ВЕСТНИК ЮЖНОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА Том 10, № 2, 2014, стр. 3–8

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОДНА ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2014 г. В.В. Калинчук[1,2], Г.Ю. Леви[1,2]

Поступила 09.01.2014

В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн рассмотрена связанная контактная задача о колебаниях преднапряженного термоупругого полупространства под действием осциллирующего на поверхности жесткого штампа. Предполагается, что непроводящий тепло штамп совершает колебания по гармоническому закону, поверхность полупространства вне области контакта свободна от механических напряжений и теплоизолирована. Методами операционного исчисления линеаризованная в окрестности начального напряженного состояния система дифференциальных уравнений в частных производных сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение последней позволяет построить функцию Грина, на основе которой строится система интегральных уравнений относительно неизвестных функций распределения напряжений и теплового потока в зоне контакта. В качестве примера рассмотрена смешанная задача о вертикальных колебаниях непроводящего тепло жесткого штампа на поверхности термоупругого полупространства. Изучено влияние предварительного нагрева и начальных напряжений на динамическую жесткость полупространства, результаты оформлены в виде графиков. Установлено, что начальное напряженное состояние существенным образом влияет на динамическую жесткость среды, в частности гидростатическое напряженное состояние может компенсировать предварительный нагрев. Другие виды напряженного состояния приводят к определенной анизотропии, а именно: одноосные начальные деформации изменяют динамическую жесткость среды и в зависимости от направления существует возможность компенсации влияния предварительного нагрева.

Ключевые слова: термоупругость, динамика, контактная задача, начальные деформации, предварительный нагрев, термоупругие волны, преднапряжения, функция Грина термоупругого полупространства, динамическая жесткость.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время количество публикаций по исследованиям процессов возбуждения механических колебаний за счет теплового воздействия существенно возросло. Достаточно полный обзор литературы приведен в [1; 2]. В большинстве работ для исследования используются различные инженерные подходы, приближенно учитывающие наличие начальных напряжений, предварительного нагрева и т.д. В работе [3] в двумерной постановке на основе определяющих соотношений, полученных в работе [4] за счет последовательной линеаризации нелинейных уравнений связанной термоупругости, было проведено качественное исследование термоупругих эффектов, возникающих в преднапряженной термоупругой среде. В [5] рассмотрена задача о колебаниях термоупругого преднапряженного слоя под действием распределенной поверхностной нагрузки. Предполагалось, что материал слоя гиперупругий, первоначально изотропный. В качестве определяющих соотношений использовалась усеченная форма представления удельной потенциальной энергии материала. В [6] рассмотрена связанная смешанная задача для термоупругого слоисто-неоднородного полупространства, предложены методы ее решения. В работе [7] построена трехмерная функция Грина задачи о колебаниях преднапряженного термоупругого слоя, исследованы ее свойства. В [8] рассмотрена контактная задача о колебаниях

[1] Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences), 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41; e-mail: kalin@ssc-ras.ru; galias@yandex.ru

[2] Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики им. И.И. Воровича Южного федерального университета (The I.I. Vorovich Research Institute of Mechanics and Applied Mathematics of the Southern Federal University), 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.

предварительно напряженного термоупругого слоя в трехмерной постановке. В настоящей работе рассмотрена в трехмерной постановке задача о колебаниях предварительно напряженного термоупругого полупространства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассмотрение вводится прямоугольная система координат Лагранжа x_1, x_2, x_3, связанная с естественным состоянием среды. Рассмотрим термоупругое полупространство, занимающее область $|x_1|, |x_2| \le \infty,\ x_3 \le 0,$ колебания в котором вызваны либо распределенным в области Ω на поверхности смещением среды $\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$, либо температурой $\tau_0 e^{-i\omega t}$ (ω – круговая частота колебаний). Вне области Ω поверхность среды свободна от механических напряжений и теплоизолирована. На бесконечности выполняется условие затухания. Начальные напряжения в полупространстве и начальная температура предполагаются однородными [9; 10]. Колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, то есть все функции представляются в виде $f = f_0 e^{-i\omega t}$, далее экспоненты можно опускать.

