

УДК 539.3:534.1

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОЙ УПРУГОЙ ТРУБЫ ИЗ МИКРОПОЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА

© 2009 г. Д.Н. Шейдаков¹

Настоящая работа посвящена изучению влияния гидростатического давления на потерю устойчивости сжатой упругой цилиндрической трубы из микрополярного материала. Рассмотрены два вида деформации – осевое сжатие трубы при внутреннем давлении и осевое сжатие трубы при внешнем давлении. Проблема исследуется с помощью трехмерных нелинейных уравнений моментной теории упругости. Анализ устойчивости проводится в рамках бифуркационного подхода. Для физически линейной модели микрополярного материала получены линеаризованные уравнения равновесия, численным решением которых для некоторых материалов найдены критические кривые и построены области устойчивости в плоскости соответствующих параметров нагружения. Исследовано влияние микроструктуры материала и геометрических размеров трубы на потерю устойчивости.

Ключевые слова: нелинейная упругость, микрополярная среда, устойчивость деформируемых тел, комбинированное нагружение, влияние микроструктуры.

1. Основные соотношения континуума Коссера. В современных технологиях достаточно широко используются различные высокопористые материалы, такие как металлические и полимерные пены, керамики, а также материалы, образованные сотовыми конструкциями. В силу влияния микроструктуры поведение таких материалов не может быть адекватно описано в рамках классической модели сплошной среды. Для построения математической модели пористого упругого тела целесообразным оказывается использование модели микрополярной сплошной среды [1–7], или континуума Коссера, т.е. среды с моментными напряжениями и вращательными степенями свободы.

Положение частицы микрополярной среды в деформированном состоянии задается радиус-вектором \mathbf{R} , а поворот частицы характеризуется собственным ортогональным тензором микроповорота \mathbf{H} . Система уравнений статики нелинейной моментной теории упругости при отсутствии массовых сил и моментов состоит [3–8] из уравнений равновесия для напряжений

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0, \quad (1)$$

уравнений состояния

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H} \quad (2)$$

и геометрических соотношений

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} \times \mathbf{E} = -\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{C} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) \mathbf{D} и \mathbf{G} – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы, \mathbf{C} – градиент деформации, \mathbf{Y} – мера деформации, \mathbf{L} – тензор изгибной деформации, $W(\mathbf{Y}, \mathbf{L})$ – удельная потенциальная энергия деформации, \mathbf{E} – единичный тензор, $\overset{\circ}{\nabla}$ – набла-оператор в лагранжевых координатах. Символ \times означает векторный инвариант тензора второго ранга:

$$\mathbf{K}_{\times} = (K_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)_{\times} = K_{mn} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n.$$

2. Равновесие сжатой трубы при гидростатическом давлении. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругой цилиндрической трубы из микрополярного материала при осевом сжатии и внутреннем или внешнем гидростатическом давлении. В этом случае радиус-вектор \mathbf{R} и тензор микроповорота \mathbf{H} деформированного тела имеют вид [9]

$$\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_Z, \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z; \quad (4)$$

¹ Южный научный центр Российской академии наук, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41; тел. 8 (863) 250-98-10, e-mail: sheidakov@mail.ru.

$$R = f(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \alpha z; \quad (5)$$

$$r_1 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Здесь r, φ, z – цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты), R, Φ, Z – эйлеровы цилиндрические координаты, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$, и $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z\}$ – ортонормированные векторные базисы лагранжевых и эйлеровых координат соответственно, α – коэффициент сжатия по оси цилиндра, $f(r)$ – некоторая функция, характеризующая радиальную деформацию трубы и определяемая из уравнений равновесия и граничных условий, r_1, r_0, l – внутренний и внешний радиусы и длина недеформированной трубы.

Согласно соотношениям (3)–(5), тензор изгибной деформации \mathbf{L} равен нулю, а мера деформации \mathbf{Y} выражается следующим образом:

$$\mathbf{Y} = f'(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{f(r)}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \alpha\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z. \quad (6)$$

