

УДК 539.3

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ

© 2006 г. Академик В.А. Бабешко¹, С.В. Ратнер¹, П.В. Сыромятников¹

Описывается численно-аналитический метод построения символа Фурье матрицы Грина для пакета термоэлектроупругих слоев с плоскопараллельными границами раздела при наличии плоских трещин и/или жестких включений на границах раздела. Каждый слой может обладать произвольной термоэлектроупругой анизотропией и пьезоэлектрическими свойствами. Приводится описание экономичного приближенного численного метода вычисления, типичного для данных задач интеграла – двукратного обратного преобразования Фурье – интегрального представления решения краевой задачи при заданных механических, электрических и тепловых нагрузках на поверхности слоя и/или границах неоднородностей.

Известно, что решение многих прикладных задач тесно связано с возможностью удачного построения и исследования функции Грина [1, 2]. Различные двумерные (2D) и трехмерные (3D) функции Грина для изотропных тел и 2D-функции Грина для анизотропных тел достаточно хорошо изучены, однако 3D-функции Грина для анизотропных тел исследованы недостаточно [3]. В последние годы в этой области были получены некоторые результаты для статических и квазистатических задач, в основу которых было положено использование обобщенного формализма Строха–Лехницкого [4, 5], первоначально предложенного в классической работе по анизотропии Барнетта и Лоте [6]. В ряде случаев функции Грина получаются в образах Фурье, тогда основной трудностью является проведение аналитического обратного преобразования Фурье для получения решения в физической области определения. И хотя построение функции Грина – достаточно разработанный вопрос, тем не менее исследование ее встречает определенные сложности. Некоторые примеры функции Грина для статической задачи на 3D анизотропном упругом пространстве функции Грина были выведены в работах [7, 8]. В работе [4] была построена функция Грина для анизотропного полупространства в виде линейного интеграла на конечном интервале, в [5] выведены функции Грина для биматериала, а в более поздних исследованиях [9] выведены 3D-функции Грина для анизотропного триматериала.

В работе [10] решена краевая задача для анизотропного упругостатического многослойного композита при условии свободной от напряжений поверхности и контакта без трения на интерфейсных границах. Для решения краевой задачи используется подход, предложенный в работах [4, 5], строятся функции Грина для перемещений, напряжений и их производных в образах Фурье и предлагается новый подход к численному определению обратного преобразования Фурье на основе использования специального решения для триматериала.

Несмотря на значительный прогресс в исследовании статических краевых задач для анизотропных многослойных сред, динамические задачи до сих пор изучены слабо.

В настоящей работе рассматривается динамическая задача для термоэлектроупругих анизотропных слоев с плоскопараллельными границами раздела, содержащими трещины или жесткие включения, которая имеет как самостоятельный интерес, так и вспомогательный – для дифференциального метода факторизации в произвольных областях. Полученные в работе результаты демонстрируют способы реализации дифференциального метода факторизации, основанные на численных расчетах функций, представленных двумерными интегралами Фурье.

Пусть среда представляет собой однородные слои $\{-\infty < x_1, x_2 \leq \infty, z_{n+1} \leq z \leq z_n, z_1 = 0, z_{N+1} > -\infty, z = x_3, n = 1, 2, \dots, N\}$, где каждый имеет материальные константы $C_{ijnk}^{(n)}, e_{ijk}^{(n)}, \epsilon_{ij}^{(n)}, \chi_{jk}^{(n)}, v_{jk}^{(n)}, p_j^{(n)}, \rho^{(n)}$.

Гармонические колебания возбуждаются механическими, тепловыми, электрическими нагруз-

¹ Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону.

ками и описываются следующими уравнениями (общий множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 u_n &= 0, \quad \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial g_j}{\partial x_j} - i\omega T_0 \left(\chi_{nm} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - p_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \mu \theta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= C_{ji}^{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - e_{kji} E_k - \chi_{ji} \theta, \\ D_j &= e_{jkn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \varepsilon_{jk} E_k + p_j \theta, \\ E_i &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad g_i = -v_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad i, j, k, n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

C_{ik}^{nm} – тензор упругих постоянных, e_{jkn} – тензор пьезоэлектрических постоянных, χ_{jk} – тензор температурных коэффициентов механических напряжений, ε_{jk} – тензор диэлектрических проницаемостей, σ_{ij} – тензор напряжений, D_j – вектор электрической индукции, E_i – вектор напряженности электрического поля, Φ – электрический потенциал, v_{nm} – тензор коэффициентов теплопроводности, p_j – тензор пьезоэлектрических коэффициентов, g_j – вектор теплового потока, u_k – вектор механических смещений, $\theta = T - T_0$ – относительная температура, T – абсолютная температура, T_0 – начальная температура, $\mu = \frac{\rho C_\varepsilon}{T_0}$, C_ε – удельная теплоемкость, ρ – плотность, ω – круговая частота.