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Введем в рассмотрение расширенный вектор перемещений среды $\mathbf{u}^{\tau}(x_1, x_2, x_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ($\{u_1, u_2, u_3\}$ – компоненты вектора механических перемещений, u_4 – температура). В общем случае колебания преднапряженной термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [4]

$$\begin{gathered}
c^*_{1111}u_{1,11} + c^*_{2112}u_{1,22} + c^*_{3113}u_{1,33} + \\
+ c_1 u_{2,12} + c_2 u_{3,13} - \beta^*_{11}u_{4,1} = \rho_0 u_{1,tt}, \\
c_1 u_{1,12} + c^*_{1221}u_{2,11} + c^*_{2222}u_{2,22} + \\
+ c^*_{3223}u_{2,33} + c_3 u_{3,23} - \beta^*_{22}u_{4,2} = \rho_0 u_{2,tt}, \\
c_2 u_{1,13} + c_3 u_{2,23} + c^*_{1331}u_{3,11} + c^*_{2332}u_{3,22} + \\
+ c^*_{3333}u_{3,33} - \beta^*_{33}u_{4,3} = \rho_0 u_{3,tt};
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\lambda_{11}u_{4,11} + \lambda_{22}u_{4,22} + \lambda_{33}u_{4,33} = \\
= \tau_1 \frac{\rho_0 c_\varepsilon}{\tau_0} u_{4,t} + \tau_1(\beta^*_{11}u_{1,1t} + \beta^*_{22}u_{2,2t} + \beta^*_{33}u_{3,3t}).
\end{gathered} \tag{2}$$

Участвующие в представлениях (1), (2) коэффициенты с учетом начальной деформации и предварительного температурного воздействия определяются выражениями [5]

$$c^*_{ijkl} = c_{ijkl}\nu_j\nu_k + P_{il}\delta_{jk},\ \beta^*_{ij} = \nu_j\beta_{ij}, \tag{3}$$

где P_{ij} – компоненты тензора Кирхгофа. В рамках линейной теории начально-деформированного состояния термоупругих тел компоненты тензора Кирхгофа представляются в виде

$$P_{ij} = \frac{1}{2}c_{ijkk}(\nu_k^2 - 1) - (\tau_1 - \tau_0)\beta_{ij}. \tag{4}$$

С учетом симметрии первоначального материала упругие и термоупругие константы в начально-деформированном состоянии (3) принимают вид [8; 11; 12]

$$\begin{gathered}
c^*_{iiii} = c_{ii}\nu_i\nu_i + P_{ii},\ i = 1, 2, 3, \\
c^*_{iijj}c_{ij}\nu_i\nu_j,\ i, j = 1, 2, 3, \\
c^*_{ijij} = c_{44}\nu_j\nu_i,\ c^*_{ijji} = c_{44}\nu_j\nu_j + P_{ii}, \\
c^*_{ijji}c_{44}\nu_j\nu_j + P_{ii},\ i = 1, 2,\ j = 3, \\
c^*_{ijij} = c_{66}\nu_j\nu_i,\ c^*_{ijji} = c_{66}\nu_j\nu_j + P_{ii}, \\
c^*_{ijji} = c_{66}\nu_j\nu_j + P_{ii},\ i = 1, j = 2, \\
\beta^*_{ii} = \nu_i\beta_{ii},\ i = 1, 2, 3.
\end{gathered} \tag{5}$$

Необходимо учитывать $c_{13} = c_{23}$, $c_{66} = 0{,}5(c_{11} - c_{12})$.

Согласно формулам (5), в однородном начально-деформированном состоянии для гексагональных материалов класса 6*mm* справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
c^*_{1122} = c^*_{2211},\ c^*_{1133} = c^*_{3311},\ c^*_{2233} = c^*_{3322}, \\
c^*_{1212} = c^*_{2121},\ c^*_{1313} = c^*_{3131},\ c^*_{2323} = c^*_{3232}.
\end{gathered} \tag{6}$$

В формулах (1)–(3) c_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных, ρ_0 – плотность материала в естественном состоянии, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, τ_0 и τ_1 – соответственно температура тела в недеформированном и начальном деформированном состояниях, λ_{ij} – компоненты тензора коэффициентов удельной теплопроводности, $\beta_{ij} = \alpha_{ij}c_{ijkl}$ – компоненты тензора коэффициентов термоупругости, α_{ij} – компоненты тензора коэффициентов теплового расширения, $\lambda_k = 1 + \delta_k$, где δ_k ($k = 1, 2, 3$) – относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей a_k, совпадающих в естественной конфигурации с декартовыми координатами системы координат Лагранжа.

