}_3$ – нормаль к плоскости, ∇ – плоский набла-оператор, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ – координатные орты, – дискриминантный тензор.

Рассмотрим прямоугольный брус $0 \leq x \leq l$, $|y| \leq h$, у которого грани $y = \pm h$ свободны от нагрузки. Предположим, что $\mathbf{a} = \alpha(y) \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ – тензор поворота среды. Это предположение с физической точки зрения обусловлено тем, что вектор Бюргерса каждой дислокации при жестком повороте упругого тела не остается неизменным, а поворачивается вместе с телом. Будем искать тензор дисторсии в форме, соответствующей чистому изгибу бруса [8]

$$\mathbf{C} = C_{11}(y) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + C_{22}(y) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (45)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \beta x - \mathbf{i}_2 \sin \beta x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 \sin \beta x + \mathbf{i}_2 \cos \beta x,$$

$$\beta = \text{const}.$$

Поскольку для дисторсии (45) тензорное поле по-

воротов выражается формулой $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3$, имеем $\mathbf{a} = \alpha(y)\mathbf{e}_1$. В силу (45) векторное уравнение несовместности (44) сводится к скалярному (штрих означает производную по y):

$$\beta C_{22} - C'_{11} = \alpha(y). \quad (46)$$

Тензор напряжений Пиолы, возникающий в изотропном однородном теле при деформации вида (45), будет иметь представление

$$\mathbf{D} = D_{11}(y)\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + D_{22}(y)\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + D_{33}(y)\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (47)$$

Уравнение равновесия $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ с учетом (47) приводится к виду

$$D'_{22} = \beta D_{11}. \quad (48)$$

Будем использовать модель полулинейного [4] материала, определяющие соотношения которого представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1 + (2\mu)^{-1}[(1-\nu)D_{11} + \nu D_{22}], \\ C_{22} &= 1 + (2\mu)^{-1}[-\nu D_{11} + (1-\nu)D_{22}]. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Из (46)–(49) получаем краевую задачу для напряжения $D_{22}(y)$

$$\begin{aligned} D''_{22} - \beta^2 D_{22} &= \frac{2\mu\beta^2}{1-\nu} - \frac{2\mu\beta}{1-\nu}\alpha(y) \\ D_{22}(\pm h) &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

которая имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} D_{22}(y) &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[-1 + \frac{\text{ch } \beta y}{\text{ch } \beta h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{sh } \beta(y-h)J_1(y) + \text{sh } \beta(y+h)J_2(y)}{\text{sh } 2\beta h} \right], \\ J_1(y) &= \int_{-h}^y \alpha(\eta) \text{sh } \beta(\eta+h) d\eta, \\ J_2(y) &= \int_y^h \alpha(\eta) \text{sh } \beta(\eta-h) d\eta. \end{aligned} \quad (51)$$

Напряжение $D_{11}(y)$ выражается формулой

$$\begin{aligned} D_{11}(y) &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left[\frac{\text{sh } \beta y}{\text{ch } \beta h} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{ch } \beta(y-h)J_1(y) + \text{ch } \beta(y+h)J_2(y)}{\text{sh } 2\beta h} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Изгибающий момент G , действующий в сечении бруса $x = \text{const}$, определяется формулой

$$G = \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-h}^h W(y, \beta) dy, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu}{1-2\nu} [(1-\nu)(C_{11}-1)^2 + \\ &\quad + (1-\nu)(C_{22}-1)^2 + 2\nu(C_{11}-1)(C_{22}-1)]. \end{aligned}$$

Здесь W – удельная потенциальная энергия деформации полулинейного материала.

В частном случае $\alpha(y) = u_0 = \text{const}$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{\text{sh } \beta y}{\text{ch } \beta h} \left(1 - \frac{u_0}{\beta} \right), \\ D_{22} &= \frac{2\mu}{1-\nu} \left(\frac{\text{ch } \beta y}{\text{ch } \beta h} - 1 \right) \left(1 - \frac{u_0}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Рисунок 2 иллюстрирует влияние постоянной плотности дислокаций ($\alpha(y) = \text{const}$) на определяемую формулой (53) зависимость изгибающего момента от кривизны оси бруса. При вычислениях было принято $h = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 0,3$.

Из (54) видно, что при $\beta = u_0$ напряжения обращаются в нуль. Это означает, что при постоянной плотности дислокаций прямоугольный брус изгибается без появления напряжений и превращается в круговой брус с кривизной, равной плотности дислокаций.