Будем считать, что упругие свойства трубы описываются моделью физически линейного изотропного микрополярного материала [2, 6, 10], удельная потенциальная энергия деформации которого имеет вид

$$W(\mathbf{Y}, \mathbf{L}) = \frac{1}{2}\lambda \text{tr}^2(\mathbf{Y} - \mathbf{E}) + \frac{1}{2}\mu \text{tr}(\mathbf{Y} - \mathbf{E})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(\mu + \chi) \text{tr}((\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{E})^T) + \frac{1}{2}\gamma_1 \text{tr}^2 \mathbf{L} +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_2 \text{tr}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}\gamma_3 \text{tr} \mathbf{L}^2, \quad (7)$$

$$\mu + \chi > 0, \quad \lambda + 2\mu + \chi > 0,$$

$$\gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 0.$$

Здесь λ и μ – классические константы Лямэ, $\chi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, – моментные упругие модули. Последние можно выразить через специальные инженерные константы, определяемые из экспериментов [10]:

$$\chi = \frac{2\mu N^2}{1 - 2N^2}, \quad \gamma_1 = \frac{2\mu l_t^2(1 - \Psi)(1 - N^2)}{\Psi(1 - 2N^2)},$$

$$\gamma_2 = \frac{4\mu l_b^2(1 - N^2)}{1 - 2N^2}, \quad (8)$$

$$\gamma_3 = \frac{2\mu(1 - N^2)(l_t^2 - 2l_b^2)}{1 - 2N^2},$$

где l_t – характерный размер при кручении, l_b – характерный размер при изгибе, N – коэффициент взаимодействия, Ψ – полярный коэффициент. Очевидно, что при равенстве нулю моментных констант $\chi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, рассматриваемая модель (7) переходит в хорошо известную модель полуполинейного материала [9].

Из уравнений состояния (2) с учетом выражений (4), (6), (7) следует, что тензор моментных напряжений типа Пиолы \mathbf{G} при рассматриваемой деформации цилиндрической трубы равен нулю, а тензор напряжений типа Пиолы

$$\mathbf{D} = D_r\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + D_\varphi\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + D_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z,$$

$$D_r = \lambda s + \chi(f'(r) - 1), \quad D_z = \lambda s + \chi(\alpha - 1), \quad (9)$$

$$D_\varphi = \lambda s + \chi\left(\frac{f(r)}{r} - 1\right),$$

$$s = f'(r) + \frac{f(r)}{r} + \alpha - 3, \quad \chi = 2\mu + \chi.$$

Подставляя соотношения (9) в уравнения равновесия (1), находим вид неизвестной функции $f(r)$:

$$f(r) = c_1 r - \frac{c_2}{r}. \quad (10)$$

Константы c_1, c_2 определяются из граничных условий на боковых поверхностях трубы, которые в случае внутреннего давления имеют вид

$$D_r|_{r=r_1} = -\frac{\alpha p_1 f(r_1)}{r_1}, \quad D_r|_{r=r_0} = 0, \quad (11)$$

а при внешнем давлении

$$D_r|_{r=r_1} = 0, \quad D_r|_{r=r_0} = -\frac{\alpha p_0 f(r_0)}{r_0}, \quad (12)$$

Здесь p_1 – величина внутреннего, а p_0 – внешнего гидростатического давления на единицу площади деформированного тела.

Таким образом, из уравнений (9)–(12) следует, что при осевом сжатии и внутреннем давлении константы c_1, c_2 определяются выражениями

$$c_1 = \frac{(\lambda[3 - \alpha] + \chi)[\chi r_1^2 + (\alpha p_1 - \chi)r_0^2]}{\chi(2\lambda + \chi + \alpha p_1)r_1^2 + (2\lambda + \chi)(\alpha p_1 - \chi)r_0^2},$$

$$c_2 = \frac{(\lambda[3 - \alpha] + \chi)\alpha p_1 r_0^2 r_1^2}{\chi(2\lambda + \chi + \alpha p_1)r_1^2 + (2\lambda + \chi)(\alpha p_1 - \chi)r_0^2}, \quad (13)$$

а в случае деформации сжатия при внешнем давлении

$$c_1 = \frac{(\lambda[3 - \alpha] + \chi)[(\alpha p_0 - \chi)r_1^2 + \chi r_0^2]}{(2\lambda + \chi)(\alpha p_0 - \chi)r_1^2 + \chi(2\lambda + \chi + \alpha p_0)r_0^2}$$

$$c_2 = \frac{(\lambda[3 - \alpha] + \chi)\alpha p_0 r_0^2 r_1^2}{(2\lambda + \chi)(\alpha p_0 - \chi)r_1^2 + \chi(2\lambda + \chi + \alpha p_0)r_0^2} \quad (13)$$

Напряжения, действующие на торцах трубы, сводятся к продольной силе F , которая определяется по формуле

$$F = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} D_z r dr = \pi (r_0^2 - r_1^2) \times \\ \times (2\lambda(c_1 - 1) + [\lambda + \chi](\alpha - 1)).$$