Будем рассматривать задачу в безразмерных величинах, используя следующие соотношения [1; 2]:

$$x'_i = \frac{\omega^* x_i}{V_p},\ \omega' = \frac{\omega}{\omega^*},\ t' = \omega^* t,\ \tau' = \frac{\tau}{\tau_0},$$

$$\tau_1' = \frac{\tau_1}{\tau_0},\ \omega^* = \frac{c_\varepsilon c_{11}}{\lambda_{11}},\ \mathrm{E} = \frac{\tau_0 \beta_{11}^2}{\rho c_\varepsilon c_{11}}, \qquad (7)$$

$$u_i' = \frac{u_i \rho \omega^* V_p}{\beta_{11}\tau_0},\ c_{ijkl'}^* = \frac{c_{ijkl}^*}{c_{11}},\ \beta_{ij'}^* = \frac{\beta_{ij}^*}{\beta_{11}},$$

$$\lambda_{ij}' = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}},\ \theta_{ij}' = \frac{\theta_{ij}}{\beta_{11}\tau_0},\ g' = \frac{g V_p}{\omega^* \tau_0},\ u_4 = \frac{u_4}{\tau_0}.$$

Здесь E – постоянная термоупругой связи, ω^* – нормализованная частота среды, V_p – скорость продольной волны недеформированного материала. Далее штрихи опущены.

С учетом формул (7) уравнения движения термоупругой среды (1), (2) в безразмерных параметрах принимают вид [7; 8]

$$\begin{gathered} c_{1111}^* u_{1,11} + c_{2112}^* u_{1,22} + c_{3113}^* u_{1,33} + \\ + \omega^2 u_1 + c_1 u_{2,12} + c_2 u_{3,13} - \beta_1 u_{4,1} = 0, \\ c_1 u_{1,12} + c_{1221}^* u_{2,11} + c_{2222}^* u_{2,22} + \\ + c_{3223}^* u_{2,33} + \omega^2 u_2 + c_3 u_{3,23} - \beta_2 u_{4,2} = 0, \\ c_2 u_{1,13} + c_3 u_{2,23} + c_{1331}^* u_{3,11} + c_{2332}^* u_{3,22} + \\ + c_{3333}^* u_{3,33} + \omega^2 u_3 - \beta_3 u_{4,3} = 0, \\ u_{4,11} + \lambda_2 u_{4,22} + \lambda_3 u_{4,33} + i\omega\tau_1 u_4 + \\ + i\omega \mathrm{E}^* (\beta_1 u_{1,1} + \beta_2 u_{2,2} + \beta_3 u_{3,3}) = 0. \end{gathered} \qquad (8)$$

В уравнениях (8) использованы обозначения:

$$\lambda_2 = \lambda_{22}, \lambda_3 = \lambda_{33}, \mathrm{E}^* = \tau_1 \mathrm{E}, \qquad (9)$$
$$\beta_1 = \beta_{11}^*, \beta_2 = \beta_{22}^*, \beta_3 = \beta_{33}^*.$$

Для удобства дальнейшего изложения введем расширенный вектор напряжения $\mathbf{q}^\tau = \{\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}, u_{4,3}\}$ термоупругой среды. С учетом введенных обозначений линеаризованные граничные условия примут следующий вид: $x_3 = 0$

$$\mathbf{u}^\tau = \mathbf{u}_0(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (10)$$
$$\mathbf{q}^\tau = 0, (x_1, x_2) \notin \Omega,$$

$x_3 \to -\infty$

$$\mathbf{u}^\tau \to 0. \qquad (11)$$

Для построения решения краевой задачи (8), (10), (11) используем решение вспомогательной краевой задачи. С этой целью полагаем, что вместо смешанного условия (10) в области контакта имеет место однородное условие: $x_3 = 0$

$$\mathbf{q}^\tau = \mathbf{q}_0, (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (12)$$
$$\mathbf{q}^\tau = 0, (x_1, x_2) \notin \Omega.$$