Электрический потенциал вне слоя не учитывается, поскольку диэлектрическая проницаемость вакуума считается значительно меньше проницаемости в слое.

Не останавливаясь на деталях, представим символ Фурье матрицы Грина $\mathbf{K}$ в форме

$$\begin{aligned} K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) &= F_{x_1 x_2} [k_{mn}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{mn}(x_1, x_2) \times \\ &\times \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2, \\ \mathbf{K} &= \|\mathbf{K}_{mn}\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь k_{mn} имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} k_{mn}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (4)$$

Γ_1, Γ_2 – контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе особенностей K_{mn} в соответствии с принципом предельного поглощения [11].

Описываемый далее метод является обобщением подхода работы [12] на случай пакета термоэлектродупругих слоев с неоднородностями, в которой используется двукратное преобразование Фурье к уравнениям (1), (2). Выполнив преобразования, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора $\hat{\mathbf{U}} = F_{x_1 x_2} [\mathbf{u}] = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$ – символа вектора перемещений $\{U_1, U_2, U_3\}$, электрического потенциала $\Phi = U_4$ и температуры $\theta = U_5$:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{(1)} \hat{\mathbf{U}}' + \mathbf{A}^{(2)} \hat{\mathbf{U}}'' = 0. \quad (5)$$

Здесь штрихами обозначены производные по x_3 . Матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_{js} &= -C_{rj}^{ns} \alpha_r \alpha_n + \delta_{js} \rho \omega^2, \\ A_{p4} &= A_{4p} = -e_{rpn} \alpha_n \alpha_r, \\ A_{44} &= \varepsilon_{nr} \alpha_n \alpha_r, \quad A_{j5} = i \chi_{jn} \alpha_n, \quad A_{45} = -i p_n \alpha_n, \\ A_{5j} &= \omega T_0 \chi_{jn} \alpha_n, \quad A_{54} = -\omega T_0 p_n \alpha_n, \\ A_{55} &= i \omega \rho C_\varepsilon - v_{rn} \alpha_r \alpha_n, \quad A_{jk}^{(1)} = -i \alpha_n (C_{3j}^{kn} + C_{nj}^{k3}), \\ A_{m4}^{(1)} &= A_{4m}^{(1)} = -i \alpha_n (e_{3mn} + e_{nm3}), \quad A_{44}^{(1)} = i 2 \alpha_n \varepsilon_{3n}, \\ A_{j5}^{(1)} &= -\chi_{j3}, \quad A_{5j}^{(1)} = i \omega T_0 \chi_{j3}, \\ A_{45}^{(1)} &= p_3, \quad A_{54}^{(1)} = -i \omega T_0 p_3, \quad A_{55}^{(1)} = -i \alpha_n (v_{n3} + v_{3n}), \\ A_{jk}^{(2)} &= C_{3j}^{3k}, \quad A_{m4}^{(2)} = A_{4m}^{(2)} = e_{3m3}, \\ A_{44}^{(2)} &= -\varepsilon_{33}, \quad A_{j5}^{(2)} = A_{5j}^{(2)} = A_{45}^{(2)} = A_{54}^{(2)} = 0, \\ A_{55}^{(2)} &= v_{33}, \quad (r, n = 1, 2; \quad j, k, s, m = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

δ_{js} – символ Кронекера, α_1, α_2 – параметры преобразования Фурье.

Умножая выражение (5) слева на $(\mathbf{A}^{(2)})^{-1}$, можно получить систему первого порядка относительно вектора $\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_5, U'_1, \dots, U'_5\}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{dx_3} &= \mathbf{L} \mathbf{U} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots \\ -(\mathbf{A}^{(2)})^{-1} \mathbf{A} & \vdots & -(\mathbf{A}^{(2)})^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \end{pmatrix} \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ – единичная и нулевая матрицы соответственно. Решение системы (6) приводит к проблеме на собственные значения вида

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{h} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

В каждом слое искомый вектор $\mathbf{U}^{(n)}$ можно представить следующим образом: $\mathbf{U}^{(n)} = \sum_{s=1}^{10} \mathbf{t}_s^{(n)} \mathbf{h}_s^{(n)} \exp(\lambda_s^{(n)} z)$, где $\lambda^{(n)}$, $\mathbf{h}^{(n)}$ – собственные значения и собственные векторы системы (7) для n -го слоя, $\mathbf{t}^{(n)}$ – векторы, подлежащие определению. Разрывные условия на границах раздела слоев имеют вид

$$\left(\frac{\mathbf{R}^{(n)} \mathbf{U}^{(n)}(z_{n+1}) - \mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{U}^{(n+1)}(z_{n+1})}{\tilde{\mathbf{U}}^{(n)}(z_{n+1}) - \tilde{\mathbf{U}}^{(n+1)}(z_{n+1})} \right) = \hat{\mathbf{f}}^{(n+1)}, \quad (n=1, 2, \dots, N-1), \quad (8)$$

