ВЕСТНИК ЮЖНОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН Том 4, № 1, 2008, стр. 3–7

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

РЕКУРРЕНТНАЯ ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ГРИНА МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

© 2008 г. О.Д. Пряхина[1], А.В. Смирнова[1]

В работе впервые получены рекуррентные формулы, определяющие элементы и определитель матрицы-символа Грина динамической пространственной задачи о колебаниях многослойной среды.

Рассматривается динамическая пространственная задача о гармонических колебаниях многослойной упругой среды, вызванных поверхностным силовым воздействием. Среда представляет собой пакет из N слоев толщины $H = 2\sum_{i=1}^{N} h_i$, жестко соединенных между собой, и занимает область $-H \le z \le 0$, $-\infty \le x, y \le +\infty$. Верхняя грань пакета подвержена внешнему воздействию, характеризуемому трехмерным вектором напряжений $\mathbf{t}_0(x, y)$, нижняя грань жестко сцеплена с недеформируемым основанием.

Строится решение краевой задачи [1]

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = 0,$$

$$\mathbf{D}_0\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)\mathbf{w}(x,y,z)\Big|_{z=0} = \mathbf{t}_0(x,y), \qquad (1)$$

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0 \qquad (2)$$

с непрерывными условиями для векторов напряжений и перемещений на границах раздела слоев

$$\mathbf{t}(x,y,z)\big|_{z=H_k+0} = \mathbf{t}(x,y,z)\big|_{z=H_k-0} = \mathbf{t}_k(x,y),$$

$$\mathbf{w}(x,y,z)\big|_{z=H_k+0} = \mathbf{w}(x,y,z)\big|_{z=H_k-0} = \mathbf{w}_k(x,y), \qquad (3)$$

$$k = 1, 2, ..., N-1, \quad H_k = -2\sum_{n=1}^{k} h_n.$$

Здесь $\mathbf{L}$ и $\mathbf{D}_0$ – дифференциальные матричные операторы соответственно Ламе и граничных условий [1, 2].

Введем локальные системы координат

$$x_k = x, \quad y_k = y,$$

$$z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, ..., N.$$

Чтобы воспользоваться специальным решением, полученным в работе [1] для одного слоя, применим к граничным условиям (1)–(3) преобразование Фурье по переменным x, y и произведем формальное разделение слоев. Тогда трансформанта Фурье решения краевой задачи для k-го слоя будет определяться выражением

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{T}_k, \qquad (4)$$

$$-h_k \le z_k \le h_k, \quad k = 1, 2, ..., N.$$

В выражении (4) $\mathbf{T}_k$ – векторы, характеризующие взаимодействие между слоями, $\mathbf{T}_0$ – вектор, заданный на поверхности среды, $\mathbf{W}_k(z_k)$ – вектор перемещений точек k-го слоя с текущей локальной координатой, изменяющейся в ограниченных пределах $| z_k | \le h_k$.

Матрицы $\mathbf{B}_\pm(z_k)$ для различных типов сред имеют структуру, приведенную в [1]. Отметим, что при вычислении элементов матриц $\mathbf{B}_\pm(z_k)$ в (4) следует использовать механические и геометрические параметры k-го слоя.

Поскольку на линиях раздела слоев имеют место непрерывные граничные условия для перемещений, то условия стыковки слоев имеют вид

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}), \quad k = 1, 2, ..., N-1, \qquad (5)$$

условие на нижней грани пакета слоев

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0. \qquad (6)$$

Заметим, что условия непрерывности напряжений на стыках слоев, согласно представлению (4), выполняются автоматически.

Из (5) имеем рекуррентное соотношение, позволяющее определить векторы $\mathbf{T}_k$ через заданный вектор $\mathbf{T}_0$

$$\mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{T}_{k-1} + [\mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{B}_+(h_{k+1})]\mathbf{T}_k = \\ = \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{T}_{k+1}. \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{F}_1(h_N) = \mathbf{B}_-(-h_N),$$

$$\mathbf{F}_{k+1}(h_{N-k}, h_{N-k+1}, ..., h_N) = \mathbf{B}_-(-h_{N-k}) -$$

[1] Кубанский государственный университет, Краснодар.

$$-\mathbf{B}_+(-h_{N-k+1})+\mathbf{B}_-(h_{N-k+1})\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{N-k+1}), \quad (8)$$
$$k=1,2,...,N-1;$$
$$\mathbf{K}_m(h_{N+1-m},...,h_N)=\mathbf{B}_+(h_{N+1-m})-$$
$$-\mathbf{B}_-(h_{N+1-m})\mathbf{F}_m^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{N+1-m}), \quad (9)$$
$$m=1,2,...,N.$$

Нижний индекс у матриц указывает на количество, а нижний индекс у аргументов – на номера слоев, от параметров которых зависят элементы матриц. Явно указанный первый аргумент однозначно определяет эту зависимость, поэтому далее в аргументах матриц будем приводить только первый, например $\mathbf{F}_3(h_2) \equiv \mathbf{F}_3(h_2, h_3, h_4)$.