ФУНКЦИЯ ГРИНА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

После применения двумерного преобразования Фурье по координатам уравнения движения и теплопроводности (8) и граничные условия (12) примут вид

$$\begin{gathered} c_{3113} U_1' - P_1 U_1 - \alpha_1\alpha_2 c_1 U_2 - \\ - i\alpha_1 c_2 U_3' + i\alpha_1 \beta_{11} U_4 = 0, \\ - \alpha_1\alpha_2 c_1 U_1 + c_{3223} U_2' - P_2 U_2 - \\ - i\alpha_2 c_3 U_3' + i\alpha_2 \beta_{22} U_4 = 0, \\ - i\alpha_1 c_2 U_1' - i\alpha_2 c_3 U_2' + c_{3333} U_3' - \\ - P_3 U_3 + \beta_{33} U_4' = 0, \\ \alpha_1 \omega \beta_{11} E^* U_1 + \alpha_2 \omega \beta_{22} E^* U_2 + \\ + i\omega E^* \beta_{33} U_3' + \lambda_{33} U_4'' - P_4 U_4 = 0; \end{gathered} \qquad (13)$$

$x_3 = 0.$

$$\begin{gathered} c_{3113} U_1' - i\alpha_1 c_{1313} U_3 = Q_1, \\ c_{3223} U_2' - i\alpha_2 c_{1313} U_3 = Q_2, \\ c_{3333} U_3' - i\alpha_1 c_{1133} U_1 - i\alpha_2 c_{2233} U_2 - \beta_3 U_4 = Q_3, \\ U_4' = -Q_4. \end{gathered} \qquad (14)$$

Здесь $P_k = c_{1kk1}\alpha_1^2 + c_{2kk2}\alpha_2^2 - \omega^2$, $k = 1, 2, 3$, $P_4 = \lambda_{11}\alpha_1^2 + \lambda_{22}\alpha_2^2 - i\omega\tau_1$, α_1, α_2 – параметры преобразования, $\mathbf{U}^\tau$, $\mathbf{Q}^\tau$ – трансформанты расширенных векторов смещения $\mathbf{u}^\tau$ и нагрузки $\mathbf{q}^\tau$, штрихом обозначены производные по x_3.

Решение (13) с граничными условиями (14) ищем в виде [4; 9]

$$\begin{gathered} U_p = -i\alpha_p \sum_{k=1}^{4} f_{pk} d_k e^{\sigma_k x_3},\ p = 1, 2, \\ U_3 = \sum_{k=1}^{4} f_{3k} d_k e^{\sigma_k x_3}, \\ U_4 = \sum_{k=1}^{4} f_{4k} d_k e^{\sigma_k x_3}. \end{gathered} \qquad (15)$$

Здесь σ_k – корни характеристического уравнения, полученного в [7; 8].

Неизвестные d_k, $k = 1, 2, 3, 4$, определяются из удовлетворения решением (15) граничных условий (14), таким образом, для нахождения d_k получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{Q}^\tau, \qquad (16)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где

$$l_{pk} = -i\alpha_p(c^*_{3pp3}\sigma_k f_{pk} + c^*_{p3p3}f_{3k}),\ p = 1, 2,$$
$$l_{3k} = -\alpha_1^2 c^*_{1133}f_{1k} - \alpha_2^2 c^*_{2233}f_{2k} + \quad (18)$$
$$+\sigma_k c^*_{3333}f_{3k} - \beta_3 f_{4k},$$
$$l_{4k} = \sigma_k f_{4k}.$$

Подставляя найденные d_k в (15), получаем решение краевой задачи (13), (14). Решение вспомогательной задачи (8), (12) получим, применив к выражениям (15) обратное преобразование Фурье:

$$\mathbf{u}^\tau(x_1, x_2, x_3) = \quad (19)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint_\Omega \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega)\mathbf{q}^\tau(\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

где $\mathbf{k}(s, t, x_3, \omega) = \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega)\times$

$\times e^{-i(\alpha_1 s+\alpha_2 t)}d\alpha_1 d\alpha_2$ – матрица функции Грина, элементы которой вычисляются по выражениям

$$K_{pj}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = -i\alpha_p\frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{4} f_{pk}\Delta_{jk}e^{\sigma_k x_3},\ p = 1, 2$$

$$K_{3j}(\alpha_1, a_2 x_3) = \frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{4} f_{3k}\Delta_{jk}e^{\sigma_k x_3}, \quad (20)$$

$$K_{4j}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{1}{\Delta_0}\sum_{k=1}^{4} f_{4k}\Delta_{jk}e^{\sigma_k x_3}.$$