где $\mathbf{R}^{(n)}$:

$$R_{jk} = -i\alpha_n C_{j3}^{kn}, \quad R_{j,k+5} = C_{j3}^{k3}, \quad R_{j4} = -i\alpha_n e_{nj3},$$

$$R_{j9} = e_{3j3}, \quad R_{4j} = -i\alpha_n e_{3nj}, \quad R_{44} = i\epsilon_{3n} \alpha_n,$$

$$R_{4,k+5} = e_{33k}, \quad R_{j5} = -\chi_{3j}, \quad R_{45} = p_3,$$

$$R_{55} = i\alpha_n v_{3n}, \quad R_{l,10} = R_{5m} = 0, \quad R_{5,10} = -v_{33},$$

$$R_{49} = -\epsilon_{33}, \quad j, k = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2;$$

$$l = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, \dots, 9.$$

В формуле (8) и далее через $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{U}}$ обозначены верхняя и соответственно нижняя половина вектора (матрицы) $\mathbf{U}$; $\hat{\mathbf{f}}^{(n)} = \{0; \mathbf{f}^{(n)}\} = \{0; 0; 0; 0; 0; f_1^{(n)}; \dots; f_5^{(n)}\}$ в случае трещины либо $\hat{\mathbf{f}}^{(n)} = \{\mathbf{f}^{(n)}, 0\}$ в случае включения на границе $z = z_n$, $\mathbf{f}^{(n)}$ – векторы разрывов. Относительно неизвестных $\mathbf{t}^{(n)} = \{t_1^{(n)}; \dots; t_{10}^{(n)}\}$ равенства (8) приводят к линейным алгебраическим уравнениям с блочно-диагональной структурой

$$\mathbf{C}^{(n)}(z_{n+1})\mathbf{t}^{(n)} - \mathbf{C}^{(n+1)}(z_{n+1})\mathbf{t}^{(n+1)} = \hat{\mathbf{f}}^{(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{C}^{(n)}(z) = \hat{\mathbf{R}}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{E}^{(n)}(z) = \mathbf{C}^{(n)}(0) \mathbf{E}^{(n)}(z),$$

$$\mathbf{C}^{(n)}(0) = \hat{\mathbf{R}}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)}, \quad \hat{\mathbf{R}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(n)} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ii}^{(n)} = \exp(\lambda_i^{(n)} z),$$

$$\mathbf{H}^{(n)} = \{h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \dots, h_{10}^{(n)}\}.$$

На высотах $z_1 = 0$, $z = z_{N+1}$, относительно $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(N)}$, имеем уравнения

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1)\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1})\mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Последнее уравнение (10) соответствует рассматриваемому далее случаю, когда в основании $u_j = \varphi = \theta = 0$. Соотношения (9), (10) легко позволяют получить решение $\mathbf{t}$ непосредственным обращением матрицы системы или в рекуррентном виде, однако в вычислительном отношении оно малоэффективно при больших α_n , ω из-за растущих экспонент в матрицах $\mathbf{C}^{(i)}(z_j)$. Последнее удастся устранить подходящей заменой переменных.

Введем новые неизвестные $\hat{\mathbf{t}}^{(n)} = \mathbf{G}^{-1}(z_{n+1})\mathbf{t}^{(n)}$, где $\mathbf{G}(z_{n+1})$: $g_{ii} = \exp((\lambda_1^{(n)} - \lambda_i^{(n)})z_{n+1})$, $\lambda_i^{(n)}$ – собственное число системы (7) для слоя n с наибольшей действительной частью. Данная замена позволяет вынести растущие экспоненты из матриц $\mathbf{C}^{(n)}$ и в целом за рамки вычислений.

Кратко опишем алгоритм вычисления $\mathbf{K}^{(n,j)}$. Матрица $\mathbf{K}^{(n,j)}$ соответствует слою с номером n и нагрузке $\mathbf{f}^{(j)}$: $\mathbf{K}^{(n,j)}$ является матрицей Грина многослойной среды без неоднородностей, $\mathbf{K}^{(n,j)}$, $j = 2, 3, \dots, N$ описывает вклад вектора разрывов $\mathbf{f}^{(j)}$ для среды с неоднородностями.