Как следствие из (8), (9) для $\mathbf{F}_{k+1}$ и $\mathbf{K}_m$ получаются соотношения

$$\mathbf{F}_1(h_N) = \mathbf{B}_-(-h_N),$$
$$\mathbf{F}_{k+1}(h_{N-k})=\mathbf{B}_-(-h_{N-k})-\mathbf{K}_k(h_{N-k+1}), \quad (10)$$
$$k=1,2,...,N-1;$$

$$\mathbf{K}_1(h_N)=\mathbf{B}_+(h_N)-\mathbf{B}_-(h_N)\mathbf{B}_-(-h_N)^{-1}\mathbf{B}_+(-h_N),$$
$$\mathbf{K}_m(h_{N+1-m})=\mathbf{B}_+(h_{N+1-m})-$$
$$-\mathbf{B}_-(h_{N+1-m})\mathbf{B}_-(-h_{N+1-m})-$$
$$-\mathbf{K}_{m-1}(h_{N-m})^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{N+1-m}), \quad (11)$$
$$m=2,3,...,N.$$

Полагая в (4) $k = N$ и $z_k = -h_N$ с учетом (6), находим

$$\mathbf{T}_N=-\mathbf{F}_1^{-1}(h_N)\mathbf{B}_+(-h_N)\mathbf{T}_{N-1}. \quad (12)$$

Используя (7), (12), выразим напряжения $\mathbf{T}_k$ на границах слоев через заданный вектор $\mathbf{T}_0$:

$$\mathbf{T}_k=\left[(-1)^k\prod_{i=k}^{1}\mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i)\mathbf{B}_+(-h_i)\right]\mathbf{T}_0, \quad (13)$$
$$k=1,2,...,N.$$

Обозначим

$$\mathbf{R}_{km}=\begin{cases}\mathbf{I}, \; k=m,\\ (-1)^{(k-m)}\prod\limits_{i=k}^{m+1}\mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i)\mathbf{B}_+(-h_i), \; k\neq m,\end{cases} \quad (14)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Тогда (13) запишется

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{R}_{k0}\mathbf{T}_0, \quad k=1,2,...,N. \quad (15)$$

Перемещения точек k-го слоя определим, подставив (15) в (4):

$$\mathbf{W}_k(z_k)=\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{R}_{(k-1)0}\mathbf{T}_0-$$
$$-\mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_{N-k+1}^{-1}(h_k)\mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{R}_{(k-1)0}\mathbf{T}_0, \quad (16)$$
$$k=1,2,...,N.$$

Полагая в (16) последовательно $z_k = h_k$, $k=1,2,...,N$, выразим векторы перемещений точек, принадлежащих границам раздела слоев, через вектор заданных поверхностных усилий:

$$\mathbf{W}_k(h_k)=\mathbf{K}_{N-k+1}(h_k)\mathbf{R}_{(k-1)0}\mathbf{T}_0, \quad (17)$$
$$k=1,2,...,N.$$

Соотношения (15), (17) определяют напряжения и перемещения в плоскостях раздела слоев, вызванные заданной поверхностной нагрузкой. Особый интерес представляет матричное выражение, определяющее связь между напряжениями и перемещениями на поверхности многослойной среды:

$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{K}_N(h_1)\mathbf{T}_0. \quad (18)$$

Выполнение в (18) обращения преобразования Фурье приводит к системе интегральных уравнений (СИУ) динамической задачи для многослойного основания с матрицей-символом ядра

$$\mathbf{K}_N=\left\|K_{ij}^N\right\|_{i,j=1}^3$$

Приведем примеры записи функционально-матричных соотношений (15), (17) для некоторых частных случаев.