Представление (19) определяет смещение произвольной точки термоупругого полупространства под действием заданной в области Ω нагрузки $\mathbf{q}^\tau(x_1, x_2)$. Для решения исходной задачи (8), (10), (11) в формуле (19) необходимо положить $x_3 = 0$ и учесть условие (10). В результате получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint_\Omega \mathbf{k}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, 0, \omega)\mathbf{q}^\tau(\xi, \eta)d\xi d\eta = \quad (21)$$
$$= \mathbf{u}_0(x_1, x_2),$$
$$\mathbf{k}(s, t, 0, \omega) = \quad (22)$$
$$= \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\mathbf{K}(\alpha_1, a_2, 0, \omega)e^{-i(\alpha_1 s+a_2 t)}d\alpha_1 d\alpha_2.$$

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЖЕСТКОГО ШТАМПА

Рассмотрим частный случай – плоскую задачу о колебаниях полупространства под действием жесткого штампа, т.е. при заданном распределенном на поверхности среды смещении $\mathbf{u}_0 = \{0, 0, u_{30}, 0\}$, как указано в (10). Полагаем, что область задания нагрузки имеет вид $\Omega = \{|x_1| \le 1, |x_2| \le \infty\}$, перемещения точек полупространства и напряжения вдоль оси x_2 отсутствуют, т.е. $u_2 \equiv 0$ и $q_2 \equiv 0$. Все остальные параметры задачи удовлетворяют условиям

$$f = f(x_1 x_3),\ \frac{\partial}{\partial x_2}f \equiv 0. \quad (23)$$

Из вышеизложенного следует, что задача сводится к скалярному аналогу интегрального уравнения (18), (19):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k_{33}(x_1 - \xi, 0, \omega)q_3(\xi)d\xi = u_{30}(x_1), \quad (24)$$

$$k_{33}(s, 0, \omega) = \int_\Gamma K_{33}(\alpha_1, 0, \omega)e^{-i\alpha_1 s}d\alpha_1. \quad (25)$$

Функция K_{33} определяется формулой (20) с той разницей, что участвующие в ее представлении функции Δ_0 и Δ_{jk} являются соответственно определителем и алгебраическим дополнением элемента с номером jk матрицы $\mathbf{A}^*$, получающейся из матрицы $\mathbf{A}$ (17) вычеркиванием второй строки и второго столбца при $\alpha_2 = 0$.

Решение интегрального уравнения (24) $q_3(x_1)$ можно получить с использованием метода фиктивного поглощения [13; 14]. Однако учитывая, что функция K_{33} не имеет вещественных нулей и полюсов, для решения уравнения (24) применим метод граничных элементов. С этой целью функцию $q_3(x_1)$ представим в виде

$$q_3(x_1) = \sum_{k=1}^{2M} C_k\varphi_k(x_1), \quad (26)$$

где $\varphi_k(x_1) = \begin{cases}1, x_1 \in [a_{k-1}, a_k]\\ 0, x_1 \notin [a_{k-1}, a_k]\end{cases}$, $k = 1, \ldots, 2M$, – система координатных функций.

Тогда реакция среды может быть получена из выражения

$$Q(\alpha_1, \omega)|_{\alpha_1=0} = \int_{-1}^{1} q_3(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1|_{\alpha_1=0} =$$
$$= \sum_{k=1}^{2M} C_k(a_k - a_{k-1}). \quad (27)$$

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим задачу о колебаниях полупространства из стали при условии, что в области [–1, 1] распределение смещения среды определяется формулой $u_{30} = \text{const} = 1$.