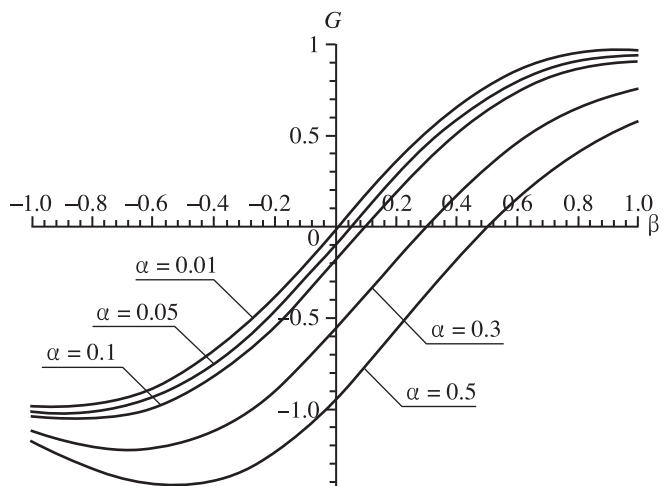


Рис. 2. Влияние постоянной плотности дислокаций на зависимость изгибающего момента G от кривизны оси бруса β

5. КВАЗИТВЕРДЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Выше на примерах кручения круглого цилиндра и изгиба прямоугольного бруса было показано, что в теле с непрерывно распределенными дислокациями могут существовать неоднородные поля поворотов при нулевых напряжениях. Рассмотрим подробнее вопрос о том, каким условиям должен удовлетворять тензор плотности дислокаций, чтобы в материальном теле возникло неоднородное поле конечных поворотов частиц при отсутствии удлинений и сдвигов, т.е. при $\mathbf{G} = \mathbf{E}$. Указанные движения в сплошной среде будем называть квазитвердыми.

Тензор плотности дислокаций будем предполагать заданным в виде (38), где α_0 – известная функция координат. Отсутствие удлинений и сдвигов означает, что в каждой точке тела выполняется равенство $\mathbf{C} = \mathbf{A}$. Отсюда и из (4), (38) получаем уравнение для определения тензорного поля конечных поворотов

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^T = \alpha_0. \quad (55)$$

Введя произвольные криволинейные координаты $q^s (s = 1, 2, 3)$ и соответствующие им основной $\mathbf{r}_s$ и взаимный $\mathbf{r}^k$ векторные базисы, уравнение (55) представим в форме:

$$\mathbf{r}^s \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^s} \cdot \mathbf{A}^T = \alpha_0. \quad (56)$$

Из ортогональности тензора $\mathbf{A}$ вытекает антисимметричность тензоров $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^s} \right) \cdot \mathbf{A}^T$, что позволяет преобразовать систему уравнений (56) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^s} \cdot \mathbf{L}_s \times \mathbf{A}. \quad (57)$$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{r}_s \cdot \left(\alpha_0^T - \frac{1}{2} \mathbf{E} \text{tr } \alpha_0 \right). \quad (58)$$

Исключая неизвестную функцию $\mathbf{A}(q^m)$ из системы уравнений (57), придем к соотношениям

$$\frac{\partial \mathbf{L}_k}{\partial q^s} - \frac{\partial \mathbf{L}_s}{\partial q^k} + \mathbf{L}_k \times \mathbf{L}_s = 0, \quad (59)$$

$$k, s = 1, 2, 3.$$

Основываясь на теореме Картана [9], можно доказать, что условия (59) необходимы и достаточны для существования в односвязной области однозначного поля поворотов при условии, что в некоторой точке области задано значение тензора $\mathbf{A}$.

С учетом (58) доказываем, что соотношения (59) эквивалентны одному тензорному уравнению

$$\text{rot } \mathbf{L} - \alpha_0 \cdot \mathbf{L}^T + \frac{1}{2} \text{tr}(\alpha_0 \cdot \mathbf{L}^T) \mathbf{E} = 0, \quad (60)$$

$$\mathbf{L} = \alpha_0^T - \frac{1}{2} \mathbf{E} \text{tr } \alpha_0.$$

Условие (60) представляет собой ограничение на заданную зависимость тензора α_0 от координат, которое необходимо и достаточно для существования квазитвердого движения среды. Для односвязного тела квазитвердое движение, т.е. поле ортогонального тензора $\mathbf{A}$, единственно, если задано значение $\mathbf{A}$ в некоторой точке тела.

Легко проверить, что требование соленоидальности (5) тензора плотности дислокаций α вытекает из условия (60).

При отсутствии дислокаций, т.е. при $\alpha_0 = 0$, система уравнений (57), очевидно, имеет только постоянное решение $\mathbf{A} = \mathbf{H}_0 = \text{const}$, $\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^T = \mathbf{E}$, которое описывает движение среды как абсолютно твердого тела.

Приведем некоторые примеры распределенных дислокаций, удовлетворяющих условию (60), и определим соответствующие поля конечных поворотов.