Пример 1. Пусть $N = 1$, что соответствует однородному слою толщины $2h_1$ с жестко защемленной нижней гранью. В этом случае

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_{10}\mathbf{T}_0,$$
$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{K}_1(h_1)\mathbf{R}_{00}\mathbf{T}_0 \equiv \mathbf{K}_1(h_1)\mathbf{T}_0,$$

где

$$\mathbf{R}_{10}=-\mathbf{F}_1^{-1}(h_1)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{K}_1(h_1)=\mathbf{B}_+(h_1)-\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}(h_1)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{F}_1(h_1) = \mathbf{B}_-(-h_1).$$

Пример 2. При $N = 2$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_{10}\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{R}_{20}\mathbf{T}_0;$$
$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{K}_2(h_1, h_2)\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{W}_2(h_2) = \mathbf{K}_1(h_2)\mathbf{R}_{10}\mathbf{T}_0.$$

Здесь

$$\mathbf{R}_{10}=-\mathbf{F}_2^{-1}(h_1,h_2)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{R}_{20}=\mathbf{F}_1^{-1}(h_2)\mathbf{B}_+(-h_2)\mathbf{F}_2^{-1}(h_1,h_2)\mathbf{B}_+(-h_1);$$
$$\mathbf{F}_2(h_1, h_2) = \mathbf{B}_-(-h_1) - \mathbf{K}_1(h_2),$$
$$\mathbf{K}_2(h_1) \equiv \mathbf{K}_2(h_1, h_2) =$$
$$=\mathbf{B}_+(h_1)-\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{B}_+(-h_1).$$

Пример 3. Для трехслойного пакета (N = 3) имеем

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}_{10}\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{R}_{20}\mathbf{T}_0, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{R}_{30}\mathbf{T}_0;$$
$$\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{K}_3(h_1, h_2, h_3)\mathbf{T}_0,$$
$$\mathbf{W}_2(h_2) = \mathbf{K}_2(h_2, h_3)\mathbf{R}_{10}\mathbf{T}_0,$$
$$\mathbf{W}_3(h_3) = \mathbf{K}_1(h_3)\mathbf{R}_{20}\mathbf{T}_0,$$

где

$$\mathbf{R}_{10} = -\mathbf{F}_3^{-1}(h_1, h_2, h_3)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{R}_{20} = \mathbf{F}_2^{-1}(h_2, h_3)\mathbf{B}_+(-h_2)\mathbf{F}_3^{-1}(h_1, h_2, h_3)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{R}_{30} = -\mathbf{F}_1^{-1}(h_3)\mathbf{B}_-(-h_3)\mathbf{F}_2^{-1}(h_2, h_3)\times$$
$$\times\mathbf{B}_+(-h_2)\mathbf{F}_3^{-1}(h_1, h_2, h_3)\mathbf{B}_+(-h_1),$$
$$\mathbf{F}_3(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{B}_-(-h_1) - \mathbf{K}_2(h_2, h_3),$$
$$\mathbf{K}_3(h_1) \equiv \mathbf{K}_3(h_1, h_2, h_3) =$$
$$= \mathbf{B}_+(h_1) - \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_3^{-1}\mathbf{B}_+(-h_1).$$

Заметим, что все соотношения записаны в локальных системах координат; $\mathbf{T}_N$ – напряжения, возникающие в области жесткой заделки пакета, $\mathbf{W}_1(h_1)$ – перемещения точек его поверхности.

Описанная рекуррентная процедура матричных вычислений символа ядра СИУ отличается от предложенной в [1] представлением вспомогательных матриц $\mathbf{F}_{k+1}$ в форме (10) через матрицы-символы Грина $\mathbf{K}_k$, построенные на предыдущем k-м шаге. Указанное представление позволило получить рекуррентные матричные формулы (11), а также рекуррентные функциональные соотношения для вычисления элементов и определителей матриц-символов СИУ многослойных сред.

Для пакета N слоев с жестко защемленной нижней гранью элементы матрицы-символа Грина $\mathbf{K}_N = \left\| K_{ij}^N \right\|_{i,j=1}^3$ можно записать в форме

$$K_{11}^N = \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k_{11}^N(\lambda) + \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}_{11}^N(\lambda),$$
$$K_{22}^N = \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k_{11}^N(\lambda) + \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}_{11}^N(\lambda), \quad (19)$$
$$K_{33}^N = \frac{k_{22}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$
$$K_{12}^N = K_{21}^N = \frac{\alpha\beta}{\lambda^2}\left(\frac{k_{11}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)} - \frac{\tilde{k}_{11}^N(\lambda)}{\Delta_{1N}(\lambda)}\right),$$
$$K_{13}^N = -K_{31}^N = i\alpha\frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$
$$K_{23}^N = -K_{32}^N = i\beta\frac{k_{12}^N(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)}.$$

Элементы K_{ij}^N зависят от параметров преобразования Фурье α, β ($\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$), частоты гармонических колебаний ω, а также геометрических и физико-механических параметров слоев – толщины $2h_k$, плотности ρ_k, модуля сдвига μ_k, коэффициента Пуассона ν_k, $k = 1, 2, ..., N$.