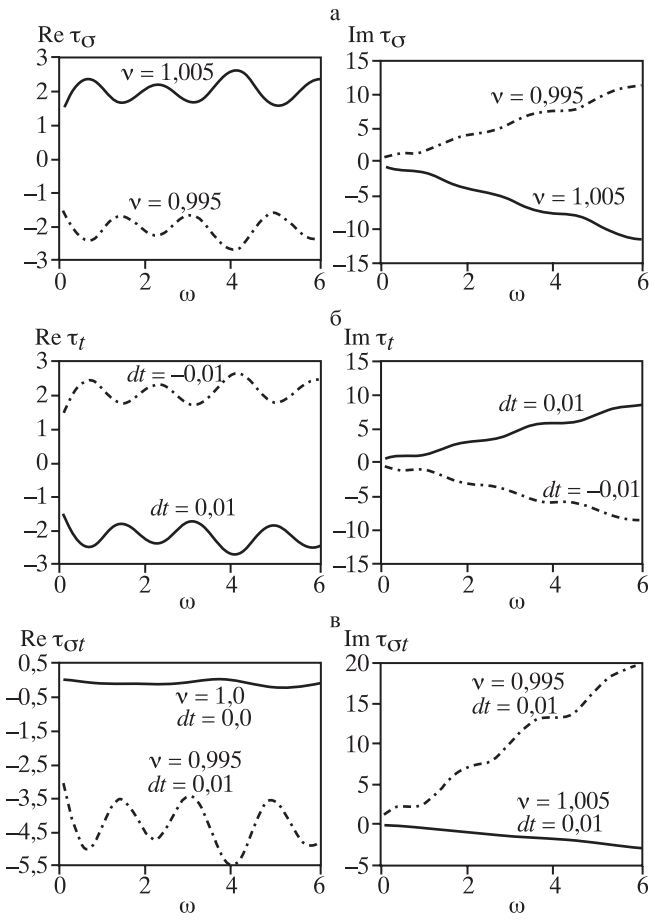

Рис. 1. Влияние гидростатических начальных деформаций и преднагрева на динамическую жесткость среды. а) $\nu = 1{,}005$; 0,995; б) $dt = -0{,}01$; 0,01; в) $dt = 0{,}01$, $\nu = 1{,}005$; 0,995

Для численных исследований выбран материал класса 6*mm*, ниже приведены его физические характеристики [12]:

$$c_{11} = 27{,}52 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{12} = 11{,}1 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$

$$c_{13} = 11{,}1 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$

$$c_{33} = 27{,}52 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{44} = 8{,}21 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$

$$\beta_{11} = 0{,}621 \cdot 10^{6}\ \text{Н/К/м}^2,$$

$$\beta_{33} = 0{,}551 \cdot 10^{6}\ \text{Н/К/м}^2,\ c_{\varepsilon} = 260\ \text{Дж/кг/К},$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{33} = 9\ \text{Вт/м/К},\ \rho_0 = 7823\ \text{кг/м}^3,\ \tau_0 = 280\ \text{К}.$$

На рисунках 1–3 приведены графики функции $\tau_\sigma(\omega) = (Q_\sigma(\omega) - Q(\omega)) \cdot 10^2$, $\tau_t(\omega) = (Q_t(\omega) - Q(\omega)) \cdot 10^2$, $\tau_{\sigma t}(\omega) = (Q_{\sigma t}(\omega) - Q(\omega)) \cdot 10^2$ для анализа влияния различных начальных деформаций и предварительных температурных воздействий на динамическую жесткость среды в рамках задачи о возбуждении акустических колебаний под воздействием жесткого штампа на теплоизолированной поверхности. Нижними индексами σ, t, σt обозначено присутствие начальных деформаций, преднагрева, сочетания начальных деформаций и температур соответственно. $Q(\omega)$ – динамическая жесткость среды, неподверженной начальному напряжению. Также введено обозначение $dt = \tau_1 - \tau_0$.

На рисунке 1 приведены эпюры разностей реакции среды $\tau_\sigma(\omega)$, $\tau_t(\omega)$, $\tau_{\sigma t}(\omega)$ в случае, когда начальные деформации гидростатические, т.е. действуют по всем направлениям одинаково (а), среда подвергается предварительному нагреву или охлаждению (б),