3. Возмущенное равновесие. Предположим, что помимо описанного выше состояния равновесия цилиндрической трубы при тех же внешних нагрузках существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}$ и тензором микроповорота $\mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \omega$, где η – малый параметр, \mathbf{v} – вектор добавочного перемещения, ω – линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот, отсчитываемый от начального деформированного состояния. Возмущенное состояние равновесия микрополярной среды описывается уравнениями [6]:

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D}^{\bullet} = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{G}^{\bullet} + [\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D}^{\bullet}]_{\times} = 0, \quad (14) \\ \mathbf{D}^{\bullet} = \frac{d}{d\eta} \mathbf{D}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{v}, \mathbf{H} - \eta \mathbf{H} \times \omega)_{\times} = 0,$$

Здесь \mathbf{D}^{\bullet} и \mathbf{G}^{\bullet} – линейризованные тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы.

Линейризованные граничные условия на боковой поверхности трубы имеют следующий вид:

а) при внутреннем давлении

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \Big|_{r=r_1} = -p_1 \mathbf{J} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-T} \cdot (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T), \quad (15) \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \Big|_{r=r_0} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \Big|_{r=r_1, r_0} = 0,$$

б) при внешнем давлении

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \Big|_{r=r_0} = -p_0 \mathbf{J} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{C}^{-T} \cdot (\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T), \quad (16) \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \Big|_{r=r_1} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \Big|_{r=r_1, r_0} = 0,$$

где $\nabla = \mathbf{C}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\nabla}$ – набла-оператор в начальном деформированном состоянии.

Будем полагать, что на торцах трубы отсутствуют силы трения и задано постоянное нормальное перемещение. Это приводит к следующим линейризованным граничным условиям

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_R \Big|_{z=0, l} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_{\Phi} \Big|_{z=0, l} = 0, \quad (17) \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{G}^{\bullet} \cdot \mathbf{e}_Z \Big|_{z=0, l} = \mathbf{e}_R \cdot \omega \Big|_{z=0, l} = \mathbf{e}_{\Phi} \cdot \omega \Big|_{z=0, l} = 0.$$

С учетом отсутствия моментных напряжений в начальном деформированном состоянии для линейризованных тензоров \mathbf{D}^{\bullet} и \mathbf{G}^{\bullet} в случае физически линейного микрополярного материала (7) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{D}^{\bullet} = (\lambda(\text{tr} \mathbf{Y}^{\bullet}) \mathbf{E} + \mu \mathbf{Y}^{\bullet} + [\mu + \chi] \mathbf{Y}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \omega,$$

$$\mathbf{G}^{\bullet} = (\gamma_1(\text{tr} \mathbf{L}^{\bullet}) \mathbf{E} + \gamma_2 \mathbf{L}^{\bullet} + \gamma_3 \mathbf{L}^{\bullet T}) \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{Y}^{\bullet} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{C} \times \omega) \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^{\bullet} = \overset{\circ}{\nabla} \omega \cdot \mathbf{H}^T,$$

где \mathbf{Y}^{\bullet} – линейризованная мера деформации, \mathbf{L}^{\bullet} – линейризованный тензор изгибных деформаций.

Запишем представление векторов добавочного перемещения \mathbf{v} и добавочного поворота ω в базисе эйлеровых цилиндрических координат:

$$\mathbf{v} = v_R \mathbf{e}_R + v_{\Phi} \mathbf{e}_{\Phi} + v_Z \mathbf{e}_Z, \quad (19)$$

$$\omega = \omega_R \mathbf{e}_R + \omega_{\Phi} \mathbf{e}_{\Phi} + \omega_Z \mathbf{e}_Z.$$

Выражения (14) представляют собой систему шести уравнений в частных производных относительно неизвестных компонент $v_R, v_{\Phi}, v_Z, \omega_R, \omega_{\Phi}, \omega_Z$. Подстановка

$$v_R = V_R(r) \cos n\varphi \cos \beta z, \quad v_{\Phi} = V_{\Phi}(r) \sin n\varphi \cos \beta z, \\ v_Z = V_Z(r) \cos n\varphi \sin \beta z, \\ \omega_R = \Omega_R(r) \sin n\varphi \sin \beta z, \quad (20) \\ \omega_{\Phi} = \Omega_{\Phi}(r) \cos n\varphi \sin \beta z, \quad \omega_Z = \Omega_Z(r) \sin n\varphi \cos \beta z,$$

$$\beta = \frac{\pi m}{l}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

приводит к отделению переменных φ, z в этих уравнениях и позволяет удовлетворить линейризованным граничным условиям (17) на торцах трубы. Тем самым исследование устойчивости сведено к решению линейной однородной краевой задачи (14), (15) или (14), (16) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