$$1. \mathbf{J}^{(n)} = \mathbf{C}^{(n)}(0)^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(0) \mathbf{E}^{(n+1)}, \quad \mathbf{E}_{ii}^{(n+1)} = \exp((\lambda_1^{(n+1)} - \lambda_i^{(n+1)})(z_{n+2} - z_{n+1})), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad N \geq 2;$$

$$2. \mathbf{V}^{(j)} = a_{j-1} \mathbf{J}^{(1)} \mathbf{J}^{(2)} \dots \mathbf{J}^{(j-2)} (\mathbf{C}^{(j-1)}(0))^{-1}, \quad a_{j-1} =$$

$$= \exp\left(\sum_{j=2} \lambda_1^{(j-1)} z_j\right), \quad j \geq 3, \quad \mathbf{V}^{(2)} =$$

$$= \exp(-\lambda_1^{(1)} z_2) (\mathbf{C}^{(1)}(0))^{-1}, \quad \sum_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n (\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}) z_{k+1}, \quad \sum_0 = 0;$$

$$3. \mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} \mathbf{J}^{(2)} \dots \mathbf{J}^{(N-1)}, \quad \mathbf{M} = \left(\frac{\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \mathbf{G}(z_2) \mathbf{J}}{\tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1}) \mathbf{G}(z_{N+1})} \right)^{-1};$$

$$4. \mathbf{Q}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{(j)} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \mathbf{G}(z_2) \mathbf{V}^{(j)} \mathbf{B}^{(j)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad j \geq 2;$$

$$5. \mathbf{K}^{(n,j)}(z) = \tilde{\mathbf{K}}^{(n,j)}(z) + \hat{\mathbf{K}}^{(n,j)}(z), \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(n,j)} = \hat{\mathbf{H}}^{(n)} \mathbf{Y}^{(n)}(z) \mathbf{J}^{(n)} \mathbf{J}^{(n+1)} \dots \mathbf{J}^{(N-1)} \mathbf{M} \mathbf{Q}^{(j)}, \quad z_{n+1} \leq z \leq z_n;$$

$$\hat{\mathbf{K}}^{(n,j)} = \hat{\mathbf{H}}^{(n)} \hat{\mathbf{Y}}^{(n,j)}(z) \mathbf{J}^{(n)} \mathbf{J}^{(n+1)} \dots$$

$$\mathbf{J}^{(j-2)} (\mathbf{C}^{(j-1)}(0))^{-1} \mathbf{B}^{(j)}, \quad n \leq j-2; \quad \hat{\mathbf{K}}^{(n,j)} =$$

$$= \hat{\mathbf{H}}^{(n)} \hat{\mathbf{Y}}^{(n,j)}(z) (\mathbf{C}^{(j-1)}(0))^{-1} \mathbf{B}^{(j)}, (n=j-1); \quad \hat{\mathbf{K}}^{(n,j)} \equiv 0, \\ n \geq j;$$

$$\mathbf{Y}_{ii}^{(n)} = \exp \left(\lambda_i^{(n)} z + (\lambda_1^{(n)} - \lambda_i^{(n)}) z_{n+1} - \sum n - 1 \right),$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{ii}^{(n,j)} = \exp \left(\lambda_i^{(n)} z + (\lambda_1^{(n)} - \lambda_i^{(n)}) z_{n+1} - \lambda_1^{(j-1)} z_j + \sum j - 2 \right).$$

Матрица $\mathbf{B}^{(j)}$ имеет вид $\mathbf{B}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$ в случае

трещины на высоте $z = z_j$, либо $\mathbf{B}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ в случае

включения. Векторы $\mathbf{U}^{(n)}$, $\mathbf{f}^{(j)}$ связаны соотношением

$$\mathbf{U}^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^N \mathbf{K}^{(n,j)}(z) \mathbf{f}^{(j)}. \quad (11)$$

Зная матрицу Грина, можно ставить и решать смешанные задачи для указанной краевой задачи в различных постановках [11, 13]. В процессе решения этих задач неизбежно возникает необходимость вычисления типичных двумерных интегралов Фурье. Хотя и существует достаточно большой набор методов и программ вычисления подобных интегралов, тем не менее представляет интерес разработка и более простых методов, учитывающих специфику подынтегральных функций. Ниже предлагается удобный для указанных задач приближенный метод вычисления обратного преобразования Фурье $\mathbf{u} = F_{\alpha_1, \alpha_2}^{-1}[\hat{\mathbf{U}}]$ при заданном векторе $\mathbf{f}$. Применим указанное преобразование к формуле (11) и в интегральном представлении $\mathbf{u}$, аналогичном представлению (4), перейдем к цилиндрическим координатам

$$x_1 = r \cos \beta, \quad x_2 = r \sin \beta, \quad x_3 = z,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \beta = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

$$\alpha_1 = \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma,$$

$$\gamma = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Тогда, обозначая через $\tau = \gamma - \beta - \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\mathbf{u}(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{f}(\alpha, \gamma) \times \\ \times \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha \, d\alpha \, d\tau. \quad (12)$$

Большое количество требуемых операций при вычислении матрицы $\mathbf{K}$, сильная осцилляция

и особенности подынтегрального выражения существенно затрудняют прямой счет интеграла (12). С помощью подхода, описанного ниже, можно оценить вклад вещественных полюсов и ближайших к вещественной оси комплексных полюсов в интеграл (12) при незначительных вычислительных затратах. Разобьем интеграл (12) на сумму двух:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{f} \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha \, d\alpha \, d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{f} \exp(i\alpha r \sin \tau) \alpha \, d\alpha \, d\tau \right). \quad (13)$$

Сразу же отметим, что применение известной процедуры разворота контура [13] в случае анизотропии общего вида связано с определенными трудностями и здесь не используется.

