

УДК 532.546.2.013.4:536.24

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКЦИИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2009 г. А.Д. Немцев¹, В.Г. Цибулин²

Для исследования режимов гравитационной конвекции многокомпонентной жидкости развита численная схема смещенных сеток. Разработана среда моделирования, позволяющая проводить расчет и визуализацию трехмерных режимов, продолжать их по параметрам задачи, исследовать переходы от стационарных к нестационарным движениям, вычислять спектр устойчивости стационарных режимов. Представлены результаты расчета конвекции двухкомпонентной жидкости в пористом параллелепипеде с двумя противоположными теплоизолированными боковыми гранями и линейным распределением температуры по высоте для других граней.

Ключевые слова: конвекция, пористая среда, многокомпонентная жидкость, схема смещенных сеток, семейство стационарных режимов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическое моделирование фильтрационной конвекции представляет большой интерес в связи с задачами геофизики и реализацией ряда технологических приложений. Из-за нелинейности уравнений, описывающих конвекцию в пористой среде, необходимо применение численных методов и развитие средств вычислительного эксперимента. Особые требования предъявляются к численным схемам, в частности, они должны наследовать существенные свойства рассматриваемых задач. К таким свойствам относится сильная неединственность решения, обнаруженная в плоской задаче фильтрационной конвекции на основе гипотезы Дарси [1]. В этой задаче от состояния механического равновесия ответвляется однопараметрическое семейство стационарных режимов, вызванное косимметрией системы. При определенных условиях в трехмерной задаче фильтрационной конвекции также возможно существование семейства плоских стационарных движений [2, 3]. Целью настоящей работы является разработка метода расчета и численное исследование переходов в трехмерной задаче с учетом многокомпонентности жидкости, насыщающей пористую среду.

Уравнения фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости с учетом массовых сил, источников тепла и примесей на основе модели

Дарси выведены в [4]. При отсутствии массовых сил и внутренних источников тепла уравнения в безразмерных переменных записываются в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \vec{v} + \sum_{r=1}^S \lambda_r \theta^r \vec{k}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$b_r \frac{\partial \theta^r}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta^r = \kappa_r \Delta \theta^r + \vec{v} \cdot \vec{k}, \quad r = 1, 2, \dots, S. \quad (3)$$

Здесь $\vec{v}(x, y, z, t)$ – векторное поле скорости, $p(x, y, z, t)$ – давление, $\theta^1(x, y, z, t)$ – температура, отсчитываемая от среднего значения, $S - 1$ – число примесей, $\theta^r(x, y, z, t)$, $r = 2, 3, \dots, S$ – отклонения массовых концентраций от средних значений, (x, y, z) – точка области D , занятой жидкостью, t – время, $\vec{k}(0,0,1)$ – орт, противоположный направлению силы тяжести, ε – коэффициент пористости, λ_r , κ_r – фильтрационные параметры Рэлея и коэффициенты диффузии для температуры и каждой компоненты примеси.

Задача рассматривается в параллелепипеде $D = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$. На границе для скорости принимается условие непротекания, для температуры на двух противоположных боковых гранях $\partial_1 D = \{y = 0\} \cup \{y = L_y\}$ ставится условие отсутствия теплового и концентрационных потоков. На остальных гранях $\partial_2 D = \partial D \setminus \partial_1 D$ поддерживается равновесное распределение температуры и концентраций примесей:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0, \quad (x, y, z) \in \partial D, \quad (4)$$

$$\partial_y \theta^r = 0, \quad (x, y, z) \in \partial_1 D, \quad \theta^r = 0, \quad (x, y, z) \in \partial_2 D, \quad r = 1, 2, \dots, S. \quad (5)$$

¹ Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41, anemtsev@mail.ru.

² Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105, tsybulin@math.rsu.ru.