1. Краевые дислокации, распределенные с плотностью $\alpha_0 = f(x_1) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_1$. Решение системы (57) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) \cos \psi(x_1) + \\ &+ (\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) \sin \psi(x_1) + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (61) \\ \psi(x_1) &= \int f(x_1) dx_1 + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

Выражение (61) описывает повороты вокруг оси на угол $\psi(x_1)$.

2. Краевые дислокации, распределенные с плотностью $\alpha_0 = f(x_2) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_2$. Соответствующее квазитвердое движение представляет собой поле поворотов на угол $\psi(x_2)$ вокруг оси x_3

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) \cos \psi(x_2) + \\ &+ (\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) \sin \psi(x_2) + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (62) \\ \psi(x_2) &= \int f(x_2) dx_2 + \psi_0. \end{aligned}$$

3. Винтовые дислокации, распределенные с плотностью $\alpha_0 = f(x_3)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2)$. Квазитвердое движение представляет собой поле поворотов вокруг оси x_3 на угол $\psi(x_3)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) \cos \psi(x_3) + \\ &+ (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1) \sin \psi(x_3) + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ \psi(x_3) &= \int f(x_3) dx_3 + \psi_0. \end{aligned} \quad (63)$$

Если тело имеет форму призматического стержня, то выражения (61) и (62) соответствуют изгибу стержня, а выражение (63) – кручению.

4. Плоское поле краевых дислокаций, распределенных с плотностью $\alpha_0 = \mathbf{i}_3 \otimes \text{grad}\psi(x_1, x_2)$. Квазитвердое движение в этом случае является плоским полем конечных поворотов вокруг оси, ортогональной плоскости x_1x_2 ,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3)\cos\psi(x_1, x_2) + (\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2)\sin\psi(x_1, x_2) + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (64)$$

Простым примером дислокаций, для которых не существует квазитвердых движений, т. е. нарушается условие (60), может служить равномерное распределение винтовых дислокаций

$$\alpha_0 = a\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, a = \text{const.}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-962.2007.1 и гранта РФФИ 09-01-00459.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965.
2. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. В.: Springer, 1997.
3. Вакуленко А.А. Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. "Механика деформируемого твердого тела". М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 3–54.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
5. Zubov Л.М. Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 827–831.
6. Zubov Л.М., Губа А.В. Нелинейная теория кручения призматических упругих тел, содержащих винтовые дислокации // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. С. 212–222.
7. Zubov Л.М. О прямом и обратном эффектах Пойнтинга в упругих цилиндрах // Доклады РАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 194–196.
8. Зеленина А.А., Zubov Л.М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел // ПММ. 2000. Т. 64. № 3. С. 416–423.
9. Карпан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960.

BENDING AND TWISTING OF NONLINEAR ELASTIC BODIES WITH CONTINUOUSLY DISTRIBUTED DISLOCATIONS

A.A. Zelenina, L.M. Zubov

The bending and twisting problems of elastic prismatic bodies with microstructure as continuously distributed dislocations under large deformations are considered. Two-dimensional nonlinear boundary-valued problem for equilibrium equations and incompatibility equations was obtained with the help of semi-inverse method. The solution of two-dimensional problem in a section of prismatic bar allows to satisfy three-dimensional nonlinear elasticity equations in the body volume and boundary conditions at the lateral surface exactly. The boundary conditions at the bar ends are fulfilled approximately in the integral Saint-Venant sense. The problems of circular cylinder twisting and plane bar pure bending with continuously distributed dislocations were investigated in details. It is shown, that in the body with continuously distributed dislocations the heterogeneous bends fields can exist with zero stresses.

Key words: large strains, torsion, bending, dislocations, continuous distribution of defects, nonlinearity.

REFERENCES

1. Kröner E. 1958. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Erg. Angew. Math.* 5: 1–179. (In German).
2. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin, Springer: 205 p.
3. Vakulenko A.A. 1991. [Interrelation of micro and macro properties of elastic-plastic media]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. 22: 3–54. (In Russian).
4. Lurie A.I. 1990. *Non-linear Theory of Elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p.
5. Zubov L.M. 1983. [Theory of torsion of prismatic bars under finite deformations]. *Doklady akademii nauk SSSR*. 270(4): 827–831. (In Russian).
6. Zubov L.M., Guba A.V. 2003. [Nonlinear theory of torsion of prismatic elastic bodies containing screw dislocations]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki*. (Spetsvypusk): 212–222. (In Russian).
7. Zubov L.M. 2001. Direct and inverse Poynting effects in elastic cylinders. *Doklady Physics*. 46(9): 675–677.
8. Zelenina A.A., Zubov L.M. 2000. The non-linear theory of the pure bending of prismatic elastic solids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 64(3): 399–406.
9. Kartan E. 1960. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere*. [Riemann geometry in orthogonal frames]. Moscow, MSU Publ.: 207 p. (In Russian).