Для вычисления интегралов по Γ можно применить лемму Жордана. В первом интеграле (13) $\sin \tau \geq 0$ и контур Γ можно деформировать и замкнуть в первом квадранте, во втором интеграле $\sin \tau \leq 0$ и Γ замыкается в четвертом квадранте аналогичным образом. Замкнутые контуры содержат интегралы по мнимой оси $\Gamma_I^+ \leftrightarrow \leftrightarrow [iR, 0]$, $\Gamma_I^- \leftrightarrow [0, -iR]$, по дугам четверть-окружностей R^+ в первом и R^- в четвертом квадрантах, по действительной оси $\Gamma_R \leftrightarrow [0, R]$ при $R \rightarrow \infty$

$$\mathbf{u}(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{\Gamma_R + R^+ + \Gamma_I^+} \mathbf{U}(r, \beta, \alpha, \tau, z) \alpha \, d\alpha \, d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\Gamma_R + R^- + \Gamma_I^-} \mathbf{U}(r, \beta, \alpha, \tau, z) \alpha \, d\alpha \, d\tau. \quad (14)$$

По лемме интегралы по R^+ , R^- при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Таким образом, из (13), (14) получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^- - \mathbf{u}_I^+ - \mathbf{u}_I^-, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{u}^{\pm} = \frac{\pm i}{2\pi} \sum_k \int_{\sigma^{\pm}}^{\psi^{\pm}} \mathbf{b}^{(k)}(\gamma, z) \exp(i\xi^{(k)}(\gamma) r \sin \tau) d\tau \\ \sigma^+ = 0, \quad \sigma^- = \pi, \quad \psi^+ = \pi, \quad \psi^- = 2\pi, \\ \mathbf{u}_I^{\pm} = \frac{\mp 1}{4\pi^2} \int_{\sigma^{\pm}}^{\psi^{\pm}} \int_{\Gamma_I^{\pm}} \mathbf{K}(\alpha, \gamma, z) \mathbf{f}(\alpha, \gamma) \alpha \times$$

$$\times \exp(-|\alpha r \sin \tau|) d\alpha d\tau,$$

$$b_j^{(n)}(\gamma, z) = \operatorname{res} K_{jm}(\alpha, \gamma, z) f_m(\alpha, \gamma) \alpha \Big|_{\alpha=\xi^{(n)}(\gamma)},$$

$$(j, m = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Вычислительная сходимость интегралов по $\Gamma_I^\pm$ быстрее, чем интегралов по Γ_R . Кроме того, во всех численных экспериментах выполнялось соотношение $|\mathbf{u}_I^\pm| \ll |\mathbf{u}^\pm|$.

В проведенных модельных расчетах оценивался вклад $\mathbf{u}^\pm$ в $\mathbf{u}$ (15) (без учета $\mathbf{u}_I^\pm$) для пакета из трех различных термоэлектродупругих слоев при заданном $\mathbf{f}^{(2)}$, соответствующем случаю трещины.

Слой 1 (нумерация сверху вниз) имеет свойства ниобата лития (LiNbO_3 , тригональная сингония, класс $3m$): упругие модули $C_{11} = 2,03$, $C_{13} = 0,53$, $C_{14} = 0,75$, $C_{33} = 0,09$, $C_{44} = 2,45$, $C_{66} = 0,6$, (10^{11} Н/м²), пьезоэлектрические модули $e_{15} = 3,7$, $e_{22} = -2,5$, $e_{31} = 0,2$, $e_{33} = 1,3$ (1 Кл/м²), диэлектрические проницаемости $\epsilon_{11} = 38,9$, $\epsilon_{22} = 25,7$,

(10^{-12} Ф/м), плотность кристалла $\rho = 0,47$, (10^4 кг/м³), удельная теплоемкость $C_e = 8,092$, (10^{-4} Дж/(кг · К)) [14], коэффициенты теплопроводности $v_{nn} = v = 4,6$ (Вт/(м · К)), температурные коэффициенты механических напряжений $\chi_{nn} = \chi = 2$ (Н/(м² · К)), пьезоэлектрические коэффициенты $p_n = p = 2$ (10^{-4} Кл/(м² · К)), ($n = 1, 2, 3$). Слой 2 имеет свойства окиси цинка (ZnO , гексагональная сингония, класс $6mm$): $C_{11} = 2,097$, $C_{12} = 1,211$, $C_{13} = 1,051$, $C_{33} = 2,109$, $C_{44} = 0,4245$, $e_{15} = 0,59$, $e_{31} = -0,61$, $e_{33} = 1,14$, $\epsilon_{11} = 81,99$, $\epsilon_{33} = 97,39$, $\rho = 0,5642$, $C_e = 3,238$ [14], $v_{nn} = v = 17,14$, $\chi_{nn} = \chi = 5,85$, $p_n = p = 1$.