Начальные условия задаются для скорости $\vec{v}$, температуры и компонент примесей θ^r :

$$\begin{aligned}\vec{v}(x, y, z, 0) &= \vec{v}_0(x, y, z), \\ \theta^r(x, y, z, 0) &= \varphi_0^r(x, y, z), \quad r = 1, 2, \dots, S.\end{aligned}$$

2. МЕТОД СМЕЩЕННЫХ СЕТОК

Дискретизация краевой задачи (1)–(5) осуществляется методом смещенных сеток [5], для чего по пространственным координатам вводятся основные и вспомогательные сетки:

$$\begin{aligned}x_i &= ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, N_x + 1, \quad h_x = \frac{L_x}{N_x + 1}, \\ x_{i+1/2} &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \\ y_j &= -\frac{ih_y}{2} + jh_y, \quad j = 0, 1, \dots, N_y + 1, \quad h_y = \frac{L_y}{N_y}, \\ y_{j+1/2} &= \frac{y_j + y_{j+1}}{2}, \\ z_k &= kh_z, \quad k = 0, 1, \dots, N_z + 1, \quad h_z = \frac{L_z}{N_z + 1}, \\ z_{k+1/2} &= \frac{z_k + z_{k+1}}{2}.\end{aligned}$$

Здесь N_x , N_y и N_z – число внутренних узлов основной сетки по соответствующей координате. В узлах (x_i, y_j, z_k) определяется значение температуры θ^1 и концентрации примесей $\theta^r(i, j, k)$, а давление рассчитывается в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$. На вспомогательных сетках, смещенных относительно точек $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, z_{k-1/2})$ на полшага по соответствующим координатам, вычисляются компоненты вектора скорости v^1 , v^2 и v^3 .

Такая дискретизация позволяет автоматически удовлетворить крайевым условиям для температуры, примесей и скорости на границе $\partial_2 D$. С помощью контурных узлов для температуры и скорости v^2 реализуются краевые условия второго рода на границе $\partial_1 D$.

Разностные аналоги дифференциальных операторов первого порядка и операторы усреднения по координатам введены на двухточечных шаблонах:

$$\begin{aligned}d_1 \theta_{i+1/2, j, k} &= \frac{\theta_{i+1, j, k} - \theta_{i, j, k}}{h_x}, \\ \delta_1 \theta_{i+1/2, j, k} &= \frac{\theta_{i+1, j, k} + \theta_{i, j, k}}{2}, \\ d_2 \theta_{i, j+1/2, k} &= \frac{\theta_{i, j+1, k} - \theta_{i, j, k}}{h_y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_2 \theta_{i, j+1/2, k} &= \frac{\theta_{i, j+1, k} + \theta_{i, j, k}}{2}, \\ d_3 \theta_{i, j, k+1/2} &= \frac{\theta_{i, j, k+1} - \theta_{i, j, k}}{h_z}, \\ \delta_3 \theta_{i, j, k+1/2} &= \frac{\theta_{i, j, k+1} + \theta_{i, j, k}}{2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Для аппроксимации конвективных членов используется формула [5]

$$\begin{aligned}J(\theta^r, v)_{i, j, k} &= \left[\frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 d_m \delta_m \left(\theta^r \prod_{n \neq m}^3 \delta_n v^m \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sum_{m=1}^3 d_m \prod_{n \neq m}^3 \delta_n (\delta_0 \theta^r \delta_m v^m) \right]_{i, j, k}.\end{aligned}\quad (7)$$

В расчетах применяется метод искусственной сжимаемости: в системе (1)–(3) вместо уравнения неразрывности рассматривается уравнение

$$\partial_t p + \zeta^{-1} \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (8)$$

Аппроксимация уравнений (1), (3), (8) записывается с помощью разностных операторов (6), (7):

$$\begin{aligned}[\dot{v}^1 - \varepsilon^{-1}(-d_1 p - v^1)]_{i, j+1/2, k+1/2} &= 0, \\ [\dot{v}^2 - \varepsilon^{-1}(-d_2 p - v^2)]_{i+1/2, j, k+1/2} &= 0, \\ \left[\dot{v}^3 - \varepsilon^{-1} \left(-d_3 p - v^3 + \sum_{r=1}^S \lambda_r \delta_1 \delta_2 \theta^r \right) \right]_{i+1/2, j+1/2, k} &= 0, \quad (9) \\ [\dot{p} + \zeta^{-1}(d_1 v^1 + d_2 v^2 + d_3 v^3)]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} &= 0, \\ [b^r \dot{\theta}^k - \chi_r \Delta_h \theta^r - \delta_1 \delta_2 v^3 + J(\theta^r, v)]_{i, j, k} &= 0.\end{aligned}$$