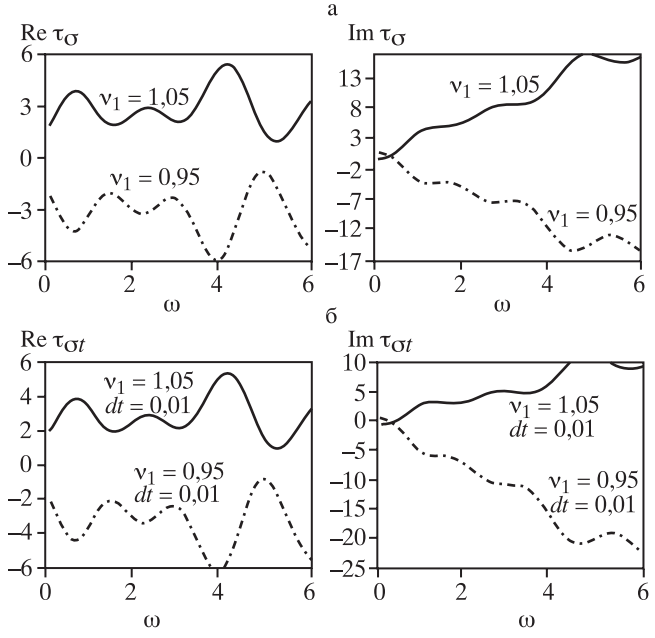

Рис. 2. Влияние начальных деформаций в направлении x_1 и преднагрева на динамическую жесткость среды: а) $\nu_1 = 1{,}05$; 0,95; б) $dt = 0{,}01$, $\nu_1 = 1{,}05$; 0,95

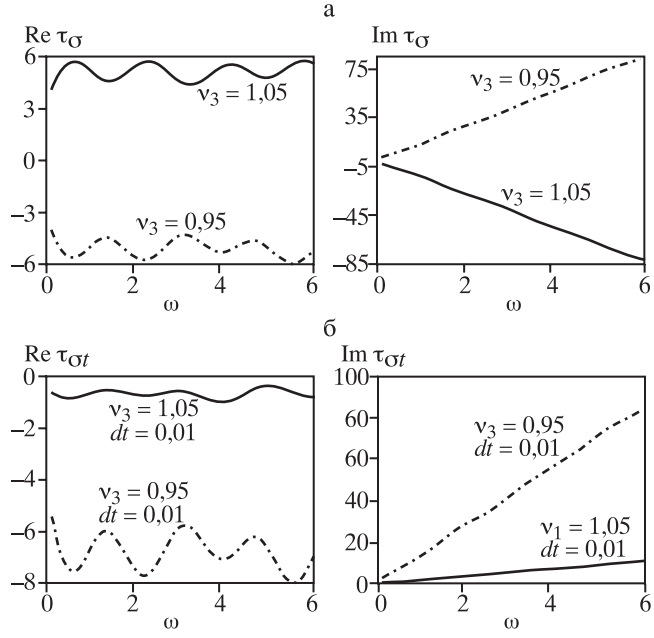

Рис. 3. Влияние начальных деформаций в направлении x_3 и преднагрева на динамическую жесткость среды: а) $\nu_3 = 1{,}05$; 0,95; б) $dt = 0{,}01$, $\nu_3 = 1{,}05$; 0,95

среда подвергается предварительному нагреву и сжатию или растяжению (в).

Из рисунка 1 следует, что начальные гидростатические механические напряжения и температурное воздействие на реакцию среды действуют значительно, причем противоположно. Таким образом, из рисунка 1в видно, что начальным нагревом можно компенсировать влияние гидростатического растяжения или, напротив, усилить действие сжатия.

На рисунке 2 приведены графики функций $\tau_\sigma(\omega)$, $\tau_t(\omega)$, $\tau_{\sigma t}(\omega)$, в случае, когда начальные деформации одноосные, действуют в направлении x_1. Видно, что начальные деформации в направлении распространения колебаний оказывают на порядок меньшее влияние на динамическую жесткость и это влияние не зависит от предварительного нагрева среды.

На рисунке 3 приведены графики функций $\tau_\sigma(\omega)$, $\tau_t(\omega)$, $\tau_{\sigma t}(\omega)$ в случае, когда начальные деформации одноосные, действуют в направлении x_3. Из рисунка следует, что вертикальные начальные деформации значительно влияют на динамическую жесткость среды и компенсируют предварительный нагрев.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-08-31613.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *J. of Appl. Phys.* 96 (7): 3645–3657.
2. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propogation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *J. of Sound and Vibration.* 284 (1–2): 227–248.
3. Суворова Г.Ю., Анджикович И.Е., Калинчук В.В. 2010. Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 6 (4): 18–23.
4. Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинчук В.В. 2008. Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 4 (3): 3–8.
5. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинчук В.В., Пузанов Ю.Е. 1999. Динамическая контактная задача для термоупругого слоя. *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.* 4: 109–110.
6. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. 2000. К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто-неоднородного полупространства. *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки.* 3: 72–74.
7. Калинчук В.В., Суворова Г.Ю., Белянкова Т.И. 2012. Функция Грина термоупругого предварительно напряженного слоя. *Вестник Южного научного центра*. 8 (3): 14–21.
8. Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Суворова Г.Ю. 2012. Об одной динамической контактной задаче для термоупругого предварительно напряженного слоя. *ПММ*. 76 (5): 811–822.
9. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., изд-во “Наука”: 512 с.
10. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. 2002. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных полуограниченных тел*. М., изд-во “Наука”: 240 с.
11. Новацкий В. 1970. *Динамические задачи термоупругости.* Пер. с польского Я. Рыхлевского. М., изд-во “Мир”: 301 с.
12. Най Дж. 1967. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц.* М., изд-во “Мир”: 385 с.
13. Ворович И.И., Бабешко В.А. 1979. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* М., изд-во “Наука”: 320 с.
14. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. 1999. *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах.* М., изд-во “Научный мир”: 246 с.