С учетом соотношений (4)–(6), (9), (18)–(20) линейризованные уравнения равновесия (14) примут вид

$$(\zeta + \tau) \left(V_R'' + \frac{V_R'}{r} \right) - \frac{\zeta + \tau \xi}{r^2} V_R - \frac{n(\zeta + 2\tau)}{r^2} V_{\Phi} + \\ + \frac{n\zeta}{r} V_{\Phi}' + \beta \zeta V_Z' + \beta B_{13} \Omega_{\Phi} - \frac{nB_{12}}{r} \Omega_Z = 0, \\ \tau \left(V_{\Phi}'' + \frac{V_{\Phi}'}{r} \right) - \frac{\zeta n^2 + \tau \xi}{r^2} V_{\Phi} - \frac{n\zeta}{r} (V_R' + \beta V_Z) - \\ - \frac{n(\zeta + 2\tau)}{r^2} V_R - \beta B_{23} \Omega_R + B_{21} \Omega_Z' = 0, \\ \tau \left(V_Z'' + \frac{V_Z'}{r} \right) - \left(\zeta \beta^2 + \frac{\xi - 1}{r^2} \tau \right) V_Z - B_{31} \Omega_{\Phi}' - \\ - \beta \zeta \left(V_R' + \frac{1}{r} [V_R + nV_{\Phi}] \right) + \frac{B_{32}}{r} (n\Omega_R - \Omega_{\Phi}) = 0, \\ (\gamma + \gamma_2) \left(\Omega_R'' + \frac{\Omega_R'}{r} \right) - s_1 \Omega_R - \beta \gamma \Omega_Z' - \\ - \beta B_{23} V_{\Phi} - \frac{n}{r} \left(\gamma \Omega_{\Phi}' - \frac{\gamma + 2\gamma_2}{r} \Omega_{\Phi} - B_{32} V_Z \right) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \left(\Omega'_\Phi + \frac{\Omega'_\Phi}{r} \right) - s_2 \Omega_\Phi + \beta B_{13} V_R + B_{31} V'_Z + \\ & + \frac{n}{r} \left(\gamma \Omega'_R + \frac{\gamma + 2\gamma_2}{r} \Omega_R - \beta \gamma \Omega_Z \right) = 0, \\ & \gamma_2 \left(\Omega'_Z + \frac{\Omega'_Z}{r} \right) + \beta \gamma \left(\Omega'_R + \frac{\Omega_R}{r} - \frac{n}{r} \Omega_\Phi \right) - \\ & - B_{21} V'_\Phi - \frac{B_{12}}{r} (nV_R + V_\Phi) - s_3 \Omega_Z = 0. \end{aligned}$$

Для сокращения записи здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{12} &= f' \mu - \frac{f}{r} \tau + D_\Phi, & B_{21} &= \frac{f}{r} \mu - f' \tau + D_r, \\ B_{13} &= f' \mu - \alpha \tau + D_z, & B_{31} &= \alpha \mu - f' \tau + D_r, \\ B_{23} &= \frac{f}{r} \mu - \alpha \tau + D_z, & B_{32} &= \alpha \mu - \frac{f}{r} \tau + D_\Phi, \\ s_1 &= \frac{\gamma + \gamma_2 \xi}{r^2} - \frac{B_{32} f}{r} - \alpha B_{23}, & \tau &= \mu + \chi, \\ s_2 &= \frac{\gamma n^2 + \gamma_2 \xi}{r^2} - f' B_{31} - \alpha B_{13}, & \zeta &= \lambda + \mu, \\ s_3 &= \gamma \beta^2 + \frac{\xi - 1}{r^2} \gamma_2 - f' B_{21} - \frac{f}{r} B_{12}, \\ \xi &= n^2 + r^2 \beta^2 + 1, & \gamma &= \gamma_1 + \gamma_3. \end{aligned}$$

Линеаризованные граничные условия (15), соответствующие случаю внутреннего гидростатического давления, преобразуются следующим образом:

1) на внутренней боковой поверхности трубы ($r = r_1$)

$$\begin{aligned} (\zeta + \tau) V'_R + \frac{\lambda + \alpha p_1}{r_1} (V_R + nV_\Phi) + \beta \left(\lambda + \frac{p_1 f}{r_1} \right) V'_Z &= 0, \\ \frac{\alpha p_1 - \mu}{r_1} (nV_R + V_\Phi) + \tau V'_\Phi + B_{21} \Omega_Z &= 0, \\ \beta \left(\frac{p_1 f}{r_1} - \mu \right) V_R + \tau V'_Z - B_{31} \Omega_\Phi &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$(\gamma + \gamma_2) \Omega'_R + \frac{\gamma_1}{r_1} (\Omega_R - n\Omega_\Phi) - \gamma_1 \beta \Omega_Z = 0,$$

$$\frac{\gamma_3}{r_1} (n\Omega_R - \Omega_\Phi) + \gamma_2 \Omega'_\Phi = 0, \quad \gamma_3 \beta \Omega_R + \gamma_2 \Omega'_Z = 0;$$

2) на внешней боковой поверхности трубы ($r = r_0$)

$$(\zeta + \tau) V'_R + \frac{\lambda}{r_0} (V_R + nV_\Phi) + \beta \lambda V'_Z = 0,$$

$$\tau V'_\Phi - \frac{\mu}{r_0} (nV_R + V_\Phi) + B_{21} \Omega_Z = 0,$$

$$\tau V'_Z - \mu \beta V_R - B_{31} \Omega_\Phi = 0, \quad (23)$$

$$(\gamma + \gamma_2) \Omega'_R + \frac{\gamma_1}{r_0} (\Omega_R - n\Omega_\Phi) - \gamma_1 \beta \Omega_Z = 0,$$

$$\frac{\gamma_3}{r_0} (n\Omega_R - \Omega_\Phi) + \gamma_2 \Omega'_\Phi = 0, \quad \gamma_3 \beta \Omega_R + \gamma_2 \Omega'_Z = 0.$$

Аналогичным образом записываются граничные условия (16), соответствующие случаю внешнего давления:

1) на внутренней боковой поверхности трубы ($r = r_1$)

$$(\zeta + \tau) V'_R + \frac{\lambda}{r_1} (V_R - nV_\Phi) - \lambda \beta V'_Z = 0,$$

$$\tau V'_\Phi - \frac{\mu}{r_1} (nV_R + V_\Phi) + B_{21} \Omega_Z = 0,$$

$$\tau V'_Z - \mu \beta V_R - B_{31} \Omega_\Phi = 0, \quad (24)$$

$$\gamma \Omega'_R + \frac{\gamma_1}{r_1} (\Omega_R - n\Omega_\Phi) - \gamma_1 \beta \Omega_Z = 0,$$

$$\frac{\gamma_3}{r_1} (n\Omega_R - \Omega_\Phi) + \gamma_2 \Omega'_\Phi = 0, \quad \gamma_3 \beta \Omega_R + \gamma_2 \Omega'_Z = 0.$$

2) на внешней боковой поверхности трубы ($r = r_0$)

$$(\zeta + \tau) V'_R + \frac{\lambda + \alpha p_0}{r_0} (V_R + nV_\Phi) + \beta \left(\lambda + \frac{p_0 f}{r_0} \right) V'_Z = 0,$$

$$\frac{\alpha p_0 - \mu}{r_0} (nV_R + V_\Phi) + \tau V'_\Phi + B_{21} \Omega_Z = 0,$$

$$\beta \left(\frac{p_0 f}{r_0} - \mu \right) V_R + \tau V'_Z - B_{31} \Omega_\Phi = 0, \quad (25)$$

$$\gamma \Omega'_R + \frac{\gamma_1}{r_0} (\Omega_R - n\Omega_\Phi) - \gamma_1 \beta \Omega_Z = 0,$$

$$\frac{\gamma_3}{r_0} (n\Omega_R - \Omega_\Phi) + \gamma_2 \Omega'_\Phi = 0, \quad \gamma_3 \beta \Omega_R + \gamma_2 \Omega'_Z = 0.$$