В результате получается система порядка $(4 + S)N_x N_y N_z$ обыкновенных дифференциальных уравнений, ее интегрирование проводилось при помощи метода Рунге–Кутты.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе описанной схемы была разработана программа Diff_m в среде Delphi для расчета фильтрационной конвекции многокомпонентной жидкости в параллелепипеде. Для визуализации выводятся трехмерные изображения поля скорости, распределения температуры и примеси в различных сечениях области. При выводе изображений используется открытая графическая библиотека OpenGL. Программа позволяет вычислять спектр стационарных режимов при помощи вызова функций OLE-сервера MATLAB.

Для получения сосуществующих стационарных режимов предусмотрены различные способы зада-

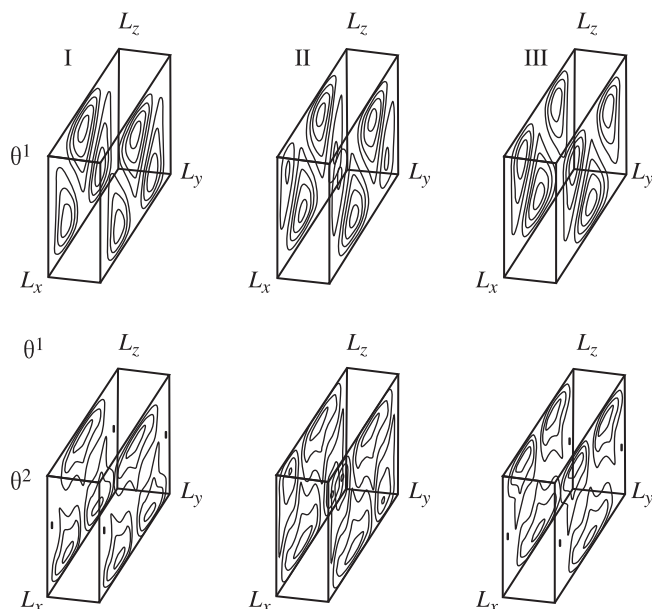


Рис. 1. Изолинии температуры и концентрации примеси для трех плоских стационарных режимов $L_y = 0,5$

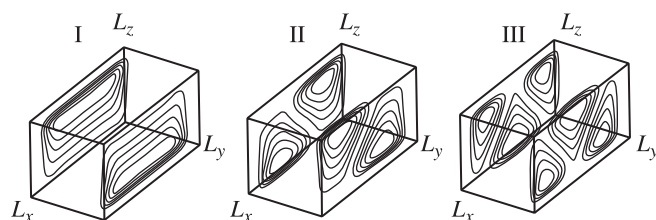


Рис. 2. Изолинии температуры для нескольких трехмерных стационарных режимов $L_y = 1$

ния начальных условий. В частности, отклонения от средних значений температуры и концентраций можно вводить по формуле

$$\theta^r(i, j, k) = A^r \sin \frac{i\pi x}{L_x} \sin \frac{j\pi y}{L_y} \sin \frac{k\pi z}{L_z},$$

$$r = 1, 2, \dots, S, \quad i, j, k = 1, 2, \dots,$$

где A^r – амплитуда отклонения. Для проведения эксперимента по трехмерной устойчивости (неустойчивости) плоских движений реализован пользовательский интерфейс, позволяющий использовать данные программы расчета плоской задачи Дарси [6].