Для произвольного количества слоев N впервые получены рекуррентные формулы, определяющие элементы и определитель матрицы-символа Грина $\mathbf{K}_N(\alpha, \beta, \omega)$ в виде отношения целых функций. В случае N = 1:

$$k_{11}^1(h_1) = -\frac{1}{4}\sigma_{21}\varkappa_{21}^2[\sigma_{11}\sigma_{21}\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1) -$$
$$-\lambda^2\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)],$$
$$\tilde{k}_{11}^1(h_1) = \frac{\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)}{\sigma_{21}},$$
$$k_{12}^1(h_1) =$$
$$= \frac{1}{2}\{\sigma_{11}\sigma_{21}(\gamma_1 + \lambda^2)[\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1) - 1] -$$
$$-(\gamma_1\lambda^2 + \sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)\};$$

функция $k_{22}^1(h_1)$ получается при циклической замене $\sigma_{11} \Leftrightarrow \sigma_{21}$ в $k_{11}^1(h_1)$;

$$\Delta_{21}(h_1) = \frac{1}{2}\sigma_{11}\sigma_{21}\left[\frac{1}{4}\varkappa_{21}^4 - (\gamma_1 + \lambda^2)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{4}\varkappa_{21}^4 + (\gamma_1 + \lambda^2)^2\right)\operatorname{ch}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)\right] -$$
$$-\lambda^2\left(\gamma_1^2 + \sigma_{11}^2\sigma_{21}^2\right)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1),$$
$$\Delta_{11}(h_1) = \operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1).$$

Здесь

$$\gamma_k = \lambda^2 - 0{,}5\varkappa_{2k}^2, \quad \sigma_{2k}^2 = \lambda^2 - \varkappa_{2k}^2,$$
$$\sigma_{1k}^2 = \lambda^2 - \varepsilon_k\varkappa_{2k}^2, \quad \varkappa_{2k}^2 = \frac{\rho_k\omega^2}{\mu_k},$$
$$\varepsilon_k = \frac{1 - 2\nu_k}{2 - 2\nu_k}.$$

Определитель матрицы Грина однослойной среды

$$\det\mathbf{K}_1(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{m=1}^{2}\frac{D_{m1}(h_1)}{\Delta_{m1}(h_1)},$$

где

$$D_{21}(h_1) = \frac{1}{4}(\lambda^4 + \sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\operatorname{sh}(2\sigma_{11}h_1)\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}[\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1],$$

$$D_{11}(h_1)=\tilde{k}_{11}^1(h_1).$$

Для $N \geq 2$ имеем рекуррентные соотношения для вычисления функций (19), формирующих элементы матрицы Грина $\mathbf{K}_N$ слоистой среды:

$$k_{1i}^N(h_1,h_2,...,h_N)=k_{1i}^-(h_1)D_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+k_{1i}^1(h_1)\Delta_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+L_{i1}(h_1)k_{11}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+L_{i2}(h_1)k_{22}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+L_{i3}(h_1)k_{12}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N),\quad i=1,2,\qquad (20)$$
$$\tilde{k}_{11}^N=\tilde{k}_{11}^N(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+\Delta_{11}(h_1)\tilde{k}_{11}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)\,.$$

Элемент $k_{22}^N(h_1,h_2,...,h_N)$ получается из $k_{11}^N(h_1,h_2,...,h_N)$ циклической заменой $\sigma_{1k} \Leftrightarrow \sigma_{2k}$ для всех $k=1,2,...,N$.

В (20) приняты обозначения

$$L_{11}(h_1)=\frac{1}{4}\sigma_{11}\sigma_{21}\varkappa_{21}^4\,\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1),$$

$$L_{12}(h_1)=\frac{1}{4}\sigma_{21}^2\varkappa_{21}^4\,\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1),$$

$$L_{13}(h_1)=2\lambda^2L_{22}(h_1),\quad L_{22}(h_1)=-\frac{1}{2}\sigma_{21}\varkappa_{21}^2\times$$
$$\times[\sigma_{11}\sigma_{21}\,\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1)-$$
$$-\gamma_1\,\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)],$$
$$L_{23}(h_1)=\sigma_{11}\sigma_{21}(\gamma_1+\lambda^2)^2-$$
$$-4\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}\gamma_1\,\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)+$$
$$+2\lambda^2(\gamma_1^2+\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1).$$

Функция $L_{22}(h_1)$ при циклической замене $\sigma_{11} \Leftrightarrow \sigma_{21}$ дает $L_{21}(h_1)$.