4. Численные результаты. Рассмотрим два конкретных микрополярных материала – синтаксическую пену [10] с параметрами

$$\lambda = 20,96 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad \mu = 91,82 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$l_t = 0,065 \text{ мм}, \quad l_b = 0,032 \text{ мм}, \quad (26)$$

$$N = 0,316, \quad \Psi = 1,5$$

и плотный пенополиуретан [10] с параметрами

$$\lambda = 79,73 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu = 99,67 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$l_t = 0,62 \text{ мм}, \quad l_b = 0,33 \text{ мм}, \quad (27)$$

$$N = 0,2, \quad \Psi = 1,5.$$

Путем приближенного решения линеаризованной однородной краевой задачи (21)–(23) о бифуркации равновесия цилиндрической трубы из микрополярного материала при осевом сжатии и внутреннем давлении и задачи (21), (24), (25) о потере устойчивости сжатой трубы при внешнем давлении для данных материалов в плоскости параметров нагружения найдены критические кривые, соответствующие различным модам неустойчивости. В результате анализа этих кривых построены области устойчивости. Согласно полученным результатам, в случае осевого сжатия достаточно исследовать устойчивость только относительно изгибных мод ($n = 1$), так как именно они реализуются при наименьшей деформации (это утверждение может нарушаться для коротких труб $l < 6r_0$, которые в настоящей работе не рассматриваются).

Для удобства введем следующие безразмерные параметры:

$$p_1^* = \frac{p_1}{\mu}, \quad p_0^* = \frac{p_0}{\mu},$$

$$\delta = 1 - \alpha, \quad l^* = \frac{l}{l_b}, \quad h^* = 1 - \frac{r_1}{r_0}.$$

На рис. 1 приведены области устойчивости для синтаксической пены (26) в случае внутреннего давления. Закрашены области неустойчивости деформации. Относительная длина $l^* = 600$. Отношение длины недеформированной трубы к ее диаметру здесь и далее равно 20 ($l = 40r_0$). Как видно из графиков, с ростом внутреннего давления сжатая упругая труба всегда становится менее устойчивой. Кроме того, установлено, что тонкостенные трубы могут выдерживать большую деформацию осевого сжатия, чем толстостенные, но при этом

хуже переносят внутреннее гидростатическое давление.

На рис. 2 представлены области устойчивости в случае внешнего давления. Как видно из графиков, влияние гидростатического давления, приложенного к внешней боковой поверхности, на бифуркацию равновесия сжатой трубы качественно отличается от влияния внутреннего давления. Установлено, что внешнее давление может достаточно существенно стабилизировать деформацию осевого сжатия цилиндрической трубы, причем для толстостенных труб этот эффект более ярко выражен. Аналогичные с качественной точки зрения результаты получены и для пенополиуретана (27).

В ходе анализа влияния геометрии трубы на потерю устойчивости обнаружен размерный эффект при относительной длине $l^* < 1700$. Именно, если рассматривать трубы, имеющие одинаковые пропорции, но разную длину, то наблюдается явная зависимость величины критической деформации от размеров трубы. Это отражено на рис. 3 и 4 для пенополиуретана в случае внутреннего и внешнего давления соответственно (для этих графиков относительная толщина $h^* = 0,1$). Хорошо видно, что с уменьшением длины трубы величина критической деформации возрастает. Отметим, что при $l^* > 1700$ указанный эффект не наблюдается, т.е. критическая деформация зависит только от соотношений между длиной, диаметром и толщиной стенки трубы, а не от размеров трубы в целом.

На заключительном этапе данного исследования была изучена степень влияния микроструктуры на устойчивость сжатой трубы из микрополярного материала при гидростатическом давлении. Построенные в рамках модели континуума Коссера области устойчивости сравнивались с областями устойчивости, полученными при отсутствии моментных напряжений. Для отыскания