THE DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR PRESTRESSED THERMOELASTIC HALF-SPACE

V.V. Kalinchuk, G.Yu. Levi

Within the linearized theory of thermoelastic waves’ propagation in three-dimensional formulation the dynamic coupled problem of harmonic oscillations of a thermoelastic layer is considered. It is assumed that the non-conductive heat rigid punch oscillates harmonically and a half-space surface is free from mechanical stress and thermal insulated beyond of a loading area. By using methods of calculations, the system of partial differential equations, which takes into account an initial stress state, was reduced to the system of ordinary differential equations. The solution of the latter system allows constructing the Green’s function, which is a basis for the system of integral equations for the unknown functions of stress and heat flux distribution in the contact area. As an example, the mixed problem for the non-conductive heat rigid punch vertical oscillations on the thermoelastic half-space surface is considered. The effect of preheating and initial stress on the dynamic rigidity of the half-space is studied, the results are presented graphically. It has been ascertained that the initial stress state significantly affects the dynamic rigidity of the medium; in particular, the hydrostatic stress state compensates the preheating. Other modes of initial stress state lead to an anisotropy. The uniaxial initial strain affects the dynamic rigidity and ability to compensate the preheating depends on the direction.

Key words: thermoelasticity, dynamics, contact problem, initial strain, preheating, thermoelastic waves, initial stress, Green’s function for the pre-stressed half-space, dynamic rigidity.

REFERENCES

1. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics.* 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323. (In English).

2. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration.* 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036. (In English).

3. Suvorova G.Yu., Andjikovich I.E., Kalinchuk V.V. 2010. [Temperature effects in the dynamics of prestressed thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra.* 6(4): 18–23. (In Russian).

4. Sheydakov D.N., Belyankova T.I., Sheydakov N.E., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 4(3): 3–8. (In Russian).

5. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 1999. [Dynamic contact problem for thermo-elastic layer]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki.* 4: 109–110. (In Russian).

6. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2000. [The problem of dynamic mixed problems electroelasticity and thermoelasticity for layered inhomogeneous half-space]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*. 3: 72–74. (In Russian).

7. Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu., Belyankova T.I. 2012. [The Green function of prestressed thermoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra*. 8(3): 14–21. (In Russian).

8. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5): 537–546. (In English).

9. Lurie A.I. 1980. *Nelinejnaja teorija uprugosti*. [*Nonlinear theory of elasticity*]. M., “Nauka” Publishing: 512 p. (In Russian).

10. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. 2002. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlja predvaritel'no naprjazhennyh poluogranichennyh tel*. [*Dynamic contact problems for prestressed semi-bounded bodies*]. M., “Nauka” Publishing: 240 p. (In Russian).

11. Novackij V. 1970. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti.* [*Dynamic problems of thermoelasticity*]. M., “Mir” Publishing: 301 p. (In Russian).

12. Naj Dzh. 1967. *Fizicheskie svojstva kristallov i ih opisanie pri pomoshhi tenzorov i matric.* [*Physical properties of the crystals and their description by using tensors and matrices*]. M., “Mir” Publishing: 385 p. (In Russian).

13. Vorovich I.I., Babeshko V.A. 1979. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlja neklassicheskih oblastej.* [*Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical areas*]. M., “Nauka” Publishing: 320 p. (In Russian).

14. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryahina O.D. 1999. *Dinamika massivnyh tel i rezonansnye javlenija v deformiruemyh sredah.* [*Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media*]. M., “Nauchnyj mir” Publishing: 246 p. (In Russian).