Слой 3 имеет свойства танталата лития (LiTaO_3 , тригональная сингония, класс $3m$): $C_{11} = 2,33$, $C_{12} = 0,47$, $C_{13} = 0,8$, $C_{14} = -0,11$, $C_{33} = 2,75$, $C_{44} = 0,94$, $e_{15} = 2,6$, $e_{22} = 1,6$, $e_{31} = 0$, $e_{33} = 1,9$; $\epsilon_{11} = 50$, $\epsilon_{22} = 33$, $\rho = 0,73$, $C_e = 1,41$ [14], $v_{nn} = v = 1,673$, $\chi_{nn} = \chi = 1,6$, $p_n = p = 2$. Ориентации кристаллов соответствуют стандартным установкам. В качестве характерных величин были использованы следующие значения: $l_0 = 10^{-3}$ м, $t_0 = 10^{-6}$ с, $m_0 = 10^4$ кг, $\phi_0 = 10^8$ В, $\theta_0 = 10^7$ К, $T_0 = 300$ К.

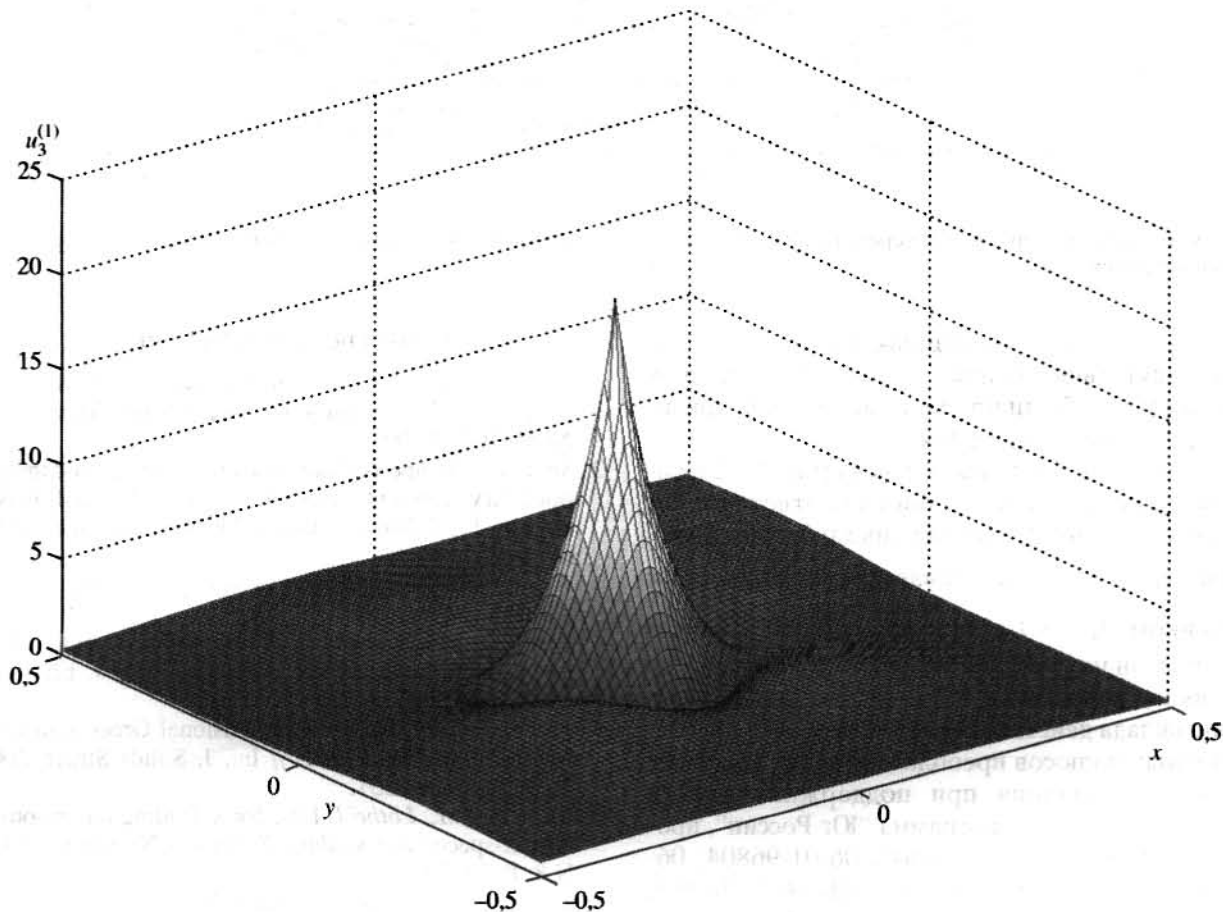


Рис. 1. Амплитуды вертикальных перемещений, создаваемых единичным механическим источником при $\omega = 7$, $z_2 = -0,1$ в виде поверхности