На рисунках 1 и 2 представлены результаты расчета конвекции двухкомпонентной жидкости ($S = 2$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0,2$) в параллелепипеде с $L_x = 2$, $L_z = 1$ при фиксированных числах Рэлея $\lambda_1 = 120$, $\lambda_2 = 10$. Вычисления для параллелепипедов умеренной длины показали, что в зависимости от глубины области реализуются два сценария ответвления

конвективных движений от теряющего устойчивость механического равновесия $\vec{v} = 0$, $\theta^r = 0$. При достаточно малой глубине отвечает семейство плоских стационарных режимов, а при глубине, сравнимой с высотой, реализуются трехмерные изолированные стационарные режимы.

На рисунке 1 приведены некоторые режимы из семейства плоских ($v^2 = 0$) стационарных режимов. Аналогично случаю фильтрационной конвекции однокомпонентной жидкости [3, 5], в спектре всех режимов присутствует практически нулевое собственное значение ($10^{-7} \sim 10^{-8}$). Для всех сечений области D , параллельных плоскости xOz , распределения температуры и концентраций примеси одинаковы.

На рисунке 2 представлены изолинии температуры для трех изолированных режимов. Эти конвективные движения имеют сложную трехмерную структуру, в их спектре нет нулевых собственных значений. Режимы I и II являются устойчивыми, а режим III – метастабильным, в результате длительного установления он переходит в режим I. В силу имеющихся в задаче симметрий существуют конвективные движения, отличающиеся от приведенных направлением вращения жидкости и преобразованием температурным полем.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/6095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. Т. 49. 1991. № 5. С. 142–148.
2. Браун Д.А., Любимов Д.В., Теплов В.С. Трехмерные конвективные движения в пористом цилиндре конечной длины // Гидродинамика. Пермь, 1998. Вып. 11. С. 58–77.
3. Немцев А.Д., Цибулин В.Г. Численное исследование первого перехода в трехмерной задаче фильтрационной конвекции // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 4. С. 144–150.
4. Юдович В.И. Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математ. моделир. 2001. С. 174–178.
5. Karasözen B., Nemtsev A.D., Tsybulin V.G. Staggered grids discretization in three-dimensional Darcy convection // Comput. Phys. Commun. 2008. Vol. 178. P. 885–893.
6. Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 3. С. 123–134.

NUMERICAL INVESTIGATION METHOD OF MULTICOMPONENT FLUID CONVECTION IN A POROUS MEDIUM

A.D. Nemtsev, V.G. Tsybulin

Numerical scheme of staggered grids is developed for investigation of multicomponent fluid convection. Modeling environment is built for computation and visualization of three-dimensional regimes, parameter continuation, investigation of transitions from steady to unsteady states, calculation of stability spectra of steady states. Computation of convective flows in the parallelepiped with two opposite heat-insulated sides and linear in height temperature for other sides are presented.

Key words: convection, porous medium, multicomponent fluid, staggered grids, family of steady states.

REFERENCES

1. Yudovich V.I. 1991. [Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection]. *Matematicheskie zametki*. 49(5): 142–148. (In Russian).
2. Bratsun D.A., Lyubimov D.V., Teplov V.S. 1998. [Three-dimensional convective motions in the porous cylinder of finite length]. *Gidrodinamika*. (11): 58–77. (In Russian).
3. Nemtsev A.D., Tsibulin V.G. 2007. [Numerical study of the first transition in the three-dimensional problem of a filtration convection]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. (4): 144–150. (In Russian).
4. Юдович В.И. 2001. [Cosymmetry and multicomponent fluid convection in a porous medium]. *Izv. vuzov. Severo-Kavkaz. region. Estestv. nauki. Spetsvypusk. Matemat. modelir.* P. 174–178. (In Russian).
5. Karasözen B., Nemtsev A.D., Tsybulin V.G. 2008. Staggered grids discretization in three-dimensional Darcy convection. *Comput. Phys. Commun.* 178: 885–893.
6. Kantur O.Yu., Tsibulin V.G. 2004. [Numerical study of the plane problem of multicomponent liquid convection in a porous medium]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*. (3): 123–134. (In Russian).