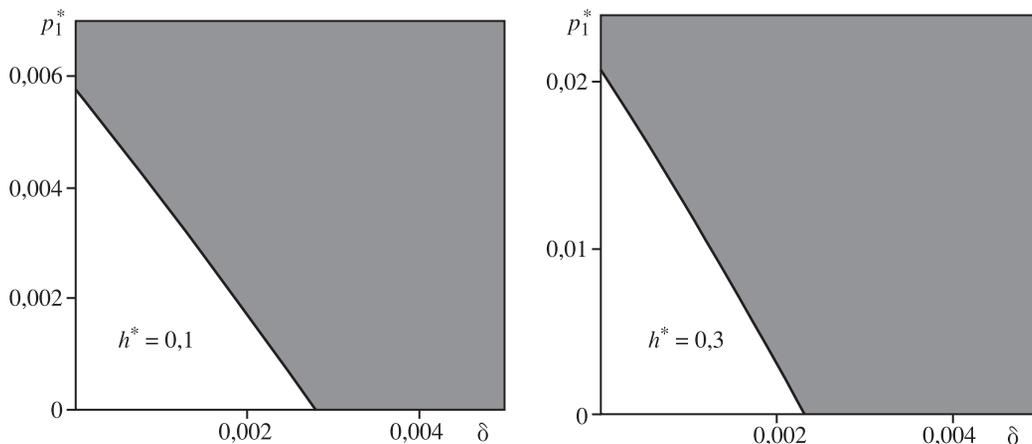


Рис. 1. Области устойчивости в случае внутреннего давления. Синтаксическая пена

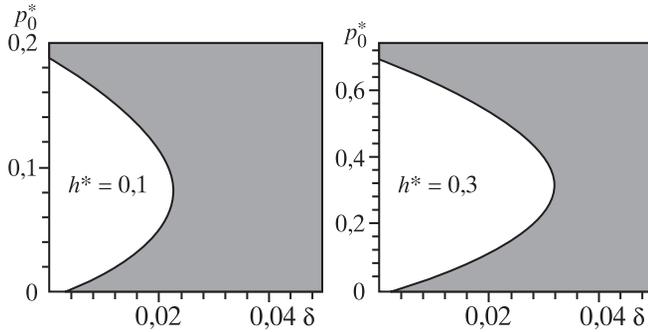


Рис. 2. Области устойчивости в случае внешнего давления. Синтаксическая пена

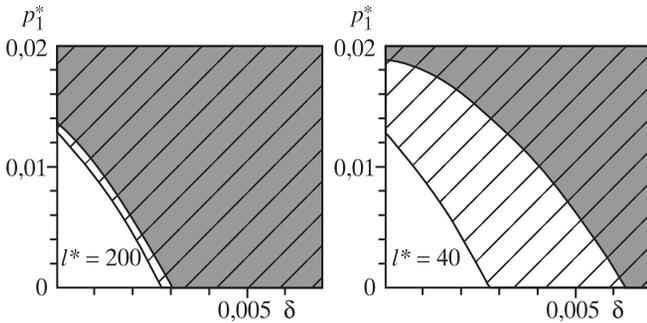


Рис. 3. Области устойчивости в случае внутреннего давления. Пенополиуретан

последних моментные упругие константы χ , γ_1 , γ_2 , γ_3 полагались равными нулю в линейризованных краевых задачах (21)–(23) и (21), (24), (25), т.е. рассматривалась модель полулинейного материала [9]. Результаты этого сравнения отражены на рис. 3 и 4. Здесь область неустойчивости при отсутствии моментных напряжений заштрихована. Из графиков хорошо видно, что как в случае внутреннего, так и в случае внешнего давления моментные напряжения оказывают стабилизи-

рующее влияние на деформацию сжатия цилиндрической трубы из микрополярного материала, причем это влияние усиливается с уменьшением размеров трубы и уже при $l^* < 600$ оказывается достаточно существенным. В то же время следует отметить, что для рассмотренных в данной работе материалов при относительной длине $l^* > 600$ учет микроструктуры достаточно слабо влияет на бифуркацию равновесия трубы и им вполне можно пренебречь.

5. Выводы. Подводя итоги исследования устойчивости сжатой упругой трубы из микрополярного материала, отметим следующие основные результаты.

Установлено, что небольшое гидростатическое давление, приложенное к внешней боковой поверхности трубы, оказывает стабилизирующее влияние на деформацию осевого сжатия, в то время как любое внутреннее давление наоборот дестабилизирует указанную деформацию.

При относительной длине трубы $l^* < 1700$ обнаружен размерный эффект, согласно которому величина критической деформации зависит не только от соотношений между длиной, диаметром и толщиной стенки трубы, но и непосредственно от величин этих геометрических параметров.

Выявлено стабилизирующее влияние моментных напряжений на деформацию осевого сжатия трубы при гидростатическом давлении, причем при $l^* < 600$ это влияние становится достаточно существенным.

Полученные результаты подтверждают целесообразность учета микроструктуры при анализе устойчивости упругих тел из микрополярных материалов, если рассматриваемые тела имеют не очень большие размеры.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ МК-4984.2008.1.