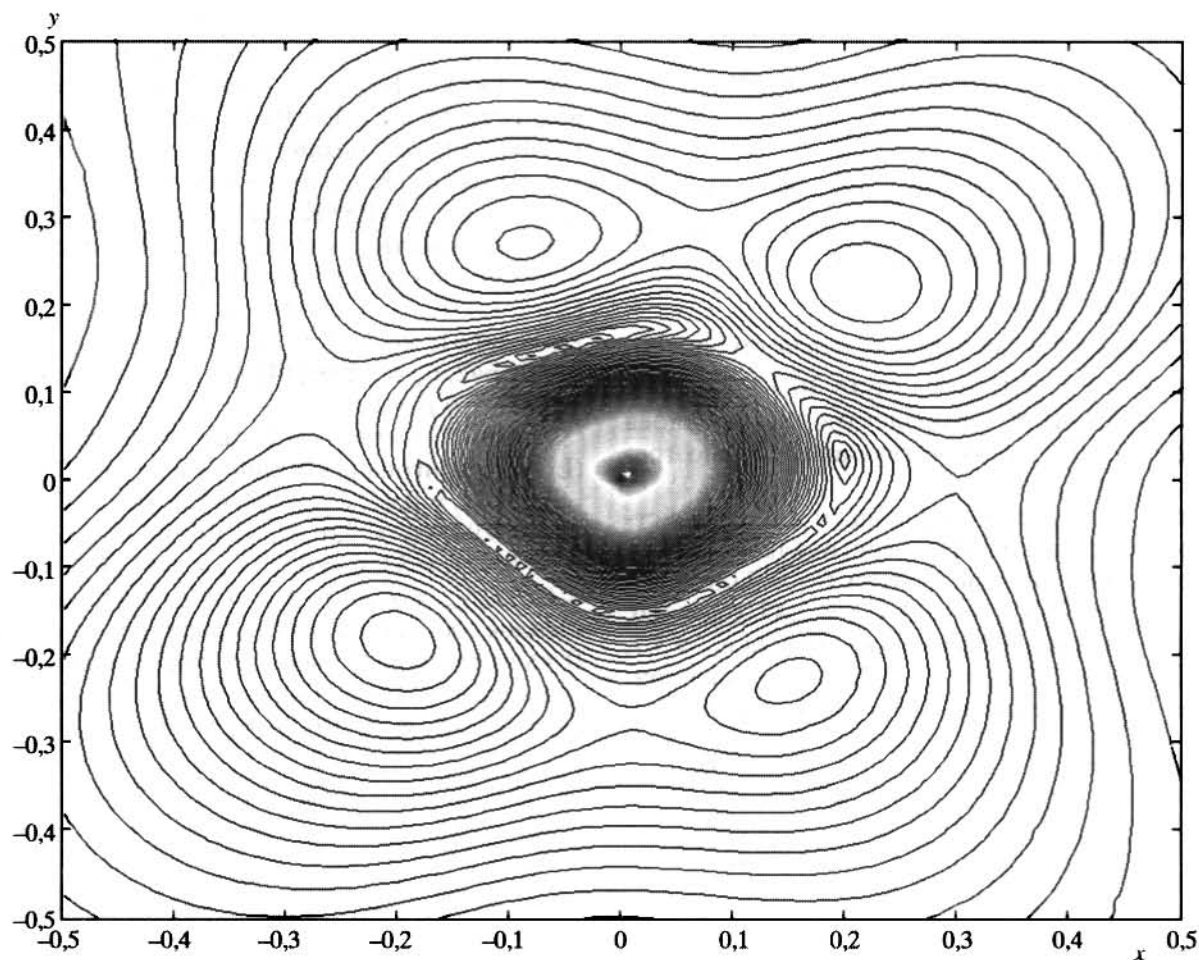


Рис. 2. Амплитуды вертикальных перемещений, создаваемых единичным механическим источником при $\omega = 7$, $z_2 = -0,1$ в виде линий уровня

Толщина h всех слоев одинакова: $h = 0,1 \cdot l_0$. Из-за отсутствия полных справочных данных тензорам ν , χ , ρ были приданы модельные, физически допустимые значения.