Функции Δ_{mN}, D_{mN} даются рекуррентными формулами

$$\Delta_{2N}=\Delta_{20}(h_1)D_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+\Delta_{21}(h_1)\Delta_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+k_{11}^-(h_1)k_{22}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+k_{22}^-(h_1)k_{11}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+2\lambda^2k_{12}^-(h_1)k_{12}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N),\qquad (21)$$
$$\Delta_{1N}=\Delta_{10}(h_1)D_{1(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+\Delta_{11}(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N),$$
$$D_{2N}=\Delta_{21}(h_1)D_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+D_{21}(h_1)\Delta_{2(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+k_{11}^1(h_1)k_{22}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+k_{22}^1(h_1)k_{11}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+2\lambda^2k_{12}^1(h_1)k_{12}^{N-1}(h_2,h_3,...,h_N),$$
$$D_{1N}=\Delta_{11}(h_1)D_{1(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N)+$$
$$+D_{11}(h_1)\Delta_{1(N-1)}(h_2,h_3,...,h_N).$$

Здесь $k_{ij}^-(h_1)$, $\Delta_{i0}(h_1)$ (i = 1, 2) имеют вид

$$k_{11}^-(h_1)=-\sigma_{21}\varkappa_{21}^2[\gamma_1^2\,\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)-$$
$$-\lambda^2\sigma_{11}\sigma_{21}\,\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1)],$$
$$\tilde{k}_{11}^-(h_1)=\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1),$$
$$k_{12}^-(h_1)=2\sigma_{11}\sigma_{21}\gamma_1(\gamma_1+\lambda^2)[\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\times$$
$$\times\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1]-2(\gamma_1^3+\lambda^2\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\times$$
$$\times\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1),$$
$$\Delta_{20}(h_1)=4(\gamma_1^4+\lambda^4\sigma_{11}^2\sigma_{21}^2)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1)\,\mathrm{sh}(2\sigma_{11}h_1)-$$
$$-8\sigma_{11}\sigma_{21}\gamma_1^2\lambda^2[\mathrm{ch}(2\sigma_{11}h_1)\,\mathrm{ch}(2\sigma_{21}h_1)-1],$$
$$\Delta_{10}(h_1)=\sigma_{21}\,\mathrm{sh}(2\sigma_{21}h_1).$$

Элемент $k_{22}^-(h_1)$ получается из $k_{11}^-(h_1)$ циклической заменой $\sigma_{11} \Leftrightarrow \sigma_{21}$.

Установлено, что определитель матрицы-символа Грина пространственной задачи для пакета N слоев, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, представим в виде отношения целых функций

$$\det\mathbf{K}_N=\prod_{m=1}^{2}\frac{D_{mN}(h_1,h_2,...,h_N)}{\Delta_{mN}((h_1,h_2,...,h_N)},\qquad (21)$$

где m = 1 и m = 2 отвечают соответствующим задачам в антиплоской и плоской постановках.

Полученные представления элементов k_{ij}^N, $\tilde{k}_{ij}^N$ и $\det\mathbf{K}_N$ (19)–(22) позволяют эффективно исследовать дисперсионные свойства многослойной среды, знание которых необходимо при построении решений систем интегральных уравнений динамических смешанных задач методом фиктивного поглощения или факторизации [1–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017-офи), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
3. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
4. *Кардовский И.В., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения для плоских задач об интерфейсных трещинах // ДАН. 2006. Т. 410. № 6. С. 759–762.
5. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.

RECURRENT PROCEDURE FOR CALCULATION OF GREEN MATRIX ELEMENTS FOR MULTILAYER MEDIUM

O.D. Pryakhina, A.V. Smirnova

In the paper the first recurrence formulas, defining elements and a determinant of Green matrix-symbol for a dynamic spatial problem about oscillations of the multilayer medium are obtained.

REFERENCES

1. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh*. [*The dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable environments*]. Moscow, Nauchnyy mir Publ.: 246 p. (In Russian).
2. Babeshko V.A. 1984. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti*. [*The generalized method of factorization in the space of dynamic mixed problems of elasticity*]. Moscow, Nauka Publ.: 254 p. (In Russian).
3. Pryakhina O.D., Smirnova A.V. 2005 [Analytical method for solving dynamic problems for layered media with inclusions]. *Izv. RAN. MTT.* (2): 87–97. (In Russian).
4. Kardovskiy I.V., Pryakhina O.D. 2006. [Fictitious absorption method for plane problem of interface cracks]. *DAN.* 410(6): 759–762. (In Russian).
5. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. 2006. [The integral and differential factorization method]. *DAN.* 410(2): 168–172. (In Russian).