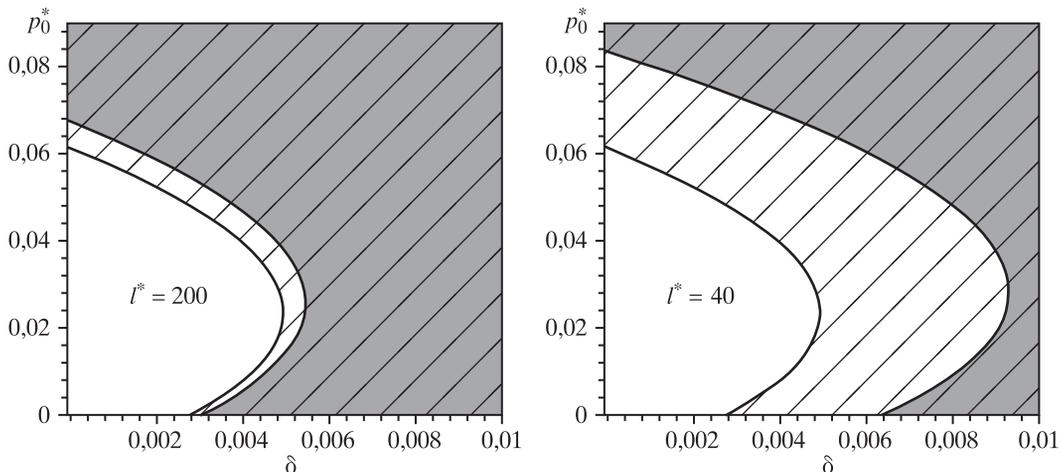


Рис. 4. Области устойчивости в случае внешнего давления. Пенополиуретан

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 242 p.
2. *Пальмов В.А.* Основные уравнения несимметричной теории упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
3. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. Vol. 17. № 5. P. 85–112.
4. *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
5. *Шкутин Л.И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
6. *Еремеев В.А., Zubov Л.М.* Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями // МТТ. 1994. № 3. С. 181–190.
7. *Erofejev V.I.* Microstructured Solids. Mathematical Models and Wave Processes Analysis. Nizhny Novgorod: Intelservice Publishing Company, 1996. 80 с.
8. *Zubov L.M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Berlin; Heidelberg; NY, 1997. 205 p.
9. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat Elastic Solids and Other Generalized Elastic Continua // Continuum Models for Materials with Micro-Structure / Ed. H. Muhlhaus, J. Wiley. N.Y., 1995. P. 1–22.

PRESSURE INFLUENCE ON STABILITY OF COMPRESSED ELASTIC TUBE MADE OF MICROPOLAR MATERIAL

D.N. Sheydaikov

The paper is dedicated to the analysis of a hydrostatic pressure influence on buckling of compressed elastic cylindrical tube made of micropolar material. Two kinds of deformations are considered – an axial compression combined with the internal pressure and axial compression combined with the external pressure. The problem is investigated using three-dimensional nonlinear equations of the couple-stress theory. The stability analysis in the framework of the bifurcational approach is carried out. For the materially linear model of micropolar medium the linearized equilibrium equations are derived. By solving them numerically for several materials the critical curves are obtained and stability regions are constructed in the planes of the corresponding loading parameters. The influence of the material microstructure and tube geometry on the loss of stability is investigated.

Key words: nonlinear elasticity, micropolar medium, stability of deformable bodies, combined loading, microstructure influence.

REFERENCES

1. Cosserat E., Cosserat F. 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A, Hermann et Fils: 242 p. (In English).
2. Pal'mov V.A. 1964. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 28(3): 496–505. (In English).
3. Toupin R.A. 1964. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 17(5): 85–112. (In English).
4. Zhilin P.A. 1982. [Fundamental equations of non-classical theory of elastic shells]. *Trudy Leningradskogo Politehnicheskogo Instituta*. 386: 29–46. (In English).
5. Shkutin L.I. 1988. *Mehanika deformatsiy gibkikh tel*. [*Mechanics of deformations of flexible bodies*]. Novosibirsk, “Nauka”: 127 p. (In Russian).
6. Eremeyev V.A., Zubov L.M. 1994. On the stability of elastic bodies with couple-stresses. *Mechanics of Solids*. 29(3): 172–181. (In English).
7. Erofeev V.I. 1996. *Microstructured solids. Mathematical models and wave processes analysis*. Nizhny Novgorod, Intelservice Publishing Company: 80 p. (In English).
8. Zubov L.M. 1997. *Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies*. Berlin, Springer: 205 p. (In English).
9. Lurie A.I. 1990. *Non-linear theory of elasticity*. Amsterdam, North-Holland: 617 p. (In English).
10. Lakes R. 1995. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In: *Continuum models for materials with micro-structure*. H. Muhlhaus (Ed.). N.-Y., Wiley: 1–22. (In English).