В качестве примера расчетов на рис. 1 и 2 в виде поверхности и линий уровней соответственно изображены амплитуды вертикальных перемещений $|u_3^{(1)}(x, y, z_2)|$, создаваемые механическим источником $f_3^{(2)} = 1$ при $\omega = 7$, $z_2 = -0,1$ (нормированные значения). В ближней от источника зоне вклад комплексных полюсов значительно больше вклада действительных полюсов, вклад вещественных полюсов преобладает в дальней зоне.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (05-01-00902), программа "Юг России", проекты 06-01-96802, 06-01-96803, 06-01-96804, 06-01-96805, 06-05-96806, проект НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭМПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fares N., Li V.C. General image method in a plane-layered elastostatic medium // ASME J. Appl. Mech. 1998. № 55. P. 781–785.
2. Shou K.J. A superposition scheme to obtain fundamental boundary element solution in multi-layered elastic media // Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2000. N 24. P. 795–814.
3. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity. Oxford: Oxford University Press, 1996. 356 p.
4. Wu K.C. Generalization of the Stroh formalism to three-dimensional anisotropic elasticity // J. Elasticity. 1988. N 51. P. 213–225.
5. Pan E., Yuan F.G. Three-dimensional Green's function in anisotropic bimaterials // Int. J. Solids Struct. 2000. N 37. P. 5329–5351.
6. Barnett D.M., Lothe J. Line force loading on anisotropic half-spaces and wedges // Physica Norvegica. 1975. N 8. P. 13–22.
7. Ting T.C.T., Lee V.G. The three-dimensional elastostatic Green's function for general anisotropic linear elastic solids // Quart J. Mech. Appl. Math. 1997. N 50. P. 407–426.

8. *Tonon F., Pan E., Amadei B.* Green's function and boundary element formulation for 3D anisotropic media // *Computers Struct.* 2001. N 79. P. 469–482.
9. *Yang B., Pan E.* Three-dimensional Green's function in anisotropic trimaterials // *Int. J. Solids. Struct.* 2002. N 28. P. 5011–5027.
10. *Yang B., Pan E.* Efficient evaluation of three-dimensional Green's function in anisotropic elastostatic multilayered composites // *Engineering with Boundary Elements.* (2002). N 26. P. 355–366.
11. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999.
13. *Бабешко В.А., Сыромятников П.В.* Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // *Изв. РАН. МТТ.* 2002. № 5. С. 35–47.
14. *Акустические кристаллы: Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской.* М.: Наука, 1982. 632 с.

ABOUT COMBINED BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN ANISOTROPIC MULTILAYERED COMPOSITES

Academician V.A. Babeshko, S.V. Ratner, P.V. Syromyatnikov

The numerical-analytical method of Green's function construction in the thermoelectroelastic problem for multilayered composite with plane cracks and/or rigid inclusions on the interfaces is described. Each layer can have arbitrary thermoelectroelastic anisotropy and pyroelectric properties. A novel approach for numerical evaluation of Green's function in physical domain is described with taking surface load or loads on inhomogeneities borders into consideration.

REFERENCES

1. Fares N., Li V.C. 1998. General image method in a plane-layered elastostatic medium. *ASME J. Appl. Mech.* 55: 781–785.
2. Shou K.J. 2000. A superposition scheme to obtain fundamental boundary element solution in multi-layered elastic media. *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomech.* 24: 795–814.
3. Ting T.C.T. 1996. *Anisotropic elasticity*. Oxford, Oxford University Press: 356 p.
4. Wu K.C. 1988. Generalization of the Stroh formalism to three-dimensional anisotropic elasticity. *J. Elasticity*. 51: 213–225.
5. Pan E., Yuan F.G. 2000. Three-dimensional Green's function in anisotropic bimaterials. *Int. J. Solids Struct.* 37: 5329–5351.
6. Barnett D.M., Lothe J. 1975. Line force loading on anisotropic half-spaces and wedges. *Physica Norvegica*. 8:13–22.
7. Ting T.C.T., Lee V.G. 1997. The three-dimensional elastostatic Green's function for general anisotropic linear elastic solids. *Quart J. Mech. Appl. Math.* 50: 407–426.
8. Tonon F., Pan E., Amadei B. 2001. Green's function and boundary element formulation for 3D anisotropic media. *Computers Struct.* 79: 469–482.
9. Yang B., Pan E. 2002. Three-dimensional Green's function in anisotropic trimaterials. *Int. J. Solids. Struct.* 28: 5011–5027.
10. Yang B., Pan E. 2002. Efficient evaluation of three-dimensional Green's function in anisotropic elastostatic multilayered composites. *Engineering with Boundary Elements*. 26: 355–366.
11. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F. 1989. *Dinamika neodnorodnykh lineynoy-uprugikh sred.* [Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media]. Moscow, Nauka: 344 p. (In Russian).
12. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. 1999. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh.* [Dynamics of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media]. Moscow, Nauchnyy Mir: 246 p.
13. Babeshko V.A., Syromyatnikov P.V. 2002. A Method for the Construction of the Fourier Symbol of the Green Matrix for Multi-Layered Electroelastic Half-Space. *Mechanics of Solids. A Journal of Russian Academy of Sciences*. 37(5): 27–37.
14. Shaskol'skaya M.P. (Ed.). 1982. *Akusticheskie kristally: spravochnik.* [Acoustic crystals: Hand-book]. Moscow, Nauka Publ.: 632 p. (In Russian).